АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

# РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

## МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

917—1854

№ 2 1956

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

*Н. В. Агеев, В. В. Алпатов, В. И. Дикушин, А. П. Лебедев, В. Ю. Ломоносов, С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, Д. Ю. Панов (председатель редколлегии), В. В. Покшишевский, Л. И. Седов, В. В. Серпинский, Э. В. Шпольский*

## СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы . . . . . 1
История математики. Биографии . . . . 2
Основания математики и математическая логика . . . . . 6
Теория чисел . . . . . 9
Алгебра . . . . . 19
Многочлены и линейная алгебра . . . . 19
Группы . . . . . 24
Поля, кольца и структуры . . . . . 36
Топология . . . . . 45
Теория функций действительного переменного . . . . . 54
Теория множеств . . . . . —
Приближение функций полиномами и их обобщениями . . . . . 57
Теория функций комплексного переменного 65
Дифференциальные уравнения . . . . . 78
Обыкновенные дифференциальные уравнения . . . . . 78
Уравнения в частных производных . . . 83
Приложения к физике, технике и естественным наукам . . . . . 93
Интегральные уравнения . . . . . 97
Приложения интегральных уравнений . . — 
Вариационное исчисление . . . . . 99
Анализ (другие вопросы) . . . . . 100
Числовые ряды . . . . . 105
Специальные функции . . . . . 108
Интегральные преобразования и операционное исчисление . . . . . 110
Приложения общих методов математического анализа . . . . . 111
Функциональный анализ . . . . . 112
Теория вероятностей . . . . . 121
Математическая статистика . . . . . 124
Теория игр . . . . . 129
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов в технике . . . 129
Геометрия . . . . . 132
Приложения геометрии . . . . . 134
Проективная и начертательная геометрия 134
Алгебраическая геометрия . . . . . 136
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства . . . . . 138
Геометрия $n$-мерного пространства. Теория относительности . . . . . 141
Метрические методы в геометрии . . . 146
Геометрия выпуклых многообразий . . . 148
Численные и графические методы . . . . 149
Таблицы . . . . . 153
Математическая теория электрических цепей 154
Вычислительные машины и математические приборы . . . . . 156
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике . . 173
Авторский указатель . . . . . I—IV

# РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
# МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*,
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, С. П. Фиников, С. В. Фомин*

**Рефераты 917—1854** **№ 2** **Февраль 1956 г.**


## ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

**917. Основные итоги научной деятельности Академии наук СССР за 1954 г. Грабский** (Stan praci i osiagniecia Akademii Nauk Zwiazku Radzieckiego w roku 1954. Grabski Marian), Nauka polska, 1955, 3, № 2, 176—186 (польск.)

**918. Заседания Московского математического общества.** Успехи матем. наук, 1955, 10, № 3, 179—192

Сообщение о докладах, прочитанных на заседаниях Московского математического общества:

15 февраля 1955 г. А. Г. Витушкин, *p*-мерные вариации множеств в *n*-мерных пространствах (РЖМат, 1955, 148, 649, 1701, 1702). Б. И. Плоткин, О радикалах в группах.

22 февраля 1955 г. Р. Л. Добрушин, Предельные теоремы для сумм функций от последовательно пробегаемых состояний в цепях Маркова с произвольным множеством состояний. Р. М. Гейдельман, Расслоение конгруенций окружностей и сфер в конформном пространстве. П. И. Швейкин. Об аффинноинвариантных построениях на поверхности.

1 марта 1955 г. Л. А. Скорняков, Представление неассоциативных колец в ассоциативных. П. Л. Ульянов, О продолжении функций.

8 марта 1955 г. В. П. Потапов, Мультипликативная структура аналитических *J*-нерастягивающих матриц-функций. А. А. Марков, О бесконечности в математике (окончание обсуждения доклада состоялось на заседании 11 марта 1955 г.).

15 марта 1955 г. Эрих Келер, Арифметика, алгебраическая геометрия и теория функций.

22 марта 1955 г. В. М. Глушков, О некоторых классах групп, полных над топологическими полями.

29 марта 1955 г. А. А. Ляпунов, О программировании на автоматических вычислительных машинах.

12 апреля 1955 г. И. Г. Петровский, Е. М. Ландис, О числе предельных циклов дифференциального уравнения первого порядка, правая часть которого является отношением многочленов второй степени. А. Д. Мышкис, И. М. Рабинович, Первое доказательство теоремы о неподвижной точке при непрерывном отображении шара в себя, данное латышским математиком П. Г. Болем.

**919. Февральское собрание в Нью-Йорке** (The February meeting in New York), Bull. Amer. Math. Soc., 1955, 61, № 3, part 1, 214—231 (англ.)

Приводятся краткие резюме докладов, представленных 511-му собранию Американского математического общества в Нью-Йорке 26 февраля 1955 г.

**920. По поводу математики. Порт** (A propos de mathématiques. Porte Jean), Connaiss. homme, 1955, № 6—7, 21—32 (франц.)

Основное содержание статьи посвящено анализу кризисов в математике и их преодолению (введение иррациональных чисел, разработка математического анализа, парадоксы теории множеств). В связи с этим подвергается обсуждению вопрос об адэкватности науки, в особенности математики, объектам реального мира.

Проводится также мысль плодотворного влияния на математику запросов физики и других наук, что, однако, не исключает возможности и самостоятельного развития математики и создания таких теорий, которые находят свое применение к практике и в других науках гораздо позже (например, тензорная геометрия в теории относительности).

Реальным кризисом в современной математике автор считает чрезвычайное обилие математических работ, узкую специализацию математиков и опубликование работ на многих языках, что зачастую лишает математиков возможности быть в курсе развития своей науки. Г. А. Сухомлинов

**921. Постулаты и математика. Денбоу** (Postulates and mathematics. Denbow C. H.), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 4, 233—236 (англ.)

Статья направлена против преувеличения значения постулационизма как в развитии математики, так особенно в преподавании математики в средней школе и на первых курсах высшей школы. Защищается взгляд разумного сочетания в педагогической практике дедуктивного метода с индуктивным. Г. А. Сухомлинов

**922. Реальность и символизм в математике. Лоран** (Réalités et symbolismes en mathématiques. Lorent Henri), Enseign. math., 1953, 39, № 4—6, 194—210 (франц.)

Исходя из положения, что математика, будучи абстрактной наукой, имеет корни в воспринимаемой нашими чувствами действительности, автор задается целью выяснить связь между реальной основой математики и различными уровнями абстракции в ней на примерах понятий, вводимых на начальных ступенях обучения.

Автор излагает ряд соображений, опровергающих афоризм Рассела («В математике никогда не знают, о чем говорят, и верно ли то, что говорят»).

А. С. Смогоржевский

**923. О математическом образовании в Италии. Себаштьян-и-Силва** (Sobre o ensino da matemática em Itália. Sebastião e Silva J.), Ciência (Lisboa), 1954, 4, № 9—10, 28—43 (порт.)

**924. Обзорные математические курсы для студентов, не специализирующихся в естественно-научных профессиях. Коган** (Survey courses in mathema-

tics for the liberal arts student. Cogan E. J.), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 5, 319—322 (англ.)

Общие соображения о пользе обзорных лекций по основам математических наук с анализом популярных книг и проектами программ таких курсов.

В. П. Левин

925. **К вопросу о политехнической основе в преподавании математики. Панченко В. М.,** Уч. зап. Тульск. гос. пед. ин-та, 1954, № 5, 3—38

Отмечается, что основными линиями развития политехнической подготовки учащихся на уроках математики являются: 1) повышение идейного уровня преподавания математики и 2) усовершенствование «практических умений и навыков». По второй из этих линий даются некоторые конкретные рекомендации.

В. П. Левин

926. **Направления развития математики в средней школе. Вильсон** (Trends in high school mathematics. Wilson Jack D.), School. Sci. and Math., 1955, 55, № 6, 462—468 (англ.)

Отмечая трудность предсказания дальнейших путей развития преподавания математики в школе, автор формулирует 6 основных направлений, сменяющих друг друга или одновременно намечающихся в современной средней школе в США: 1. Усиление идейной стороны в математике, акцент на формально логических доказательствах и построениях в курсе геометрии и алгебры; в практике преподавания это направление не прививается вследствие перегруженности классов и слабой подготовки учащихся на первой ступени обучения, а также вследствие требования приблизить преподавание математики к практическим нуждам. 2. «Наводящее» преподавание, идущее вразрез с первым направлением: «более психологическое, чем логическое, индуктивное, более чем дедуктивное», построенное на изучении частных случаев и экспериментировании. 3. Выдвижение на первый план алгебраической и функциональной точек зрения (преимущественно «вычислительное» направление с заметным политехническим уклоном). 4. Преподавание математики как собрания «правил» для решения конкретных задач практического содержания с пренебрежением к логической структуре школьных математических дисциплин. 5. Преподавание, делающее математику «интересной»; это направление не считается с традиционными программами, вводит в школу элементы разнообразнейших математических дисциплин (например, топологии), преследует цель чистой занимательности, жертвуя основательностью и систематичностью знаний учащихся. 6. Направление на дифференциацию учащихся по их способностям и подготовке, синтезирующее почти все предыдущие направления в различных по уровню подгруппах класса.

В. И. Левин

927. **Математика, школа и ОРАКЛЕ. Хаусхолдер** (Mathematics, the schools and the ORACLE. Householder Alston S.), Computers and Automat., 1955, 4, № 7, 6—9 (англ.)

Автор предостерегает от того взгляда, что развитие машинной математики делает широкую математическую подготовку в школах излишней. Популярно излагаются некоторые вопросы (в том числе программирования), связанные с работой вычислительной машины ОРАКЛЕ (ORACLE)—Oak Ridge Automatic Computer and Logical Engine), на примере которых показывается необходимость математических знаний для обслуживающего машину персонала.

В. И. Левин

928. **Анализ необходимых математических знаний для студентов технических специальностей. Карст** (Analysis of the required undergraduate mathematics courses for engineering students. Karst Otto J.), School Sci. and Math., 1955, 55, № 1, 29—39 (англ.)

Отмечается, что математическая подготовка студента должна быть такой, чтобы он 1) имел ясное представление о понятии функции, понятии предела, определении производной, определении интеграла как предела суммы, формуле Ньютона-Лейбница, 2) безукоризненно дифференцировал и интегрировал, 3) умел математически сформулировать прикладную задачу и физически истолковывать полученное математическое решение, 4) знал о существовании других более высоких разделов математики, а именно: дифференциальных уравнениях, функциях комплексного переменного, теории вероятностей и статистике, гармоническом анализе, векторном анализе. Даются методические указания по построению курса математики в высшем техническом учебном заведении по четырем семестрам, приводится примерная программа и некоторые соображения относительно учебной литературы.

В. И. Левин

929 **Математика, используемая на различных факультетах университета. Расмуссен** (Mathematics used in courses of various departments in a university. Rasmussen Otho M.), Math. Teacher, 1955, 48, № 4, 237—242 (англ.)

Статистический анализ применений ряда вопросов (правил, теорем, понятий) из элементарной и высшей математики в обучении специальностям: народное хозяйство, журнализм, фармокология, астрономия, бактериология, химия, география, экономика, психология, физика и др.

В. И. Левин

930 **К. Избранные сочинения. Т. I. Пинкерле** (Opere scelte. Vol. I. Pincherle Salvatore. A cura della Unione Matematica Italiana. Roma, Edizioni Cremonese, 1954, II + 397 pp. (1 plate). 3500 Lire) (итал.)

38 избранных математических статей Пинкерле будут изданы в двух томах. Этот том содержит речь Амальди (1937), посвященную памяти Пинкерле, полный перечень его публикаций, собственную статью Пинкерле о своей работе (Acta math., 1925, 46, 341—362) и 14 других статей.

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 11, 924.

---

**См. также:** 949

## ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

931. **Вавилонская школа. Фалькенштейн** (Die babylonische Schule. Falkenstein Adam), Saeculum, 1953, 4, № 2, 125—137 (нем.)

В сумерийском дидактическом стихотворении, дающем оригинальные (единственные в своем роде) заключения относительно школьной жизни в Вавилонии около 2000 лет до н. э., говорится относительно математики следующее: «ты обучаешь его (школьника) тонкостям счетных таблиц, ты объясняешь ему решения арифметических задач вместе с проверкой (Rechnens und Abrechnens), ты проводишь его по запутанным вопросам делений (?)». О математических трудностях говорит также одна надпись, дающая сведения о школьном образовании ассирийского царя Ассурбанипала (668—626): «я решаю сложнейшие задачи на умножение и деление, которые не позволяют сразу увидать их сущности».

Перевод из Zbl. Math., 1954, 51, № 1—5, 2.

932. **Необъясненная ошибка в вавилонской клинописной таблетке Plimpton 322. Гиллингс** (Unexplained error in babylonian cuneiform tablet Plimpton 322. Gillings R. J.), Austral. J. Sci., 1953, 16, № 2, 54—56 (англ.)

В таблетке Plimpton 322 (с. Neugebauer O., Mathematical Cuneiform Texts, New Haven, 1945, стр. 37, 38), дающей вспомогательные величины для вычисления целых чисел, удовлетворяющих уравнению $b^2 + l^2 = d^2$

и содержащей значения выражений $d^2/l^2$, $b = p^2 - q^2$, $d = p^2 + q^2$ (при $l = 2pq$) для различных чисел $p$ и $q$, в третьем столбце второй строки имеется ошибка: для значений $p = 1{,}4$, $q = 27$ вместо $p^2 + q^2 = 1, 20, 25$ стоит 3, 12, 1. Автор объясняет это тем, что, вычисляя $p^2 + q^2$ по формуле $(p + q)^2 - 2pq$, составитель ошибочно написал $(p + q)^2 + 2q$, т. е. $(1{,}4 + 27)^2 + 2{,}27$ и, кроме того, ошибочно отнес 54 единицы в следующий высший разряд: $(1{,}4 + 27)^2 = 1{,}31^2 = 2, 18, 1; 2, 18, 1 + 54{,}0 = 3{,}12{,}1$. И. Н. Веселовский

**933. Учение Платона об Одном и неопределенной Диаде и его следы в греческой математике. Маркович** (La théorie de Platon sur l'Un et la Dyade indéfinie et ses traces dans la mathématique grecque. Marković Željko), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 423—424 (франц.)

Автор утверждает, что учение Платона об Одном и неопределенной Диаде (т. е. двоице), одним из выражений которого являются рассуждения о Пределе и Беспредельном в диалоге «Филеб», оказало значительное влияние на последующую греческую математику; следы этого учения имеются в определениях «Начал» Евклида, у Герона, Теона Смирнского, Никомаха и особенно у Прокла. Обоснования этих утверждений не приведены. А. П. Юшкевич

**934. Ошибка в одном издании Архимеда, ее возникновение и последствия. Хеллер** (Ein Fehler in einer Archimedes-Ausgabe, seine Entstehung und seine Folgen. Heller Siegfried), Abhandl. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1954, № 63, 1—39 (нем.)

В 1953 г. Хермелинк указал на одну неточность в предложении XXI сочинения Архимеда «О коноидах и сфероидах» в известном издании Гейберга (РЖМат, 1955, 568). Ранее эта же неточность была отмечена Дейкстерхёйсом (E. J. Dijksterhuis, Archimedes. Groningen, 1938—1944, стр. 23). Автор показывает, что различные неточности в соответствующем месте трактата Архимеда появились в рукописях и печатных изданиях чрезвычайно давно; они были замечены еще Коммандино в 1558 г. Автор восстанавливает также вероятное первоначальное изложение соответствующего места у Архимеда. А. П. Юшкевич

**935. Аналитическая геометрия в александрийский период. Бойер** (Analytic geometry in the Alexandrian age. Boyer Carl B.), Scripta math., 1954, **20**, № 3—4, 143—154 (англ.)

Отмечается, что координаты в смысле величин, отнесенных одним предметам для определения их положения относительно других предметов, были использованы еще в примитивных звездных картах халдеев, ранне-египетских кадастровых обозрениях и позднее в греческой астрономии и географии.

Греческие геометры не пытались свести число неизвестных величин или отрезков, соотношения которых определяют свойства геометрического образа, к минимальному числу, как это имеет место в астрономии или в координатной геометрии Декарта; у Аполлония свойства эллипса и гиперболы выражаются в терминах площадей с помощью двух абсцисс и одной ординаты. Отсутствие символической алгебры делало их запись громоздкой.

Основное различие между геометрией Аполлония и современной аналитической геометрией, по мнению автора, состоит, однако, в том, что Аполлоний никогда не отправляется от координатной системы, от двух переменных и соотношения между ними, чтобы затем строить кривую как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому соотношению. Все же Аполлоний мог установить с помощью приема, равнозначного преобразованию координат, что геометрическое соотношение, эквивалентное уравнению $xy + ax + bx + c = 0$, представляет равностороннюю гиперболу. Ему была известна также эквивалентность других форм уравнений конических сечений, включая постоянство суммы и разности фокальных радиусов для эллипса и гиперболы. Он строил касательные и поляры с помощью свойств гармонического деления; открыл, что вообще можно провести четыре нормали к коническому сечению из данной точки; открыл и изучил эволюты конических сечений. Можно думать, что Аполлоний, а может быть также Аристей и Евклид знали определения конических сечений через свойства относительно фокуса и директрисы. Вероятно, Аполлонию было известно определение конического сечения по пяти точкам.

Сочинение «О конических сечениях» не является единственным вкладом Аполлония в аналитическую геометрию. К сожалению, работа «Плоские места», которая оказала влияние на последующее развитие аналитической геометрии, потеряна и о ее содержании можно судить только по комментариям Паппа, Евтокия и др.

Переходя к работе Архимеда, посвященной коническим сечениям, естественно более ранней, чем соответствующая работа Аполлония, автор отмечает, что в ней рассматриваются главным образом вопросы измерения. Указывается также, что Архимед способствовал развитию аналитической геометрии открытием новой кривой-спирали Архимеда, определение которой равнозначно полярному уравнению $r = k\theta$. К весьма важным кривым, открытым греками, относятся квадратриса Гиппия, циссоида Диоклеса и конхоида Никомеда.

Более древние трактаты по высшей геометрии утрачены и во многих случаях «Математический сборник» Паппа является главным источником, по которому можно судить об этих потерянных работах.

Папп решал задачу определения конического сечения по пяти точкам посредством построения, вероятно, известного Аполлонию, но впоследствии забытого. Он дал окончательную формулировку греческому разделению кривых на плоские, пространственные и линейные места. Задача Паппа явилась источником создания Декартом аналитической геометрии.

В заключение отмечается, что промежуток времени в тринадцать столетий от Паппа до Декарта был свидетелем развития замечательных достижений, использованных затем в аналитической геометрии, но самым важным из них было возникновение символической алгебры — инструмента, в котором прежде всего нуждались Аполлоний и Папп. А. Е. Раик

**936. Франсуа Виет и спираль Архимеда. Гофман** (François Viète und die Archimedische Spirale. Hofmann Jos E.), Arch. Math., 1954, **5**, № 1—3, 138—147 (нем.)

Трактат Архимеда «О спиралях», первое знакомство с которым средневековых европейских математиков относится к XIII—XIV вв., был глубоко изучен Ф. Виетом. В Variorum de rebus mathematicis responsorum, liber VIII (1593) Виета изложен оригинальный метод приближенного построения касательной к спирали Архимеда (автор дает оценку приближения посредством разложений в ряды), применяемый затем для приближенной квадратуры круга. В Munimen adversus nova cyclometrica (1594) Виет дает весьма точное приближение к площади кругового сегмента с помощью некоторого вписанного сегмента спирали. В общей характеристике творчества Виета автор подчеркивает роль его трудов в развитии аналитической геометрии и анализа XVII в., до сих пор изученную недостаточно. (Ср. РЖМат, 1955, 2494). А. П. Юшкевич

**937. Кеплер и Галилей. Бляшке** (Keplero e Galileo. Blaschke Wihelm), Giorn. mat. Battaglini, 1954, **82**, № 1, 309—334 (итал.)

Итальянский перевод популярной лекции, прочитанной в 1946 г. в Гамбурге немецким геометром В. Бляшке.

**938. Гюйгенс и построение двух средних пропорциональных. Конте** (Huygens e l'invenzione di due medie proporzionali. Conte Luigi), Period. mat., 1953, 31, sér. 4, № 3, 145—157 (итал.)

Разобраны три способа построения двух средних пропорциональных, предложенные Х. Гюйгенсом (1654 г.). Конте показывает, что в основе этих построений лежал так называемый метод вставки. Конте излагает также решение Гюйгенса задачи об удвоении куба, являющейся частным случаем задачи о построении двух средних пропорциональных, и основанное на этом решении приближенное построение ребра искомого куба с помощью циркуля и линейки. На удвоенном ребре $2a$ данного куба как на диаметре $AC$ строится полукруг; вписываются хорды $AF$ и $CD$, равные соответственно сторонам вписанных шестиугольника и восьмиугольника; если $FC$ и $AD$ пересекаются в $E$, то $AE$ дает приближенно величину ребра удвоенного куба, т. е. $\sqrt[3]{2}\,a$. Приближение Гюйгенса избыточное и имеет относительную погрешность меньше 1/2290.

А. П. Юшкевич

**939. О вторичных парусах Винченцо Вивиани. Тенка** (Sulle vele secondarie di Vincenzio Viviani. Tenca Luigi), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, ser. 3, № 4, 456—459 (итал.)

В 1692 г. Вивиани поставил задачу: вырезать на поверхности полусферы 4 равных симметричных отверстия так, чтобы остающаяся поверхность («флорентинский парус») была точно квадрируема. В предисловии к сочинению Formazione e misura di tutti i cieli (Firenze, 1692), в котором дано решение этой задачи, Вивиани говорит о возможности построить на полусфере бесчисленное множество «вторичных» квадрируемых парусов, площади которых находятся в некоторых данных отношениях к площади «главного» паруса. Автор приводит простое аналитическое решение этой второй задачи Вивиани, собственное решение которого не сохранилось.

А. П. Юшкевич

**940. Мнимые числа. Форти** (I numeri immaginari. Forti Umberto), Illustr. scient., 1954, 6, № 56, 6—11 (итал.)

Популярный научно-исторический очерк учения о комплексных числах.

**941. Об исследованиях Л. Эйлера в области теории уравнений в частных производных. Франкль Ф. И.** В сб.: Историко-матем. исследования, вып. 7, М., Гостехиздат, 1954, 596—624

Рассматриваются работы Эйлера по теории уравнений с частными производными, собранные в третьем томе его «Интегрального исчисления», а также исследования «О колебании струн», «Разъяснения о движении колеблющихся струн», «О распространении звука», «О движении воздуха в трубах», «О движении струн переменной толщины», «Об интеграции уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x} + \frac{b}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{c}{x^2} z$» и др.

Автор приходит к заключению, что Эйлер является основоположником теории уравнений в частных производных. Эйлер дал общее решение линейного уравнения первого порядка $\frac{\partial z}{\partial y} = V(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + U(x, y)$, где $V$ и $U$ — произвольные функции. Кроме того, он получил общие решения многочисленных нелинейных уравнений, которые каждый раз даются в квадратурах.

Эйлер исследовал общее линейное уравнение гиперболического типа с переменными коэффициентами.

Уравнение

$$(x+y)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + m(x+y)\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + nz = 0 \ldots, \quad (1)$$

которое нашло широкое применение в науке, изучено впервые Эйлером; его часто называют уравнением Эйлера — Пуассона. Пуассон нашел его общее решение, пригодное для нецелых $m\,(0 < m < 1/2)$ и $n = 0$ и не требующее дифференцируемости произвольных функций, при помощи которых оно выражается. Решение Эйлера, имеющее ряд практических преимуществ, в то же время требует в общем случае бесконечно многократной дифференцируемости этих функций. Иногда это уравнение именуют «уравнением Дарбу».

Эйлер показывает, что при помощи характеристических координат уравнение $\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} - \frac{\nu}{r}\frac{\partial s}{\partial r} = 0$ сводится к предыдущему уравнению (1), где $m = \nu/2$, $n = 0$, которое он решает при целых $m$ в явном виде формулой, содержащей две произвольные функции и конечное число их производных, т. е. посредством некоторого обобщения решения для сферических волн. К уравнению (1) Эйлера приводит также проблема колебания струн переменной толщины. Уравнение (1) и его решение, данное Эйлером, нашли впоследствии многочисленные приложения в газовой динамике.

Эйлеру принадлежит важнейший результат по уравнениям для функций трех независимых переменных, а именно решение задачи о колебаниях мембраны. Как показал Эйлер, отклонение $z$-точки мембраны от положения равновесия при малых колебаниях сводится к ур-нию цилиндрических волн $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$. Эйлер находит полную систему частных решений этого уравнения (собственные колебания) для мембран, имеющих форму прямоугольника и круга. При решении задачи о колебании мембраны круговой формы Эйлер впервые вводит цилиндрические функции с произвольным целым индексом, которые впоследствии были названы «функциями Бесселя».

Эйлер впервые ввел, правда в нестрогой форме, понятие неаналитической функции. Современным понятием аналитической функции он не владел. В связи с этим Эйлер не достиг полной ясности в вопросе об общем решении уравнений эллиптического типа.

К мысли о необходимости введения в анализ неаналитических функций Эйлер пришел, занимаясь проблемой распространения звука.

Справедливо придавая большое значение введению неаналитических функций в теорию уравнений с частными производными, Эйлер ошибался, считая, что общее решение задачи колебания струны не может быть найдено путем разложения по синусоидальным колебаниям. Кроме того, Эйлер не считал, вообще говоря, возможным представление общих решений линейных уравнений с частными производными в виде рядов, образованных из частных решений.

Р. А. Симонов

**942. Источники по истории геометрии (в частности начертательной). Адамо** (Le fonti della storia della geometria particolarmente rappresentativa. Adamo Marco), Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, suppl., 1952, 22, 1—12 (Журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

**943. Нильс Хенрик Абель. Ланге-Нильсен** (Niels Henrik Abel. Lange-Nielsen Fr.), Nord. mat. tidskr., 1953, 1, № 2—3, 65—90, 143 (норв.; резюме англ.)

Статья содержит некоторые поправки и дополнения к биографии Абеля. Рассматриваются алгебраические идеи Абеля. Работы Абеля по анализу группируются по следующим трем проблемам: 1) нахождение всех функций, интегралы от которых могут быть выражены элементарными функциями; 2) нахождение связи между определенными интегралами одного и того же вида, но имеющими различные пределы интегрирования («теоремы сложения»); 3) обращение функции, заданной определенным интегралом. Абель глубже чем его предшественники понимал те важные соотношения, которые связывают эти три проблемы. Здесь же автор рассматривает вопрос об оригинале «парижского мемуара» Абеля, найденном в 1952 г. В. Бруном (см. РЖМат, 1955, 3560).

В связи с работами Абеля и Якоби по теории эллиптических функций, автор высказывает мнение, что Якоби недостаточно отметил приоритет Абеля в своих «Fundamenta nova». Далее рассматриваются работы Абеля по теории бесконечных рядов. В 1826 г. появился мемуар Абеля о биномиальном ряде, который Кнопп (Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Berlin, 1922) сравнивает по значению с работой Ньютона о рядах. В мемуаре «Sur la résolution algébrique des équations» Абель дает программу исследований по бесконечным рядам, которой следовали многие математики XIX в. (Бертран, Дини и др.). Статья заканчивается словами французского биографа Абеля Послуана. «Если нет времени для чтения всей работы Абеля, то нужно найти его по крайней мере для размышления над несколькими страницами ее: они лучше, чем что-либо другое, демонстрируют ясность мысли и удивительную изобретательность Абеля». Библиография, 24 назв. И. Я. Депман

**944. К биографии С. В. Ковалевской (по материалам ее переписки). Полубаринова-Кочина П. Я.,** В сб.: Историко-матем. исследования, вып. 7, М., Гостехиздат, 1954, 666—712

Материалы о научной и общественной деятельности и личной жизни С. В. Ковалевской. К статье приложено письмо Эрмита от 8 марта 1844 г., в котором он сообщает С. В. Ковалевской свои соображения по поводу мероморфных решений уравнения Лапласа и о способе приведения гиперэллиптических интегралов.

К. А. Рыбников

**945. Научные труды Фабио Конторто. Сегре** (L'opera scientifica di Fabio Conforto. Segre Beniamino), Rend. mat. e applic., 1954, **14**, № 1—2, 48—74 (итал.)

Дается характеристика отдельных работ Ф. Конторто и хронологический перечень его публикаций.

**946. К двухсотлетию со дня смерти Ж.-П. де Круза. Делорм** (A propos du bi-centenaire de la mort de J.-P. de Crouzas. Delorme Suzanne), Arch. internat. histoire sci., 1954, **7**, № 28—29, 248—253 (франц.)

Статья содержит историю «первого кресла» иностранного члена Королевской французской академии наук, которое было учреждено в 1699 г. для Лейбница. Круза, занимавший названное место позднее (1725—1750 гг.), писал в разных областях науки и литературы, не оставив нигде глубоких следов. В области математики можно назвать его «Комментарии к Анализу бесконечно малых Лопиталя» и переписку с Фонтенелем о геометрии бесконечности. Загадкой является сохранившееся в архиве Академии письмо Круза от 24 мая 1718 г. к президенту академии Реомюру, в котором Круза предлагает себя в качестве кандидата на место иностранного члена академии «на освободившееся со смертью Ньютона кресло» (Ньютон, как известно, умер девять лет спустя); дальнейшие письма не проливают света на этот факт. И. Я. Депман

**947. Первое выступление в защиту идей Лобачевского в России. Гайдук Ю. М.,** Природа, 1954, № 8, 82—83

Автор отмечает, что русский физик А. С. Савельев в своей статье «К. Ф. Гаусс» («Журнал Министерства народного просвещения», 1858, часть 97, отд. V, стр. 1—34) положительно отзывается о неевклидовой геометрии (он называет ее антиевклидовой), а в подстрочном примечании обращает внимание на заслуги Н. И. Лобачевского в создании новой геометрии. Это было первое после смерти Лобачевского сочувственное упоминание в печати о его идеях и трудах по геометрии. И. Г. Башмакова

**948. К столетию со дня рождения Грегорио Риччи-Курбастро. Тоноло** (Commemorazione di Gregorio Ricci-Curbastro nel primo centenario della nascita. Tonolo Angelo), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1954, **23**, № 1, 1—24 (итал.)

Расширенный текст доклада, прочитанного Тоноло 21 сентября 1953 г. в Падуанском университете в связи со столетием со дня рождения знаменитого итальянского геометра, профессора этого университета Г. Риччи-Курбастро (1853—1925 гг.). Помимо биографии и обзора научной деятельности создателя абсолютного дифференциального исчисления (термин самого Риччи, 1893 г.), в статье приведена обширная библиография вопроса. Приложен портрет Риччи. А. П. Юшкевич

**949. Математическое творчество Дьюла Сёкефалви-Надь. Облат** (Szökefalvi-Nagy Gyula matematikai munkássága. Oláth Richárd), Mat. lapok, 1954, **5**, № 4, 189—243 (венг.; резюме русс., франц.)

Дается обзор научной деятельности покойного академика Д. Сёкефалви-Надь в области математики. Им написаны 150 статей и книга по теории геометрических построений. Его работы относятся к следующим областям математики: 1) диофантов анализ, 2) геометрия полиномов, распространяемая и на целые функции нулевого и первого рода, 3) геометрические проблемы и топология, главным образом кривые и поверхности с максимальными индексами, 4) теория геометрических построений. И. Я. Депман

**950. Поль Таннери (1843—1904). Татон** (Paul Tannery (1843—1904). Taton René), Rev. histoire sci., 1954, **7**, № 4, 303—312 (франц.)

Статья является вводной к серии статей о жизни и творчестве французского историка математики и естественных наук Поля Таннери, опубликованных в связи с 50-летием со дня его смерти. В настоящей статье содержатся основные факты биографии П. Таннери и общая оценка его научной деятельности. К. А. Рыбников

**951. Поль Таннери и всеобщая история наук. Делорм** (Paul Tannery et l'histoire générale des sciences. Delorme Suzanne), Rev. histoire sci., 1954, **7**, № 4, 297—302 (франц.)

Материалы о сотрудничестве П. Таннери в Revue de synthèse historique (издании, основанном А. Берром и предшествовавшем Revue d'histoire des sciences). К. А. Рыбников

**952. Переписка Поля Таннери и история наших исследований. Сартон** (La correspondance de Paul Tannery et l'histoire de nos études. Sarton George), Rev. histoire sci., 1954, **7**, № 4, 321—325 (франц.)

Обзор переписки П. Таннери, занимающей XIII—XVI тома его 17-томного собрания сочинений («Mémoires scientifiques»), и разъяснение ее значения для исследований по истории математики. К. А. Рыбников

**953. О методе Таннери в истории математики. Итар** (Sur la méthode de Tannery en histoire des mathématiques. Itard Jean), Rev. histoire sci., 1954, **7**, № 4, 326—332 (франц.)

К 1900 г. Поль Таннери накопил двадцатилетний опыт в деле восстановления доказательств и рассуждений, утерянных или забытых в ходе развития математики. Его деятельность в этом направлении была многообразной; основывалась она, как правило, на отыскании неизвестных документов, издании их с комментариями и т. д. Однако Таннери всегда считал, что подобное воссоздание не обладает абсолютной достоверностью, и оставлял вопрос открытым для последующих исследований. Эта точка зрения иллюстрируется высказываниями Таннери по вопросу о влиянии средневековой восточной математики на итальянских алгебраистов XVI в., о методе приближенного извлечения квадратных корней в древней Греции, об истории развития теоретико-числовых идей, содержащихся в «Арифметике» Диофанта. К. А. Рыбников

954. **Поль Таннери и греческая наука. Мишель** (Paul Tannery et la science grecque. Michel Paul-Henri), Rev. histoire sci., 1954, **7**, № 4, 333—348 (франц.)

Обзор работ П. Таннери по истории науки в античной Греции, особенно по истории математики и астрономии. На примере наиболее крупных работ: «Об истории науки эллинов», «Греческая геометрия», «Исследования по истории античной астрономии», двухтомного издания собрания сочинений Диофанта и др. показывается, что создание столь значительных историко-научных исследований оказывается возможным только при наличии глубоких знаний в области естественных наук, истории и филологии. К. А. Рыбников

955. **Поль Таннери и средневековая наука. Сердженску** (Paul Tannery et la science médiévale Sergescu P.), Rev. histoire sci., 1954, **7**, № 4, 349—354 (франц.)

Обзор сочинений П. Таннери, сосредоточенных в IV и V томах его собрания сочинений («Mémoires scientifiques») и посвященных истории математики и естественных наук в эпоху средневековья.

К. А. Рыбников

956. **Поль Таннери — историк XVII века. Ленобль** (Paul Tannery, historien du XVII[e] siècle. Lenoble Robert), Rev. histoire sci., 1954, **7**, № 4, 355—368 (франц.)

Многочисленные и важные открытия, сделанные П. Таннери в области истории математики и естественных наук XVII в., обязаны своим возникновением не только личным качествам автора, но и особенностям метода научного исследования. Таннери проявлял исключительное внимание к фактической, документальной основе, его исследования характеризуются неразрывной связью с общей историей человеческого общества и умением обеспечить коллективность в работе. Последнее обстоятельство особенно ясно проявилось при издании собрания сочинений Ферма и Декарта.

К. А. Рыбников

957. **Поль Таннери: краткая библиография. Татон** (Paul Tannery: bibliographie sommaire. Taton René), Rev. histoire sci., 1954, **7**, № 4, 369—372 (франц.)

Библиографическая справка, завершающая цикл статей, посвященных 50-летию со дня смерти французского историка математики и естественных наук П. Таннери. Полный перечень трудов находится в последнем томе собрания сочинений (Mémoires scientifiques», t. XVII). Несмотря на краткость, справка дает представление о разнообразии и широте научных интересов и трудов П. Таннери. Справка состоит из разделов: сочинения, критические издания, переписка, сотрудничество в коллективных трудах, мемуары и оригинальные статьи, неизданные рукописи, основные статьи о П. Таннери. К. А. Рыбников

958 К. **Алексей Николаевич Крылов (1863—1945). Геронимус** (Alexej Nikolajewitsch Krylow (1863 bis 1945). Näherungsrechnungen in der Schwingungs- und Elastizitätstheorie. Geronimus J. L. Berlin, Verlag Technik, 1953, 56 p.) (нем.)

Перевод на немецкий язык главы из книги автора «Очерки о работах корифеев русской механики» (М., Гостехиздат, 1952).

959 К. **Осип Иванович Сомов** (1815—1876). **Геронимус** (Ossip Iwanowitsch Somow (1815 bis 1876). Einige Probleme der höheren Dynamik. Geronimus J. L. Berlin, Verlag Technik, 1954, 55 pp. 3.60 DM) (нем.)

Перевод на немецкий язык главы из книги автора «Очерки о работах корифеев русской механики» (М., Гостехиздат, 1952).

960 К. **Андрей Михайлович Размадзе. Гокиели** (ანდრია რაზმაძე. გოკიელი ლ.), თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, Тоилиси, Изд-во ТГУ, 1954, 26 стр., 1 руо. (груз.)

961 К. **Экс-вундеркинд. Мое детство и юность. Винер** (Ex-prodigy. My childhood and youth. Wiener Norbert. New York, Simon and Schuster, 1953, XII + 309 pp.) (англ.)

---

**См. также:** 1569

## ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

962. **Алгоритмическая неразрешимость проблем распознавания некоторых свойств групп. Адян С. И.**, Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 4, 533—535

Устанавливается отсутствие алгорифма для распознавания ряда свойств групп, в частности: быть единичной группой, быть простой группой, иметь свободную подгруппу, быть группой, разложимой в свободное произведение $n$ подгрупп при фиксированном $n > 1$. Невозможен также алгорифм, распознающий разрешима ли в произвольной данной группе проблема тождества слов или, по выражению автора, «метапроблема тождества» неразрешима.

Устанавливается также алгорифмическая неразрешимость проблемы изоморфизма в следующей усиленной формулировке:

Пусть дана произвольная группа $F_0$. Невозможен алгорифм, распознающий для каждой группы $F$, изоморфна ли она группе $F_0$ или нет.

Для формулировки остальных результатов существенны следующие понятия: свойство группы называется инвариантным, если из того, что некоторая группа обладает этим свойством, следует, что и всякая изоморфная ей группа также обладает этим свойством. Инвариантное свойство называется наследственным, если из того, что некоторая группа обладает этим свойством, следует, что им обладает и всякая ее подгруппа (Небрежность автора: в его формулировке отсутствует слово «инвариантное»). Наследственное свойство называется нетривиальным, если им не обладает некоторая свободная группа с конечным числом образующих.

Устанавливается, что: невозможен алгорифм, распознающий, обладает ли произвольная группа $F$ свойством $\alpha_0\&\beta_0$, где $\alpha_0$ — какое-нибудь нетривиальное наследственное, а $\beta_0$ — какое-нибудь инвариантное свойство такое, что существует группа $F_1$, обладающая свойством $\alpha_0\&\beta_0$.

Невозможен алгорифм, распознающий, обладает ли произвольная группа данным инвариантным свойством $\alpha_0$, выполненным в некоторой группе, но не выполненным ни в какой группе с неразрешимой проблемой тождества.

Намечена редукция доказательств этих утверждений к доказательству одной теоремы; это последнее в реферируемой статье не содержится (референт ознакомился с ним по рукописи кандидатской диссертации автора). Формулировка этой теоремы использует построенную П. С. Новиковым группу с неразрешимой проблемой тождества (РЖМат, 1956, 112). А. С. Есенин-Вольпин

**963. Замечания об «элементарных» арифметических функциях. Сколем** (Remarks on «Elementary» arithmetic functions. Skolem Th.), Kgl. norske videnskab. selskabs forhandl., 1954, **27**, № 6, 6 (англ.)

Следуя Кальмару, классом элементарных арифметических функций (обозначение: $E$) называют подкласс класса примитивно-рекурсивных функций, содержащий функции

$$1,\ x+y,\ xy,\ |x-y|,\ [x/y] \qquad (1)$$

и замкнутый относительно подстановок и схем

$$\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{r=0}^{x} f(r, y_1, \ldots, y_n);$$

$$\psi(x, y_1, \ldots, y_n) = \prod_{r=0}^{x} f(ry_1, \ldots, y_n). \qquad (2)$$

Через $E_d$ обозначается подкласс класса $E$, порожденный функциями $1, x+y, xy, |x-y|$. Автор устанавливает следующие результаты: 1) В определении класса $E$ пару функций $|x-y|$, $[x/y]$ можно заменить одной из функций: $x \dot{-} y$, $\mathrm{res}(x, y)$ или предикатом $x = y$; 2) класс $E$ замкнут относительно ограниченного $\mu$-оператора; 3) класс $E$ замкнут относительно операции, переводящей функцию $\rho(a, t)$ в функцию $t = r(a, b)$ такую, что $t$ является наибольшим числом $\leqslant b$, для которого $\rho(a, t) = 0$ или же $t = 0$; 4) если строго возрастающая функция $\varphi$ пересчитывает множество тех $x$, для которых $\gamma(x) = 0$, и если классу $E$ принадлежат как $\varphi$, так и какая-нибудь функция, мажорирующая $\varphi$, то классу $E$ принадлежит и $\varphi$. 5) $E$ совпадает с наименьшим классом, содержащим 0,1 (константы) и функции $x+y$, $x^y$, $\delta(x, y)$ (т. е. предикат $x = y$) и замкнутым относительно подстановок и первой из схем (2).

На примерах иллюстрируется широта класса $E$, который охватывает самые употребительные арифметические функции. Показывается, что функция $p(n)$ ($n$-е простое число) не входит в $E_d$ и ставится задача отыскания таких классов более узких чем $E$, которые все еще содержали бы все обычные арифметические функции. Б. А. Трахтенброт

**964. Некоторые соображения о рекурсивной арифметике. Сколем** (Some considerations concerning recursive arithmetic. Skolem Th.), Bull. Soc. math. Belgique, 1953, **6**, 35—46 (журнал вышел из печати в 1954 г.) (англ.)

Лекция, прочитанная в Брюссельском свободном университете. В первой части излагаются в обзорном порядке некоторые общеизвестные факты рекурсивной арифметики, включая обычного типа примеры рекурсивно-перечислимых множеств, не являющихся рекурсивными. Во второй части класс $E$ элементарных по Кальмару функций (реф. 963) сопоставляется с классом $H$, содержащим функции: $1,\ x+y,\ x \cdot y,\ x \dot{-} y$, и замкнутым относительно суперпозиции и операции $\Sigma_{r=0}^{x}$. Устанавливаются предложения:

1) Если $f(x, y, z, \ldots) \in H$, то существует полином $P(t)$, для которого: $f(x, y, z, \ldots) < P[\max(x, y, z, \ldots)]$.

2) $H$ есть собственный подкласс класса $E$; $x^y \in E$, $x^y \notin H$.

3) Для некоторых уравнений вида $f = g$, где $f, g \in E$, но $\notin H$, существуют равносильные уравнения вида $f^* = g^*$, где $f^*, g^* \in H$; в частности, это относится к уравнению $z = x^y$.

4) Если предыдущая теорема справедлива для уравнений $y = f(x)$, $z = g(x)$, то она справедлива и для уравнений $u = f(x) + g(x)$ и $v = f(x) \cdot g(x)$: однако автор считает сомнительным, чтобы она оставалась справедливой и для уравнений $w = f(x) \dot{-} g(x)$, $X = f(g(x))$. Б. А. Трахтенброт

**965. Рекурсивно замкнутые классы и мажорирующие функции. Лакомб** (Classes récursivement fermées et fonctions majorantes. Lacombe Daniel), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 7, 716—718 (франц.)

Рекурсивным замыканием класса $\mathscr{E}$ (обозначение: $\overline{\mathscr{E}}$) называется класс всех всюду определенных функций, каждая из которых является результатом применения частично-рекурсивного оператора к функциям из $\mathscr{E}$. Если $\mathscr{E} = \overline{\mathscr{E}}$, то $\mathscr{E}$ рекурсивно замкнуто. Через $\mathscr{E}'$ обозначается рекурсивное замыкание класса всех предикатов вида $(Ey)P(x, y)$, где $P(x, y)$ принадлежит рекурсивно замкнутому классу $\mathscr{E}$. По индукции определяем для всех натуральных $i$: $\mathscr{E}^0 = \mathscr{E}$, $\mathscr{E}^{(i+1)} = (\mathscr{E}^{(i)})'$. Наконец: $\mathscr{E}^* = \bigcup_{i \geqslant 0} \mathscr{E}^{(i)}$.

Основной результат: Пусть $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathfrak{M}$ — три рекурсивно замкнутых класса, удовлетворяющих следующим требованиям: 1) $\mathscr{E} \subset \mathfrak{M}$; 2) $\mathscr{F}$ удовлетворяет одному из условий: а) $\mathscr{F} = \mathscr{E}^{(i)}$ ($i \geqslant 0$), б) $\mathscr{F} = \mathscr{E}^*$, в) $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$; 3) для каждой функции $\varphi(x)$ из $\mathscr{F}$ существует в $\mathfrak{M}$ такая $\psi(y)$, что: $(E\xi)(x)[x > \xi \to \varphi(x) \leqslant \psi(x)]$. В таком случае $\mathscr{F} \subset \mathfrak{M}$. Б. А. Трахтенброт

**966. Две теоремы о функциях истинности. Куайн** (Two theorems about truth functions. Quine W. V.), Bol. Soc. mat. mexicana, 1953, **10**, 64—70 (англ.)

Определения. Фундаментальной формулой (ф. ф.) называется конъюнкция различных препозициональных переменных, взятых с отрицанием или без него (компоненты ф. ф.). Ф. ф. с компонентами $(\neg)^{r_i} A_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, приписывается номер $1 + \Sigma_1^n r_i 2^{n-i}$. Ф. ф. $\varphi$ объемлет ф. ф. $\psi$, если всякая компонента $\psi$ является также компонентной $\varphi$. Нормальной формулой (н. ф.) называют дизъюнкцию таких ф. ф. (ее слагаемые), что никакая из них не является перестановкой другой. Длиной ф. ф. называется число ее компонент, увеличенное на 1, длиной же н. ф.— сумма длин ее слагаемых.

Теорема 1. Если 1) $\varphi$ и $\psi$ н. ф., 2) $\psi$ не содержит отрицания, 3) никакое слагаемое из $\psi$ не объемлет другого слагаемого из $\psi$ и 4) $\varphi \leftrightarrow \psi$, то длина $\psi$ не превосходит длины $\varphi$.

Теорема 2. Н. ф. $\varphi$, слагаемым которой приписаны номера $\leqslant i < 2^n$, эквивалентна н. ф. $\psi$, удовлетворяющей условиям 2) и 3) теоремы 1 ($\psi$ является кратчайшим нормальным эквивалентом $\varphi$). Доказательство зависит от того факта, что дизъюнкция первых $2^{n-h}$ ф. ф. эквивалентна $A_1\& \ldots \& A_h$ и $A \vee (\neg A\&B) \cdot \leftrightarrow \cdot A \vee B$. G. Kreisel

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 4, 277.

**967. Порядок полноты $\aleph_0$-значного исчисления высказываний Лукасевича. Роз** (The degree of completeness of the $\aleph_0$-valued Łukasiewicz propositional cal-

culus. Rose Alan), J. London Math. Soc., 1953, 28, part 2, № 110, 176—184 (англ.)

Изучаются некоторые формализации $\aleph_0$-значного исчисления Лукасевича, построенного на базе двух примитивных — импликации и отрицания. Значениями истинности являются рациональные числа сегмента [01], причем 1 является выделенным значением. Если высказываниям $X$ и $Y$ соответствуют функции истинности $x$ и $y$, то высказываниям $X \to Y$ и $\overline{X}$ соответствуют функции истинности $g(x, y) = \min(1, 1 - x + y)$ и $(fx) = 1 - x$. Система, замкнутая относительно применения правил вывода, называется дедуктивной. Если все следствия из данной системы не охватывают всех осмысленных высказываний, то эта система называется непротиворечивой. Тарским (Monatsh. Math. und Phys. 1930, 37, 361—404) были введены следующие определения:

1. Кардинальным порядком полноты множества высказываний $A$ называется мощность множества всех дедуктивных систем, охватывающих $A$.

2. Ординальным порядком полноты множества высказываний $A$ называется наименьшее порядковое число $\pi$, для которого не существует строго возрастающей последовательности типа $\pi$ непротиворечивых дедуктивных систем, охватывающих множество $A$.

Автор рассматривает формализации $\aleph_0$-значного исчисления высказываний Лукасевича, которые удовлетворяют условиям: 1) формализация обладает слабой полнотой, 2) правило подстановки является правилом вывода, 3) modus ponens является правилом вывода, 4) других основных правил вывода нет.

Опираясь на результаты из цитированной работы Тарского, а также на одну из своих работ (J. London Math. Soc. 1952, 27, 92—102), автор доказывает теорему: Каждая формализация $\aleph_0$-значного исчисления высказываний Лукасевича, которая удовлетворяет условиям 1), 2), 3) и 4), имеет кардинальный порядок полноты $\aleph_0$ и ординальный порядок полноты $\omega$.

Имеются опечатки: 1) на стр. 178, 16 строка снизу, $r$ и $s$ следует поменять местами, 2) на стр. 181, 16 строка снизу, вместо $a_e$ следует написать $\alpha_e$.

С. В. Яблонский

**968. Об одной основной теореме математической логики. Ригер** (O jedné základné větě matematické logiky. Rieger Ladislav), Časop. pěstow. mat., 1955, 80, № 2, 217—231 (чеш.; резюме русс., англ.)

Пусть $A$ — булева алгебра, пусть $\Phi$ — система бесконечных последовательностей $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов $a_k \in A$. $A$ называется Ф-алгеброй, если выполнены следующие условия: а) если $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$, то $\{a_k'\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$ ($a_k'$ означает дополнение); б) если $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$, то $\{a \cup a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$ для каждого $a \in A$; в) $\Phi$ содержит каждую бесконечную последовательность элементов из $A$, члены которой, начиная с некоторого места, становятся постоянными (так называемые тривиальные последовательности); г) если $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$, то в $A$ существует наименьшая верхняя грань $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k$ элементов $a_k$, $k = 1, 2, \ldots$ В Ф-алгебре для каждой последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$ существует и наибольшая нижняя грань $\bigcap_{k=1}^{\infty} a_k$. Понятие Ф-алгебры является упрощением автора ранее введенного понятия «обобщенной $\sigma$-алгебры». (Чехосл. матем. ж., 1951, 1 (76), 29—40; 33—49). Непустое множество $I \subset A$ называется Ф-идеалом, если выполняются условия: а) $I \neq A$; б) если $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$, $a_k \in I$ для $k = 1, 2, \ldots$, то $\bigcap_{k=1}^{\infty} a_k \in I$; в) если $a \in I$, $a \subseteq b$, то $b \in I$. Ф-идеал $I$ называется простым Ф-идеалом, если, кроме того, выполняется г) если $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k \in I$, то существует индекс $k$ такой, что $a_k \in I$.

Простой индукцией доказана главная теорема: Если $A$ есть Ф-алгебра со счетной системой последовательностей Ф, то для каждого Ф-идеала $I \subset A$ существует простой Ф-идеал $P \supset I$.

Со ссылкой на систему Гильберта — Аккермана набросана конструкция известной булевой алгебры, состоящей из классов взаимно эквивалентных выражений узкого исчисления предикатов. Автор называет ее алгеброй Линденбаума. Указывается так же, как в цитированной выше работе, что алгебру Линденбаума можно считать Ф-алгеброй. При этом Ф состоит из тривиальных последовательностей классов и из последовательностей вида $\{[\mathfrak{A}^*(x_k)]\}_{k=1}^{\infty}$, где $[\mathfrak{A}^*(x_k)]$ означает класс выражений, эквивалентных выражению $\mathfrak{A}^*(x_k)$, а $\mathfrak{A}^*(x_k)$ возникает из выражения $\mathfrak{A}^*(x_1)$, содержащего свободную переменную $x_1$, путем подстановки $x_k$ вместо $x_1$ и возможным переименованием связанных переменных, входящих в $\mathfrak{A}(x_1)$.

Указывается, что каждую элементарную непротиворечивую теорию можно считать Ф-идеалом в линденбаумовой Ф-алгебре, а полную элементарную непротиворечивую теорию — простым Ф-идеалом (в согласии с пониманием Тарского). Главная теорема автора является не чем иным как алгебраической формулировкой так называемой теоремы Линденбаума о возможности расширения элементарной непротиворечивой теории в полную непротиворечивую теорию. Приведено без доказательства, что с помощью главной теоремы можно легко доказать и теорему Лумиса о $\sigma$-алгебрах как гомоморфных образах $\sigma$-тел множеств и теорему о свободе $\sigma$-тела борелевских множеств канторова дисконтинуума. В качестве следствия теоремы Линденбаума проведено доказательство теоремы Гёделя о полноте. Полностью аналогично проходит доказательство теоремы Сколема — Лёвенгейма. В заключение упомянуты различные известные методы доказательства теоремы Гёделя о полноте и — как замечает автор — эквивалентной ей теоремы Линденбаума. Желательно выяснить взаимную зависимость этих методов.

В работе имеется также упоминание о возможности использовать для теории вероятностей представление алгебры Линденбаума с помощью борелевских множеств в канторовом дисконтинууме. Jiří Bečvář.

**969. Теория физических высказываний. Граверт** (Eine Theorie der physikalischen Aussagen. Grawert Gerald), Z. Physik, 1953, 136, № 2, 206—220 (нем.)

Под физическим высказыванием (ф. в.) понимается экспериментально проверяемое высказывание о данной физической системе. Если шкалы измерительных приборов рассматривать как координатные оси «пространства наблюдений» (Birkhoff G., Neumann J. v., Ann. Math., 1936, 37, 823), то каждому ф. в. отвечает измеримое по Лебегу точечное множество в этом пространстве, и обратно. Отождествляются множества, отличающиеся множеством меры 0 или множеством, которому ввиду соотношений неопределенности, запрещенных значений и т. п. отвечает тождественно ложное высказывание. Поэтому множество ф. в. обладает не всеми свойствами класса измеримых точечных множеств пространства наблюдений. Автор принимает следующие постулаты для множества ф. в.:

I. Множество ф. в. о данной физической системе образует полную структуру с дополнениями.

II. Над структурой ф. в. существует ровно одна функция $D(\ )$ со свойствами: а) каждому ф. в. $\mathfrak{a}$ отвечает действительное число $D(\mathfrak{a})$, $0 \leqslant D(\mathfrak{a}) \leqslant 1$; б) $D(\mathfrak{o}) = 0$; $D(\mathfrak{r}) = 1$, где $\mathfrak{o}$ — наименьший, $\mathfrak{r}$ — наи-

больший элементы структуры; в) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ влечет $D(\mathfrak{a}) < D(\mathfrak{b})$, где $\subset$ — собственное включение; г) $D(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) = D(\ ) + D(\mathfrak{b}) - D(\ \cap \mathfrak{b})$; д) $D(\lim^* \mathfrak{a}_\nu) = \lim_{\nu \to \infty} D(\ _\nu)$, где $\lim^*$ — звездный предел (Neumann J. v., Proc. Nat. Acad. Sci., 1936, 22, 92).

III. Структура ф. в. есть структура с ортодополнениями.

IV. Каждой паре ф. в. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, где $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$, отвечает такое действительное число $W(\ ; \mathfrak{b})$, что: а) $0 \leqslant W(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) \leqslant 1$; б) $W(\ ; \mathfrak{b}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\ \subset \mathfrak{b}$; в) если $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \subset \overline{\overline{\mathfrak{a}}}$ и $D(\mathfrak{b}_1) = D(\mathfrak{b}_2)$, то $W(\ ; \mathfrak{b}_1) = W(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}_2)$; г) если $\mathfrak{b} \subset \overline{\overline{\mathfrak{c}'}}$, где $\mathfrak{c}'$ — ортодополнение к $\mathfrak{c}$, то $W(\ ; \mathfrak{b} \cup \mathfrak{c}) = W(\ ; \mathfrak{b}) + W(\ ; \mathfrak{c})$; д) если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ несоизмеримы и $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$, то $D(\ ) \cdot W(\ ; \mathfrak{b}) = D(\mathfrak{b}) \cdot W(\mathfrak{b}; \ )$; е) $W(\ ; \mathfrak{b})$ инвариантно относительно автоморфизмов, сохраняющих ортодополнения.

Здесь о теоретико-структурных понятиях см. Биркгоф Г., Теория структур (Изд-во ин. лит., 1952); $\mathfrak{a}$ называется соизмеримым с $\mathfrak{b}$, если $\mathfrak{a} = (\ \cap \mathfrak{b}) \cup (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}')$. Соизмеримость $\mathfrak{a}$ с $\mathfrak{b}$ влечет соизмеримость $\mathfrak{b}$ с $\mathfrak{a}$. Число $D(\ )$ есть априорная вероятность экспериментального подтверждения ф. в. $\mathfrak{a}$. Постулат II требует, чтобы $D(\ )$ была функцией вероятности в смысле Колмогорова. В классической физике и в квантовой теории множество ф. в. не удовлетворяет постулату II. Из работ фон Неймана (там же) следует, что область значений функции $D(\ )$ есть либо А) множество $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right\}$, либо В) множество всех действительных чисел между 0 и 1. В случае $A$) при $n \geqslant 4$ можно построить такое тело $\mathfrak{S}$, чтобы множество ф. в. было изоморфно множеству правых (или левых) подпространств, $(n-1)$-мерного проективного пространства, порожденного $\mathfrak{S}$. Структура ф. в. недистрибутивна; иными словами, в физической теории, удовлетворяющей постулатам I и II, должны существовать соотношения неопределенности, ограничивающие одновременную проверяемость некоторых ф. в. Постулат III гарантирует существование отрицаний. Логика ф. в., заданная постулатами I, II, III, отличается от классического двузначного исчисления высказываний только заменой соотношения $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}' = \mathfrak{o} \leftrightarrow \ \subseteq \mathfrak{b}$ на $\ \subseteq \mathfrak{b} \to \ \cap \mathfrak{b}' = \mathfrak{o}$. Обратное соотношение справедливо только для соизмеримых ф. в. Множество ф. в., соизмеримых с ф. в. $\mathfrak{c}$, образует дистрибутивную подструктуру в множестве всех ф. в. Со всеми ф. в. соизмеримы только $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{r}$. Функция $W(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})$ дает априорную вероятность экспериментальной проверки ф. в. $\mathfrak{b}$ после уже выполненной экспериментальной проверки ф. в. $\mathfrak{a}$. В отношении $W(\ ; \mathfrak{b})$ соизмеримые ф. в. ведут себя так же, как высказывания классической физики. В случае А) существует хотя бы одна пара разложений

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \cup (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}') \cup \left(\cup_{\rho=1}^{r} \mathfrak{a}_\rho\right),$$

$$\mathfrak{b} = (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}) \cup (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}') \cup \left(\cup_{\sigma=1}^{s} \mathfrak{b}_\sigma\right),$$

где $\mathfrak{a}_\rho$ (соответственно $\mathfrak{b}_\sigma$) ортогональны друг к другу и к $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \cup (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}')$ (соответственно к $(\mathfrak{b} \cap \ ) \cup (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}')$), $D(\ _\rho) = D(\mathfrak{b}_\sigma) = 1/n$, $r = n\{D(\ ) - D(\ \cap \mathfrak{b}) - D(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}')\}$, $s = n \cdot \{D(\mathfrak{b}) - D(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) - D(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}')\}$. Ортогональность $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{b}$ означает $\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{b}'$. Если $\mathfrak{S}$ — поле действительных или комплексных чисел или тело действительных кватернионов, то

$$W(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) = \frac{1}{D(\mathfrak{a})} \cdot \left\{ D(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + \frac{1}{n} \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{s} \frac{|(\mathfrak{a}_\rho, \mathfrak{b}_\sigma)|^2}{|(\ _\rho, \ _\rho)(\mathfrak{b}_\sigma, \mathfrak{b}_\sigma)|} \right\}$$

Тем самым решена задача определения $W(\ ; \mathfrak{b})$ для этих $\mathfrak{S}$. С другой стороны, доказывается, что в случае А) при некоторых, впрочем физически неочевидных, требованиях к $W(\ ; \mathfrak{b})$ тело $\mathfrak{S}$ есть поле действительных или комплексных чисел или тело действительных кватернионов. В заключение отмечается, что физическая теория, в которой множество ф. в. удовлетворяет постулатам I—IV, была бы весьма близка к квантовой теории. Г. Н. Поваров

**970 К. Определение чисел через их численное значение и по их происхождению; роль этого понятия в философии математики. Рябушинский** (La définition des nombres par leur valeur numérique et par leur origine; rôle de ce concept en philosophie mathématique. Riabouchinsky Dimitri), Actes du XI-ème Congrès International de Philosophie, Bruxelles, 20—26 Août 1953, 5, 208—214. North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Éditions E. Nauwelaerts, Louvain, 1953 (франц.)

**971 К. Современное состояние исследований по основаниям математики. Мостовский** (The present state of investigations on the foundations of mathematics. Mostowski Andrzej. Warsaw, Panstw. Wydawn. Nauk, 1955, 47 pp., 7 zł.), Przew. bibliogr., 1955, **11**, № 16, 243 (англ.)

**972 К. Математическая логика. Голомб, Крыговская, Лесняк** (Logika matematyczna. Gołab Stanisław, Krygowska Zofia, Lesniak Jan. Kraków, Państw. Wydawn. Nauk, 1955, 196 str., rys., 7.70 zł. Tekst maszynopis powiel), Przew. bibliogr., 1955, **11**, № 18, 272 (польск.)

См. также: 1101

## ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

**973. Элементарный метод решения задач о разбиении чисел на неограниченное число слагаемых. Фрейман Г. А.,** Тр. Моск. матем. о-ва, 1955, 4, 113—124

Пусть $a_r$ — монотонно возрастающая функция, принимающая только положительные значения. $a_1$, $a_2, \ldots, a_i, \ldots$ — значения этой функции. Обозначим через $q(N)$ число решений в целых неотрицательных числах $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$ неравенства

$$a_1 n_1 + a_2 n_2 + \ldots + a_i n_i + \ldots \leqslant N. \qquad (1)$$

Пусть $q_r(N)$ — число решений этого неравенства при условии, что $n_i = 0$ для $a_i > a_r$. Положим

$$p(N) = [q(N) - q(N - a_k)]/a_k \qquad (2)$$

и

$$p_r(N) = [q_r(N) - q_r(N - a_k)]/a_k, \qquad (3)$$

где $a_k$ — одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$

Предполагая функцию $a_r$ имеющей непрерывную вторую производную и удовлетворяющей условиям:

1) $\frac{1}{a_r}\frac{da_r}{dr} < \frac{c_1}{r^{1-\alpha}}$, $\alpha < 1/2$,

2) $\frac{1}{a_r}\left|\frac{d^2a_r}{dr^2}\right| < \frac{c_2}{r^{2-\beta}}$, $\beta < 1$,

3) $a_z/a_r > \varphi(z/r)\log(z/r)$, при $z > r$, где $\varphi(u) \to +\infty$ при $u \to \infty$, автор выводит следующие асимптотические выражения для $p(N)$ и $p_r(N)$:

$$\text{I)}\quad p(N) \sim (2\pi\sigma I)^{-1/2} e^{E+T_1},$$

где $T_1 = N\sigma - \int_1^\infty \log(1-e^{\sigma a_z})dz$, $\sigma$ определяется равенством

$$N = \int_1^\infty \frac{a_z dz}{\exp(\sigma a_z)-1},\quad I = \int_1^\infty \frac{a_z^2 \exp(\sigma a_z)\,dz}{[\exp(\sigma a_z)-1]^2},$$

$$E = \lim_{x\to\infty}\left\{\int_1^x \log a_z dz - \sum_{r=1}^{x-1}\log a_r - \frac{1}{2}\log a_x\right\}$$

$$\text{II)}\quad p_r(N) = [2\pi w(1-e^{-wa_r})Y]^{-1/2} e^{E+T(r,N)}$$

где $T(r,N) = Nw - \int_1^r \log(1-e^{-wa_z})\,dz$,

$w$ определяется равенством

$$N = \int_1^r \frac{a_z dz}{\exp(wa_z)-1},\quad Y = \int_1^r \frac{a_z^2 \exp(wa_z)\,dz}{[\exp(wa_z)-1]^2}.$$

В качестве примера получается формула Харди — Рамануджана для $p(N)$ в случае, когда $a_r = r^s$ ($s > 0$, вещественное). Г. В. Емельянов

**974. Некоторые асимптотические формулы в теории разбиений. Рот, Секереш** (Some asymptotic formulae in the theory of partitions. Roth K. F., Szekeres G.), Quart. J. Math., 1954, **5**, № 20, 241—259 (англ.)

Пусть $u_k$ есть последовательность натуральных чисел, монотонно возрастающая при $k \geqslant k_0$, и $p_u(n)$ обозначает число решений уравнения $n = u_{\nu_1} + u_{\nu_2} + \ldots + u_{\nu_r}$ ($1 \leqslant \nu_1 < \ldots < \nu_r$), где $r$ произвольно. В предположении, что последовательность такова, что $s = \lim \log u_k \log^{-1} k$ при $k \to \infty$ существует и, при $u_k^{-1}/2 < \alpha \leqslant 1/2$, $\inf\{\log^{-1} k \sum_{\nu=1}^k \|u_k\alpha\|^2\} \to \infty$, если $k \to \infty$, выводится асимптотическая формула для $p_u(n)$ ($\|u_k\alpha\|$ обозначает дробную часть $u_k\alpha$). Из нее следует, что $p_u(n+1) - p_u(n) > cn^{-s/(s+1)-\delta} p_u(n)$ при $n > n_0$ и каждом положительном $\delta$. Постоянные $n_0$ и $c$ зависят только от последовательности и $\delta$. Рассматриваются частные случаи: последовательность простых чисел, последовательность значений многочлена с целыми коэффициентами от натурального переменного и от простых чисел. Метод получения асимптотической формулы основан на применении производящей функции $F(w) = \prod_{k=1}^\infty (1 + w^{u_k}) = \sum_{n=0}^\infty p_u(n) w^n$ и выражении ее коэффициентов по формуле Коши. К. А. Родосский

**975. О количестве делителей натурального числа, имеющих форму $p-1$. Прахар** (Über die Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl, welche die Form $p-1$ haben. Prachar K.), Monatsh. Math., 1955, **59**, № 2, 91—97 (нем.)

Пусть $d(n)$ — число положительных делителей, $\delta(n)$ — число делителей вида $p-1$ натурального $n$. $p$ — любое нечетное число (простое). Известно, что $\sum_{n\leqslant x} d(n) = x\log x + (2C-1)x + O(\sqrt{x})$ и $d(n) > 2^{(1-\varepsilon)\log n/\log\log n}$ для бесконечного множества $n$ ($\varepsilon > 0$ — фиксировано). Показывается, что

1) $\sum_{n\leqslant x}\delta(n) = x\log\log x + Bx + O(x/\log x)$ ($B$ — постоянная);

2) $\delta(n) > \exp(c\log n(\log\log n)^{-2})$ для бесконечного множества $n$ и $c > 0$;

3) $\delta(n) > 2^{(1/2-\varepsilon)\log n/\log\log n}$ для бесконечного множества $n$ (в предположении справедливости гипотезы Римана для $L$-рядов Дирихле);

4) $\sum_{n\leqslant x}\delta^2(n) = O(x\log^2 x)$.

Доказательства этих утверждений элементарны. Используются теоремы Родосского, Эрдеша и Татуцавы. Е. П. Ожигова

**976. О гипотезе Линделёфа. Туран** (On Lindelöf's conjecture. Turan P.), Acta math. Acad. sci. hung., 1954, **5**, № 3—4, 145—163 (англ.; резюме русс.)

Исследуется вопрос о верхней оценке числа нулей $N(\sigma, T)$, $\sigma > 1/2$, $t \leqslant T$, дзета-функции $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, в предположении ослабленной гипотезы Линделёфа.

Доказывается теорема, являющаяся некоторым усилением известной теоремы Ингама (Ingham A. E., Quart. J. Math., Oxford Ser., 1937, **8**, 255—266): Пусть при $\sigma \geqslant \vartheta$, $1/2 < \vartheta < 1$, $t \geqslant 1$ выполняется неравенство

$$|\zeta(\sigma+it)| \leqslant c_1(\eta) t^{\eta^{1000}}$$

при достаточно малых $\eta$. Тогда для $\vartheta + 4\eta \leqslant \sigma_1 \leqslant 1$, $T > c_2(\eta)$, имеет место неравенство

$$N(\sigma_1, T) < c_3(\eta) T^{2(1+3\eta)(1-\sigma_1)} \log^5 T.$$

Доказательство основано на безусловной оценке $N(\sigma, T)$, полученной в книге автора (Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen, Akad. Kiado, Budapest, 1953). В. М. Архангельская

**977. О коэффициентах степенного ряда для $\zeta(s)$. Бриггс, Човла** (The power series coefficients of $\zeta(s)$. Briggs W. E., Chowla S.), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 5, 323—325 (англ.)

Известно, что функция $\zeta(s)$ Римана — функция мероморфная, имеющая единственный полюс в точке $s = 1$ с вычетом, равным единице; поэтому $\zeta(s) = 1/s - 1 + \sum_{n=0}^\infty A_n(s-1)^n$. Изучаются коэффициенты $A_n$ этого разложения и доказывается следующий результат:

$$A_n = (-1)^n \gamma_n/n!,$$

где $\gamma_n$ определяется из формулы

$$\gamma_n = \lim_{N\to\infty}\left[\sum_{t=1}^N \frac{\log^n t}{t} - \frac{\log^{n+1} N}{n+1}\right];$$

$\gamma_0$ — постоянная Эйлера. К. Г. Бороздкин

**978. О гильбертовых модулярных функциях и рядах Дирихле с эйлеровским произведением. Герман** (Über Hilbertsche Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. Herrmann Oskar), Math. Ann., 1954, **127**, № 4, 357—400 (нем.)

Обобщается теория $T$-операторов Гекке для обычных модулярных форм на гильбертовы модулярные формы, связанные с абсолютно вещественным полем алгебраических чисел $k$. Впервые подобным вопросом занимался Брёйн. Для случая, когда число классов идеалов в поле $k$ равно единице, Брёйн получил полное обобщение теории Гекке. В общем случае, несмотря на то, что операторы, введенные им, обладают мультипликативными свойствами, для соответствующих рядов Дирихле не удавалось получить разложения в произведение, аналогичное эйлеровскому произведению для дзета-функции. В реферируемой работе эти трудности преодолены. Основная идея заключается в рассмотрении вместо одной модулярной группы $h$

групп ($h$ — число классов поля $k$), соответствующих классам идеалов. И. И. Пятецкий-Шапиро

**979. О суммах Эпштейновских дзета-функций регулярно распределенных «нижних» параметров. Эмерслебен** (Über Summen Epsteinscher Zetafunktionen regelmäßig verteilter «unterer» Parameter. Emerslebeu Otto), Math. Nachr., 1955, **13**, № 1—2, 59—72 (нем.)

Рассматривается обобщенная дзета-функция Эпштейна.

$$ {}^{(p)}\mathrm{Z}\left|\begin{matrix}0\dots 0\\ h_1\dots h_p\end{matrix}\right|(s)= $$

$$ =\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\dots\sum_{k_p=-\infty}^{\infty}{}'\left(\sum_{j=1}^{p}k_j^2\right)^{-s/2}\exp\left(2\pi i\sum_{j=1}^{p}k_jh_j\right) $$

Дается вывод особых функциональных уравнений для эпштейновской дзета-функции. Эти уравнения, в отличие от уравнения Римана, являются не функциональными уравнениями по переменному $s$, а функциональными уравнениями по параметрам $h_i$. Так, например, автор доказывает равенство

$$ \mathrm{Z}\left|\begin{matrix}0&0\\ x&y\end{matrix}\right|(s)+\mathrm{Z}\left|\begin{matrix}0&0\\ 1/2-x&1/2-y\end{matrix}\right|(s)= $$

$$ =2^{1-s/2}\mathrm{Z}\left|\begin{matrix}0&0\\ x+y&x-y\end{matrix}\right|(s). $$

Все уравнения получены путем простых и формальных перегруппировок бесконечных рядов. Полученные в работе формулы могут быть использованы для вычисления частных значений и некоторых конечных сумм из частных значений эпштейновских дзета-функций. Вычисление частных значений Эпштейновских дзета-функций при конкретных значениях $s$ имеет, как указывает автор, связь с физикой кристаллической решетки и с теорией вязкой жидкости. В чем состоит эта связь, в работе не указывается, но делается ссылка на соответствующую литературу.

Н. П. Романов

**980. Изучение некоторых мероморфных функций, ограниченных на единичной окружности. Приложение к одному замкнутому множеству целых алгебраических чисел. Дюфренуа, Пизо** (Étude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité. Application à un ensemble fermé d'entiers algébriques. Dufresnoy J., Pisot Ch.), Ann. scient. École norm. supér., 1955, **72**, № 1, 69—92 (франц.)

Рассматриваются мероморфные в $|z|\leqslant 1$ функции $f(z)$, удовлетворяющие условиям: 1) $f(z)$ вещественна при вещественном $z$, 2) в круге $|z|\leqslant 1$ $f(z)$ имеет только один (простой) полюс $z=\alpha$, $0<\alpha<1$, 3) $|f(z)|\leqslant 1$ при $|z|=1$, 4) $f(0)\geqslant 1$. Получены две (бесконечные) серии неравенств, которым удовлетворяют коэффициенты разложения в ряд Тейлора функции $f(z)$ в окрестности нуля. Неравенства второй серии содержат $\alpha$.

Полученные результаты применяются к изучению множества тех целых (вещественных) алгебраических чисел $\theta>1$, для которых все сопряженные лежат внутри единичной окружности. Перечисляются все $\theta<\theta_0+\varepsilon$, где $\theta_0=(1+\sqrt{5})/2$, $\varepsilon$ — достаточно малое положительное число (РЖМат, 1953, 53; 1955, 613).

З. И. Боревич

**981. О предельных точках одного замечательного класса целых алгебраических чисел. Дюбрер** (Sur les points limites d'un ensemble remarquable d'entiers algébriques imaginaires. Doubrère Monique), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 22, 2111—2113 (франц.)

Пусть $S_1$ — множество целых алгебраических чисел $\theta$, у которых все сопряженные по модулю меньше 1. $S_2''$ — множество всех целых алгебраических комплексных чисел $\theta$, для которых все сопряженные, за исключением $\bar{\theta}$ ($\bar{\theta}$ — комплексно сопряженное к $\theta$), по модулю меньше 1. Кели (Kelly J. B., Amer. J. Math., 1950, **72**, 565—572) доказал, что предельная точка $S_2''$ принадлежит к $S_2''$ или к $S_1$ в зависимости от того, является ли она комплексной или действительной.

В реферируемой статье установлены необходимые и достаточные условия для того, чтобы данное число $\theta$ (из $S_1$ или $S_2''$) было предельной точкой для $S_2''$. Обозначим через $Q(z)$ полином с целыми коэффициентами, неприводимый в поле рациональных чисел, равный нулю при $z=1/\theta$ и единице при $z=0$. Для того чтобы $\theta$ было предельной точкой для $S_2''$, необходимо и достаточно существование полинома $A(z)$ с целыми коэффициентами, удовлетворяющего на окружности $|z|=1$ неравенству $|A(z)|\leqslant|Q(z)|$, если $\theta$ принадлежит $S_2''$, $|A(z)|\leqslant|Q(z)|^2$, если $\theta$ принадлежит $S_1$.

И. И. Пятецкий-Шапиро

**982. О теореме Пятецкого-Шапиро. Салем, Зигмунд** (Sur un théorème de Piatetçki—Shapiro. Salem Raphaël, Zygmund Antoni), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 21, 2040—2042 (франц.)

Числом Пизо называется алгебраическое число, все сопряженные к которому по модулю меньше единицы. Пусть $\theta$ — вещественное число, большее двух. Рассмотрим множество $F$ точек отрезка $[0,1]$ вида $\varepsilon_1\theta^{-1}+\varepsilon_2\theta^{-2}+\dots$; $\varepsilon_k=0$ или $1$, $k=1,2,\dots$ Известно, что $F$ — совершенное, нигде не плотное множество. Салем (Salem R., Trans. Amer. Math. Soc., 1943, **54**, 218—228) доказал, что если $\theta$ не является числом Пизо, то $F$ есть $M$-множество. Референтом (Успехи матем. наук, 1953, 8, 3 (55), 167—170; РЖМат, 1955, 671) было доказано, $F$ что есть $U$-множество в случае, если $\theta>2^n$, где $n$ — степень числа $\theta$. Авторы освобождаются от этого ограничения и таким образом решают вопрос о том, когда множество $F$ является $U$ или $M$ до конца. Доказательство очень просто и красиво.

И. И. Пятецкий-Шапиро

**983. О трансцендентных p-адических числах. II. К аппроксимации трансцендентных p-адических чисел рациональными. Гюнтер** (Über transzendente p-adische Zahlen. II. Zur Approximation transzendenter p-adischer Zahlen durch rationale. Günther Alfred), J. reine und angew. Math., 1954, **193**, № 1/2, 1—10 (нем.)

Продолжение статьи автора (РЖМат, 1955, 2542). Пусть $\mathfrak{p}$ есть простой идеал алгебраического числового поля $K$ степени $g\geqslant 1$ над полем рациональных чисел, $p$ — простое число, $p\equiv 0\pmod{\mathfrak{p}^e}$, причем $e$ — наибольшее из возможных. Автор рассматривает p-адическое расширение поля $K$ и, пользуясь методом А. О. Гельфонда (Матем. сб., 1940, 7(49), 7—25), доказывает две теоремы об аппроксимации трансцендентных p-адических чисел рациональными, являющиеся p-адическим аналогом результатов Риччи (Ricci G., Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1945, сер. 2, **4**, 342—375) о приближении действительных трансцендентных чисел рациональными.

Теорема. Пусть $\alpha$ — алгебраическое p-адическое число, $0<|\alpha-1|_{\mathfrak{p}}<p^{-1/(p-1)}$, $\beta$ — p-адическое число, $0<|\beta-1|_{\mathfrak{p}}<p^{-1/(p-1)}$ и $\eta=\log\alpha/\log\beta$ — иррациональное алгебраическое целое p-адическое число. Тогда неравенство $|\beta-q_1/q_2|_{\mathfrak{p}}<p^{-e^{-1}\log^{2+\varepsilon}q}$ при каж-

дом $\varepsilon > 0$ выполняется самое большее для конечного числа пар взаимно простых целых рациональных чисел $q_1$ и $q_2$, у которых $\max(|q_1|, |q_2|) = q$.

Следствие. Если $\eta$ — иррациональное алгебраическое целое p-адическое число и $\beta$ — p-адическое число, $0 < |\beta - 1|_p < p^{-1/(p-1)}$, такое, что неравенство $\beta - q_1/q_2|_p < p^{-e^{-1}\log^{2+\varepsilon} q}$ выполняется для бесконечного множества пар взаимно простых целых рациональных чисел $q_1$ и $q_2$ таких, что $\max(|q_1|, |q_2|) = q$, то $\beta^\eta$ — трансцендентно.

Вторая теорема формулируется дословно, как и первая, но с переменой местами $\alpha$ и $\beta$ и заменой $\eta$ на $1/\eta$.

Следствие. Пусть $\beta$ — алгебраическое p-адическое число $0 < |\beta - 1|_p < p^{-1/(p-1)}$, $\eta$ — иррациональное алгебраическое целое p-адическое число. Тогда неравенство $|\beta^\eta - q_1/q_2|_p < p^{-e^{-1}\log^{2+\varepsilon} q}$ при каждом $\varepsilon > 0$ выполняется самое большее для конечного числа пар взаимно простых целых рациональных чисел $q_1$ и $q_2$, у которых $\max(|q_1|, |q_2|) = q$.

А. Б. Шидловский

**984. Об одном классе трансцендентных формальных степенных рядов. Бугон, Натан, Самюэль** (Une classe de séries formelles transcendantes. Bougnon Pierro, Nathan Jacqueline, Samuel Pierre), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, **41**, № 2, 93—96 (франц.)

Пусть $k$ — поле любой характеристики, $T$ — некоторый трансцендентный элемент над $k$. Указываются достаточные условия для трансцендентности над полем $k(T)$ формального ряда

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k.$$

По своему характеру эти условия аналогичны известным условиям Лиувилля для трансцендентности чисел. В частности, доказано, что условие: $\overline{\lim_{i\to\infty}} d_{i+1}/d_i > n$ достаточно для того, чтобы формальный ряд

$$s = \sum a_{d_i} T^{d_i},\ a_{d_i} \neq 0,\ a_{d_i} \in k$$

не был алгебраическим над полем $k(T)$ степени $n$.

И. И. Пятецкий-Шапиро

**985. Критерий иррациональности для некоторых классов чисел. Дананда, Оппенгейм** (Criteria for irrationality of certain classes of numbers. II. Diananda P. H., Oppenheim A.), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 4, 222—225 (англ.)

Устанавливается критерии иррациональности чисел вида $x = a_0 + a_1/b_1 + a_2/b_1b_2 + a_3/b_1b_2b_3 + \ldots$, где $b_i \geqslant 2$, $0 \leqslant a_i \leqslant b_i - 1$, $a_i$, $b_i$ — целые числа в случае, когда пределы всех сходящихся подпоследовательностей, выбранных из последовательности чисел $c_i = a_i/b_i$ будут рациональными числами, отличными от 0 и 1. Случаи, когда среди пределов имеются иррациональное число, 0 или 1, были рассмотрены в работе Оппенгейма (РЖМат, 1954, 2091).

Н. И. Фельдман

**986. Два замечания о псевдорациональных множествах. Фолькман** (Zwei Bemerkungen über pseudorationale Mengen. Volkmann Bodo), J. reine und angew. Math., 1954, **193**, № 1/2, 126—128 (нем.)

В статье автора (J. reine und angew Math.,,1952, **190**, 199—230) рассматриваются бесконечные множества натуральных чисел. Множество $\mathfrak{R}$ называется рациональным, если рациональная двоичная дробь

$$\Gamma(\mathfrak{R}) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} e_i,$$

где $e_i$ — характеристическая функция множества $\mathfrak{R}$. Множество $\mathfrak{D}$ называется псевдорациональным, если для каждого $\varepsilon > 0$ существуют такие рациональные множества $\mathfrak{R}_\varepsilon$ и $\mathfrak{R}^\varepsilon$, $\mathfrak{R}_\varepsilon \leqslant \mathfrak{D} \leqslant \mathfrak{R}^\varepsilon$, что $d(\mathfrak{R}^\varepsilon - \mathfrak{R}_\varepsilon) < \varepsilon$, где $d(A)$ — плотность множества $A$ на всем натуральном ряде. В этом случае двоичная дробь, соответствующая множеству $\mathfrak{D}$, называется псевдорациональным числом.

В реферируемой статье множество $D$ всех псевдорациональных чисел обобщается. Пусть $A$ — произвольное счетное множество действительных чисел на $(0, 1]$, заданных $g$-адическими разложениями. Исходя из $A$, строится множество $A^*$ аналогично тому, как в случае $g = 2$, исходя из множества рациональных чисел на $(0,1]$, строилось $D$. Доказывается, что дробная хаусдорфова размерность $\dim A^* = 0$. Далее рассматривается другая конструкция, связанная с поведением знаков $g$-адических разложений (РЖМат, 1955, 602), приводящая к построению из множества $A$ множества $A^*$. В конце приводится пример, когда сумма двух псевдорациональных множеств не является псевдорациональным множеством. Доказательства существенно используют серию статей автора (РЖМат, 1954, 2547; 1955, 41; 1955, 602). Там же дано определение дробной хаусдорфовой размерности.

А. Б. Шидловский

**987. Об аппроксимации действительных чисел с помощью подходящих дробей их правильных непрерывных дробей. Мюллер** (Über die Approximation reeller Zahlen durch die Näherungsbrüche ihres regelmäßigen Kettenbruches. Müller Max), Arch. Math., 1955, **6**, № 4, 253—258 (нем.)

Пусть $z = z_0 = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ является разложением действительного числа $z$ в правильную непрерывную дробь, $z_\nu$ — ее полные частные, $A_\nu/B_\nu$ — подходящие дроби. Если $n \geqslant 1$ и непрерывная дробь содержит хотя бы $n+2$ члена, то известно неравенство

$$|z - A_n/B_n| < 1/a_{n+1}B_n^2.$$

Доказывается несколько теорем, усиливающих приведенный результат; во всех неравенстах видна роль неполного частного $a_{n+1}$.

Теорема 1. Если непрерывная дробь числа $z$ является по крайней мере $(n+2)$-членной, то хотя бы для одного из двух чисел $\nu = n$ и $\nu = n+1$ имеет место неравенство

$$|z - A_\nu/B_\nu| < a_{n+1}/(a_{n+1}^2 + 1)B_\nu^2. \qquad (1)$$

Теорема 2. Если $n \geqslant 1$ и непрерывная дробь числа $z$ является хотя бы $(n+3)$-членной, то по крайней мере для одного из двух чисел $\nu = n-1$ и $\nu = n$ имеет место неравенство (1).

Теорема 3. Если $n \geqslant 1$ и непрерывная дробь числа $z$ является хотя бы $(n+3)$-членной, то неравенство (1) имеет место для $\nu = n$ или (если это не имеет места) одновременно для двух чисел $\nu = n-1$ и $\nu = n+1$.

Теорема 4. Если $n \geqslant 1$ и непрерывная дробь числа $z$ является хотя бы $(n+2)$-членной, то по крайней мере для одного из двух чисел $\nu = n-1$ и $\nu = n+1$ имеет место неравенство

$$|z - A_\nu/B_\nu| < 1/\sqrt{a_{n+1}^2 + 4}B_\nu^2.$$

Пусть далее $\mathfrak{J}_a$ ($a$ — натуральное) обозначает множество всех иррациональных чисел $z$, для которых неравенство $a_k \geqslant a$ имеет место для бесконечного множества значений $k$. Тогда из теоремы 4 следует

Теорема 5. Для любого числа $z$ из $\mathfrak{Z}_a$ существует бесконечное множество рациональных чисел $A/B$, удовлетворяющих неравенству

$$|z - A/B| < 1/\sqrt{a^2+4}B^2.$$

Теорема 6. Для любого $\varepsilon > 0$ имеются числа $z$ из $\mathfrak{Z}_a$, для которых существует только конечное множество рациональных чисел $A/B$, удовлетворяющих неравенству

$$|z - A/B| < 1/(\sqrt{a^2+4}+\varepsilon)B^2.$$

Например, $z = [a, a, \ldots] = [a + \sqrt{a^2+4}]/2$ является одним из таких чисел. Теоремы 1, 3 и 4 содержат как частный случай известные теоремы Валена, Фудзивара и Бореля. П. Г. Когония

**988. К теории регулярных цепных дробей. Джерасимович** (Beitrag zur Theorie der regelmäßigen Kettenbrüche. Djerasimović Bozidar), Math. Z., 1955, **62**, № 3, 320—329 (нем.)

Автор вводит для регулярных цепных дробей новую систему обозначений. С целью иллюстрировать достоинства этой системы приводятся доказательства ряда как известных, так и новых весьма частного характера теорем о периодических цепных дробях и соответствующих квадратических иррациональностях.

А. Я. Хинчин

**989. Об элементах диагональных непрерывных дробей. Пиппинг** (Über die Elemente der Diagonalkettenbrüche. Pipping Nils), Acta Acad. aboensis. Math. et phys., 1954, **19**, № 6, 1—8 (нем.)

Даны необходимые и достаточные условия, чтобы полуправильная непрерывная дробь была диагональной. Пусть дана полуправильная непрерывная дробь (п.п.н.д.) $[b_0, b_1, b_2', b_3', b_4, \ldots]$ (штрихом отмечены неполные частные, соответствующие числители которых равны $-1$). Рассмотрим следующие преобразования элементов п. п. н. д.:

1) $b_\nu$ заменяется через $b_\nu$ при паре $b_\nu$, $b_{\nu+1}$,

2) $b_\nu'$ » » $b_\nu - 1$ » » $b_\nu'$, $b_{\nu+1}$,

3) вставляется $b_\nu - 1, 1$ вместо $b_\nu$ при паре $b_\nu$, $b_{\nu+1}'$,

4) » $b_\nu - 2, 1$ » $b_\nu'$ » » $b_\nu'$, $b_{\nu+1}'$.

Эти преобразования переводят всякую п. п. н. д. в правильную непрерывную дробь (п. н. д.), причем возможны 3 случая: а) неполное частное 1 правильной непрерывной дроби уже встречается в п. п. н. д., б) неполное частное 1 п. н. д. получается из неполных частных п. п. н. д. при их уменьшении на 1 или 2 (см. 2), 3), 4)), в) неполное частное 1 п. н. д. вставляется (см. 3), 4)).

Основной результат. Необходимые и достаточные условия того, чтобы п. п. н. д. была диагональной, состоят в следующем: а) $b_0 \geqslant 1$ при паре $b_0$, $b_1'$, b) $b_\nu \geqslant 2$ при паре $b_\nu'$, $b_{\nu+1}$ ($\nu \geqslant 1$), c) $b_\nu \geqslant 3$ при паре $b_\nu'$, $b_{\nu+1}'$ ($\nu \geqslant 1$), d) при переходе п. п. н. д. → → п. н. д. с помощью преобразований 1), 2), 3) и 4) получается п. н. д., неполные частные которой, равные 1, регулярны, если они типа а) или б), и сингулярны, если они типа в).

Этот результат является развитием известных результатов Перрона и отвечает на вопрос, поставленный последним (Perron O., Die Lehre von den Kettenbrüchen, 2. Auflage, Teubner, Leipzig und Berlin, 1929, стр. 188). Доказательство не приводится.

П. Г. Когония

**990. О несимметричной аппроксимации. Ле-Век** (On asymmetric approximations. LeVeque W. J.), Michigan Math. J., 1953—1954, **2**, № 1, 1—6 (англ.)

Сегре (Segre B., Duke Math. J., 1945, **12**, 337—365) при помощи своих геометрических исследований доказал, что для каждого иррационального числа $\xi$ имеется бесконечное множество рациональных приближений $u/v$ таких, что

$$-\tau/\alpha v^2 < \xi - u/v < 1/\alpha v^2 \qquad (1)$$

при любом постоянном $\tau \geqslant 0$, где $\alpha = (1+4\tau)^{1/2}$. Негоеску (Negoescu N., Bull. Ecole Polytech. Jassy, 1948, **3**, 3—16), пользуясь непрерывными дробями, показал, что неравенство (1) имеет бесконечное множество решений для $\tau \geqslant 0$ и $\alpha = \max((1+4\tau)^{1/2}, (\tau^2+4\tau)^{1/2})$. Это утверждение эквивалентно теореме Сегре.

В реферируемой статье дается новое доказательство теоремы Сегре в форме Негоеску при помощи рядов Фарея. В процессе доказательства устанавливается, что если иррациональное число $\xi$ лежит между двумя соседними элементами $p/q$ и $r/s$ некоторого ряда Фарея, то по крайней мере одно из чисел $p/q$, $r/s$ и $(p+r)/(q+s)$ является решением неравенства (1) при $\tau \geqslant 0$ и $\alpha = \min((1+4\tau)^{1/2}, (\tau^2+4\tau)^{1/2})$.

Негоеску (Negooscu N., Bul. ştiinţ., Acad. R. P. Române. Sec. mat. şi fiz., 1949, **1**, 115—117) пытался доказать, что из трех последовательных подходящих дробей иррационального числа $\xi$ хотя бы одна удовлетворяет неравенству (1) при $\tau \geqslant 0$ и $\alpha = (1+4\tau)^{1/2}$. Автор показывает, что это неверно, и доказывает, что аналогичное утверждение справедливо для четырех последовательных подходящих.

Примечание референта. На стр. 1, 12 строка снизу, напечатано, «пяти подходящих» вместо «четырех подходящих». А. Б. Шидловский

**991. О методе приближения Ньютона. Микусиньский** (Sur la méthode d'approximation de Newton. Mikusiński J.), Ann. polon. math., 1954, **1**, № 1, 184—194 (франц.)

Для определенного целого числа $c$ обозначим через $y(n)$ $n$-ю подходящую дробь разложения $\sqrt{c}$ в непрерывную дробь ($y(0) = E(\sqrt{c})$). Пусть $x_0 \neq 0$ и пусть

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + \frac{c}{x_n}\right], \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

Так как (1) образует последовательность приближений Ньютона для численного определения корней уравнения $x^2 - c = 0$, то для соответственно выбранного значения $x_0$ имеем $x_n \to \sqrt{c}$. Более того, среди чисел $x_n$ могут содержаться числа $y(m)$.

Теорема 1. Для каждого натурального числа $c$ существует такое натуральное число $N_c$, что если $x_0 = y(N_c - 1)$, то $x_n = y(2^n N_c - 1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Даны также способы эффективного определения $N_c$ (например, можно принять за $N_c$ длину периода непрерывной дроби, выражающей $\sqrt{c}$). Наиболее интересны числа $c$, для которых $N_c = 1$, также $x_0 = y(0) = E(\sqrt{c})$.

Теорема 2. Пусть $x_0 = y(0)$. Для того чтобы имела место формула $x_n = y(0)$ (т. е. формула (1) при $N_c = 1$), необходимо и достаточно, чтобы

$$c = a^2 + 2a/b, \qquad (3)$$

где $a$ и $b$ — натуральные числа. Условию (3) удовлетворяют натуральные числа 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, . . . , не удовлетворяют же 7, 9, . . .

Для знания свойств наилучшего приближения подходящими дробями непрерывных дробей, с одной стороны, также по легкости получения выражений последовательности $x_n$, с другой стороны, результаты этой работы могут найти практические применения.

K. Tatarkiewicz

**992. Детерминанты решеток асимметричных выпуклых областей. II. Сойер** (The lattice determinants of asymmetrical convex regions. II. Sawyer D. B.), Proc. London Math. Soc., 1955, **5**, № 18, 197—218 (англ.)

Пусть $K$ — ограниченная замкнутая выпуклая область в евклидовой плоскости, начало координат $O$ — внутренняя точка $K$. $A(K)$, $\Delta(K)$ — площадь и детерминант решетки для $K$. Аналогично ранее опубликованной работе (РЖМат, 1955, 1625) вводится коэффициент асимметрии $\lambda$ для $K$. Цель статьи — найти наилучшую верхнюю границу для $A(K)/\Delta(K)$ в случае $\lambda > 1$.

Доказывается теорема: Имеем

$$A(K)/\Delta(K) \leqslant \gamma(\lambda), \qquad (1)$$

где

$$\gamma(\lambda) = \begin{cases} \gamma_1(\lambda) = 3\lambda^2 - 2\lambda + 3 - 2(\lambda-1)(2\lambda^2+2)^{1/2} & (1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0), \\ \gamma_2(\lambda) = 9/2 - 3(\lambda-2)^2/2 & (\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant 2), \\ \gamma_3(\lambda) = (\lambda+1)^2/2(\lambda-1) & (2 \leqslant \lambda \leqslant 3), \\ \gamma_4(\lambda) = 2\lambda - (2\lambda^2 - 4\lambda - 2)^{1/2} & (3 \leqslant \lambda). \end{cases}$$

Здесь $\lambda_0 = (8+\sqrt{15})/7 = 1{,}696\ldots$ Для каждого значения $\lambda$ существует $K$, для которого неравенство (1) обращается в равенство. При доказательстве отдельно рассмотрены случаи $1 \leqslant \lambda \leqslant 2$ и $\lambda \geqslant 2$. Найдены области, для которых в неравенстве (1) выполняется знак равенства.

Э. Е. Симакова

**993. Детерминанты решеток асимметричных выпуклых областей. III. Сойер** (The lattice determinants of asymmetrical convex regions. III. Sawyer D. B.), Quart. J. Math., 1955, **6**, № 21, 27—33 (англ.)

Пусть $K$ — выпуклая область в $n$-мерном евклидовом пространстве ($n \geqslant 2$) и начало координат $O$ — внутренняя точка для $K$. Аналогично работе (РЖМат, 1955, 1625) определены величины $\lambda$, $V(K)$, $\Delta(K)$. Находится верхняя граница для $V(K)/\Delta(K)$, когда $K$ пробегает класс выпуклых областей, симметричных в точке и с коэффициентом асимметрии $\lambda$.

Доказана теорема: Если $K$ симметрична в точке и имеет коэффициент асимметрии $\lambda$, то существует подобласть $L$ для $K \cup -K$ выпуклая и симметричная в точке $O$ такая, что

$$V(L)/V(K) \geqslant q(\lambda) = \begin{cases} 2\lambda(\lambda+1)^{-1} & (1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0), \\ 2^n(\lambda+1)^{-n}\{1+n(\lambda-1)\} & (\lambda \geqslant \lambda_0) \end{cases}$$

где $\lambda_0$ — единственный корень уравнения $\lambda(\lambda+1)^{n-1} = 2^{n-1}(1+n(\lambda-1))$ между $n/(n-1)$ и 2. Для каждого $\lambda$ существует $K$ и соответствующее $L$, для которых неравенство (1) обращается в равенство. Из теоремы вытекает, что

$$V(K)/\Delta(K) \leqslant \begin{cases} 2^{n-1}(\lambda+1)/\lambda & (1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0), \\ (\lambda+1)^n/\{1+n(\lambda-1)\} & (\lambda \geqslant \lambda_0). \end{cases}$$

Кроме того, если $1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$, то существует область $K$, для которой

$$V(K)/\Delta(K) = 2^{n-1}\lambda^{-1}(\lambda+1).$$

Если $\lambda \geqslant \lambda_0$, то найдется $K$, что

$$V(K)/\Delta(K) \geqslant (\lambda+1)^n/n(\lambda-1/2).$$

Отсюда, как следствие, для случая $n=2$ вытекает, что

$$V(K)/\Delta(K) \leqslant \begin{cases} 2(\lambda+1)/\lambda & (1 \leqslant \lambda \leqslant 2), \\ (\lambda+1)^2/(2\lambda-1) & (\lambda \geqslant 2), \end{cases}$$

причем для каждого $\lambda$ существует область $K$, для которой выполняется знак равенства. Э. Е. Симакова

**994. Об одной проблеме в геометрии чисел. Малер** (On a problem in the geometry of numbers. Mahler Kurt), Rend. mat. e applic., 1954, **14**, № 1—2, 38—41 (англ.)

Пусть $K$ — ограниченное выпуклое тело в $n$-мерном пространстве, симметричное относительно начала. Пусть $s > 0$; рассмотрим выпуклое тело $K_s = K \cap \{|x_n| \leqslant s\}$, т. е. часть тела $K$, лежащую в слое $|x_n| \leqslant s$. Пусть $\Delta(K_s)$ — критический определитель тела $K_s$, т. е. наименьший определитель решеток, содержащих начало и не имеющих внутри $K_s$ других своих точек. Автор выдвигает гипотезу о том, что $\Delta(K_s)/s$ ($s > 0$) есть невозрастающая функция $s$. Эта гипотеза сделана по аналогии с известной теоремой Брунна—Минковского о выпуклом теле, утверждающей, что $V(K_s)/s$, где $V(K_s)$ — объем тела $K_s$, есть невозрастающая функция. В реферируемой статье доказана справедливость гипотезы автора для $n=2$.

А. В. Малышев

**995. О теореме Фуртвенглера. Давенпорт** (On a theorem of Furtwängler. Davenport H.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 2, 186—195 (англ.)

Пусть $F(x_1, \ldots, x_{n-1})$ — вещественная неотрицательная непрерывная функция, равная нулю только при $x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0$ и удовлетворяющая условию $F(tx_1, \ldots, tx_{n-1}) = |t| F(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Через $C(F)$ обозначается точная нижняя граница чисел $C > 0$, обладающих тем свойством, что для любых вещественных чисел $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ существует бесконечно много рациональных приближений $q_1/q, \ldots, q_{n-1}/q$ ($q > 0$) таких, что

$$F(\theta_1 q - q_1, \ldots, \theta_{n-1} q - q_{n-1}) < (C/q)^{1/(n-1)}.$$

Пусть в $n$-мерном вещественном пространстве $K$ обозначает тело, состоящее из точек $(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условию $[F(x_1, \ldots, x_{n-1})]^{n-1}|x_n| \leqslant 1$. Через $\Delta(K)$ обозначается точная нижняя граница определителей (взятых по абсолютной величине) всех тех решеток в $n$-мерном пространстве, которые не имеют точек внутри $K$, кроме точки $(0, \ldots, 0)$. Доказывается, что $C(F) = [\Delta(K)]^{-1}$.

Для случая, когда $F(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \max(|x_1|, \ldots, |x_{n-1}|)$, устанавливается, что $\Delta(K) \leqslant \sqrt{|d|}$, где $|d|$ — наименьший по абсолютной величине дискриминант среди дискриминантов вещественных полей алгебраических чисел $n$-ой степени. Отсюда вытекает теорема Фуртвенглера: Если $0 < C < 1/\sqrt{|d|}$, то существуют вещественные $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$, допускающие только конечное число одновременных рациональных приближений $q_1/q, \ldots, q_{n-1}/q$, удовлетворяющих условию $|\theta_i q - q_i| < (C/q)^{1/(n-1)}$ (Furtwängler P., Math. Ann. 1926, **96**, № 2, 169—175).

Пусть $C'(F)$ обозначает точную нижнюю границу чисел $C>0$, обладающих свойством, что при любых вещественных числах $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ неравенство

$$|\theta_1 p_1 + \cdots + \theta_{n-1}p_{n-1} + p| < C\,[F(p_1, \ldots, p_{n-1})]^{1-n}$$

имеет бесконечно много решений в целых $p_1, \ldots, p_{n-1}$, $p$ ($p_1, \ldots, p_{n-1}$ не все нули). Доказывается, что $C'(F) = [\Delta(K)]^{-1}$, так что $C'(F) = C(F)$. З. И. Боревич

**996. Четные квадратичные формы с определителем, равным единице. Блёй** (Even quadratic forms with determinant unity. Blij F. van der), Quart. J. Math., 1954, **5**, № 20, 297—300 (англ.)

Квадратичная форма $a_{11}x^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots$ называется четной, если числа $a_{11}/2$, $a_{12}$, ... являются целыми. Пусть $q = \exp \pi i\tau$, $|q|<1$. $\vartheta_{00} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}$, $\vartheta_{01} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}$, $\vartheta_{10} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1/2)^2}$. Положим $A_k = (\vartheta_{00}^{8k} + \vartheta_{01}^{8k} + \vartheta_{10}^{8k})/2$ и $B_k = \sum_{m_i} q^{Q(m_1, \ldots, m_{8k})}$, где $Q(m_1, \ldots, m_{8k})$ — положительно-определенная четная квадратичная форма с определителем, равным единице.

Дается элементарное доказательство (без применения теории модулярных форм) следующих теорем: 1) $A_1^2 = A_2$. 2) Существует форма $Q_k^*$ такая, что соответствующая ей функция $B_k^*$ равна функции $A_k$. 3) Функция $A_k$ может быть представлена в виде линейной комбинации линейно независимых функций $A_1^{k-3\alpha}A_3^{\alpha}$, число которых равно $\left[\frac{k}{3}\right]+1$.

В заключение обращается внимание на некоторые частные случаи. Например, известно, что существует лишь один класс рассматриваемых форм (типа $Q$) с 8 переменными (Mordell L. J., J. Math., 1938, **17**, 41—46), следовательно, $A_1 = B_1$. Формы с 16 переменными распределяются по двум классам. Однако (Witt E., Abhandl. Math. Seminar Hamburg, 1941, **14**, 327—337) для любой формы $Q_2$ справедливо тождество $A_2 = B_2$. И. Г. Мельников

**997. Проблема Оппенгейма в теории квадратичных форм. Барнс** (A problem of Oppenheim on quadratic forms. Barnes E. S.), Proc. London Math. Soc., 1955, **5**, № 18, 167—184 (англ.)

Пусть $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ — неопределенная квадратичная форма с вещественными коэффициентами и дискриминантом $D = b^2 - 4ac > 0$ и пусть $M(f) = \max\{a^2 + b^2/4,\ c^2 + b^2/4\}$; $M$ — нижняя граница $M(f)$, взятая по всем формам, эквивалентным $f(x, y)$. Тогда

$$M < (238757 - 5747\sqrt{957})\,D/149784 = 0{,}4070\ldots D,$$

за исключением случаев:

1) когда $f$ эквивалентна кратному формы $x^2 - 3y^2$, при этом

$$M = 5D/12 = 0{,}4166\ldots D;$$

2) когда $f$ эквивалентна кратному формы $3x^2 + 27xy - 19y^2$, при этом

$$M = 1565D/3828 = 0{,}4088\ldots D;$$

3) когда $f$ эквивалентна кратному формы $6x^2 + 60xy - (\sqrt{957} + 11)\,y^2$, при этом

$$M = (238\,757 - 5747\sqrt{957})\,D/149\,784 = 0{,}4070\ldots D.$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ имеется континуальное множество форм, ни одна из которых не эквивалентна кратному другой, для которых

$$M > \left(\frac{238\,757 - 5747\sqrt{957}}{149\,784} - \varepsilon\right)D.$$

Довольно длинное, но элементарное доказательство использует теорию приведения неопределенных бинарных квадратичных форм. А. В. Малышев

**998. Два замечания о предельных формах. Кнезер** (Two remarks on extreme forms. Kneser Martin), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 2, 145—149 (англ.)

В первом замечании приводится новое доказательство теоремы Вороного о предельных квадратичных формах (Вороной Г. Ф., Собр. соч., т. II, Изд-во АН УССР, Киев, 1952, 197). Все предельные квадратичные формы от $n$ переменных для $n \leqslant 5$ хорошо известны. Хофрейтер и Кокстер нашли четыре предельных формы от шести переменных (Hofreiter N., Monatsh. Math. Phys., 1933, **40**, 129—152; Coxeter H. S. M., Canad. J. Math., 1951, **3**, 391—441).

Во втором замечании указывается новая предельная форма от шести переменных

$$x'Ax = \sum_{i=1}^{3}(x_i^2 - x_ix_{i+3} + x_{i+3}^2) + \left(\sum_{i=1}^{6} x_i\right)^2. \quad (1)$$

Форма (1), взятая над всеми $x$ с целочисленными координатами $x_1, \ldots, x_6$, не равными одновременно нулю, достигает минимума $\mu(A) = 2$ при 21 паре векторов $x$ (минимальных векторов). Обозначая их через $\pm m_i$ ($i = 1, \ldots, 21$), имеем: 6 пар $\pm m_i$ ($i = 1, \ldots, 6$) единичных векторов, у которых все координаты — нули, кроме $i$-й координаты, равной $\pm 1$, затем 12 пар $\pm m_i$ ($i = 7, \ldots, 18$) с координатами $x_k = 1$, $x_l = -1$ ($k \not\equiv l \pmod 3$) и $x_j = 0$, если $j \neq k, l$, и, наконец, три пары $\pm m_i$ ($i = 19, 20, 21$) с координатами, которые получим из $x_1 = x_4 = 1$, $x_2 = x_5 = -1$, $x_3 = x_6 = 0$, переставляя значения 1, —1, 0. Непосредственным вычислением проверяется, что форма (1) единственным образом определяется заданием минимума $\mu(A) = 2$ и указанных выше координат минимальных векторов. Отсюда и из тождества

$$39y'Ay = 6\sum_{i=1}^{6}(m_i'Ay)^2 + 5\sum_{i=7}^{18}(m_i'Ay)^2 + 7\sum_{i=19}^{21}(m_i'Ay)^2, \quad (2)$$

которое линейным преобразованием $y = A^{-1}x$ приводится к форме типа

$$\sum_m \rho_m (m'x)^2 = \sigma x'A^{-1}x \quad (\rho_m > 0,\ \sigma > 0),$$

следует, на основании теоремы Вороного, что форма (1) предельная. То обстоятельство, что представление (2) формы $y'Ay$ единственное, дает возможность установить, что группа автоморфизмов предельной формы (1) является прямым произведением группы $G$ из 48 подстановок определителя $\pm 1$, переводящих каждую пару $(x_i, x_{i+3})$ в пару такого же рода, и циклической группы $\pm E$ порядка 2. Н. П. Соколов

**999. Заметка о предельных формах. Барнс** (Note on extreme forms. Barnes E. S.), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 2, 150—154 (англ.)

Указывается предельная форма от шести переменных

$$f(x_1, \ldots, x_6) = \left(\sum_{i=1}^{6} x_i\right)^2 + \sum_{j=1}^{3}\Phi(x_j, x_{3+j}), \quad (1)$$

где вообще $\Phi(x, y) = x^2 - xy + y^2$. Форма (1) найдена автором независимо от М. Кнезера (реф. 998) и рассматривается им как частный случай более общей

формы от $n$ переменных

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 + \sum_{j=0}^{r} \Phi(x_j, x_{r+j}) + \sum_{k=2r+1}^{n} x_k^2, \quad (2)$$

где $n \geqslant 2r - 6$, и последняя сумма отсутствует, если $n = 2r$.

Доказывается, что форма (2) тогда и только тогда будет предельной, когда

$$4r - 2 \geqslant n \geqslant 2r \geqslant 6. \quad (3)$$

Устанавливается прежде всего, что форма (2) при целочисленных значениях переменных $x_1, \ldots, x_n$, не равных одновременно нулю, имеет минимум $M = 2$. Связывая затем с каждой парой $\pm(x_1^{(t)}, \ldots, x_n^{(t)})$ минимальных векторов линейную форму $\lambda_t = \lambda_t(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(t)} y_i$, заключаем, что существует $s = n(n+1)/2 + r(r-3)/2$ таких линейных форм, именно:

$$y_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$
$$y_i - y_k \quad (1 \leqslant j < k \leqslant n;\ k \neq r+j;\ j = 1, \ldots, n-1), \quad (4)$$
$$y_l - y_m + y_{r+l} - y_{r+m} \quad (1 \leqslant l < m \leqslant r).$$

Отсюда следует, что форма (2) тогда и только тогда единственным образом определяется заданием минимума $M = 2$ и указанных выше линейных форм, когда $r \geqslant 3$. Представляя присоединенную форму $F(y_1, \ldots, y_n)$ для (2) как линейную комбинацию квадратов линейных форм (4) в виде

$$F(y_1, \ldots, y_n) = \sum \rho_i y_i^2 + \sum \sigma_{jk}(y_j - y_k)^2 + \sum \tau_{lm}(y_l - y_m + y_{r+l} - y_{r+m})^2,$$

где индексы $i, j, k, l, m$ имеют значения, данные в (4), можно показать, что все коэффициенты $\rho_i$, $\sigma_{jk}$, $\tau_{lm}$ тогда и только тогда могут быть выбраны положительными, когда $n \leqslant 4r - 2$ и $r \geqslant 3$. Полученные результаты доказывают, на основании теоремы Вороного, что условие (3) является необходимым и достаточным для того, чтобы форма (2) была предельной.

Н. П. Соколов

**1000. О рациональных решениях уравнения Диофанта** $G(x) \equiv ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = z^2$ (1). **Бюке** (Étude des solutions rationnelles de l'équation diophantienne $G(x) \equiv ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = z^2$ (1). Buquet A.), Mathesis, 1954, **63**, № 6—8, 240—250 (франц.)

Со времен Эйлера известен способ последовательного определения рациональных решений уравнения (1) путем применения вспомогательной параболы уравнения $z = px^2 + qx + r$, проходящей через уже известные точки с рациональными координатами. При этом использовались свойства эллиптических функций. В статье подробно излагаются элементарные свойства вспомогательных парабол, позволяющие находить решения уравнения (1) независимо от эллиптических функций. Приводятся примеры решений частных случаев уравнения (1).

В. А. Голубев

**1001. Неопределенное уравнение** $X^3 + Y^3 = ZA^3$. **Сельмер** (Den ubestemte ligning $X^3 + Y^3 = ZA^3$. Selmer Ernst S.), Nord. mat. tidskr., 1955, **3**, № 1—2, 48—56 (норв.)

Описываются результаты, полученные автором в его диссертации (Acta math., 1951, **85**, 203—362). Дается краткое описание методов, которые применялись при исследовании уравнения. Новых результатов статья не содержит.

В. Д. Подсыпанин

**1002. Вклады в теорию одной категории диофантовых уравнений второго порядка с двумя неизвестными. Нагелль** (Contributions to the theory of a category of Diophantine equations of the second degree with two unknowns. Nagell Trygve), Nova acta Regiae soc. scient. upsaliensis, 1954, **16**, № 2, 38 pp. (англ.)

Решением уравнения

$$u^2 - Dv^2 = C \quad (1$$

называется число $u + v\sqrt{D}$. Если $x^2 - Dy^2 = 1$, то число $(u + v\sqrt{D})(x + y\sqrt{D})$ также будет решением уравнения (1), которое называется эквивалентным решению $u + v\sqrt{D}$. Все эквивалентные решения образуют класс решений. В случае, если свободный член уравнения делится на 4, т. е. для уравнения

$$u^2 - Dv^2 = 4C, \quad (2)$$

Стольт предложил понимать под решением число $(u + v\sqrt{D})/2$, а новое (эквивалентное) решение имеет вид $(u + v\sqrt{D})(x + y\sqrt{D})/4$, где $x^2 - Dy^2 = 4$.

Для уравнения (1) исследуется случай: $C$ — бесквадратное число, являющееся делителем $2D$. Доказывается, что в этом случае уравнение (1) имеет один класс решений. Далее доказывается, что в этом случае, если $C \neq 1$ или $-D$, то все решения могут быть получены по формуле

$$(u_n + v_n\sqrt{D})/|\sqrt{C}| = [(u_1 + v_1\sqrt{D})/|\sqrt{C}|]^n,$$

где $u_1 + v_1\sqrt{D}$ — наименьшее положительное решение. Если $D$ — бесквадратное число, то среди значений $C$, удовлетворяющих указанным условиям, найдутся два значения таких, что уравнение (1) оказывается разрешимым. Произведение этих значений $C$ равно $-4D$, если $D$ — нечетное, а $C$ — четное, и равно $-D$ в противном случае. Если же $D$ делится на полный квадрат, то существует не более одного значения $C$, при котором уравнение (1) разрешимо. Аналогичные результаты доказаны и для решений уравнения (2) в нечетных числах с использованием второго определения эквивалентности решений.

Далее доказываются теоремы Стормера и Малера о наименьшем решении уравнения (1) и теоремы, аналогичные этим теоремам для уравнения (2).

Одна из этих теорем: Пусть $D > 0$ и $D \equiv 5 \pmod 8$. $C$ — бесквадратный делитель $D$, $u$ и $v$ — нечетные числа. Если все простые делители $v$ делят $D$, то решение $(u + v\sqrt{D})/2$ является наименьшим. Исключение представляет решение $(11 + 5\sqrt{5})/2 = [(1 + \sqrt{5})/2]^5$. Эти исследования уравнений (1) и (2) находят применения к другим вопросам теории чисел.

Доказывается конечность числа решений в целых числах некоторых уравнений, содержащих неизвестные в показателях степени. Доказывается также отсутствие целых решений у некоторых уравнений вида $Ax^2 + E = y^n$, в частности, у уравнения $x^2 + 4 = y^n$ при всех $x$, $y$ и $n$, кроме $n = 2$, $x = 0$, $y = \pm 2$; $n = 3$, $x = \pm 2$, $y = 2$; $n = 3$, $x = \pm 11$, $y = 5$.

Пусть $f(x)$ — многочлен, $P(x)$ — наибольший простой делитель $f(x)$. Известно, что если $f(x) = Ax^2 \pm 1$ или $Ax^2 \pm 2$, то $\liminf_{x \to \infty} P(x)(\log\log x)^{-1} \geqslant 1$. Этот результат распространен на случай $f(x) = Ax^2 \pm 4$. Библ. 25 назв.

В. Д. Подсыпанин

**1003. Некоторые соотношения для числа классов. Карлиц** (Some class number relations. Carlitz

Leonard), Math. Z., 1955, **62**, № 2, 167—170 (англ.)

Известны соотношения для числа классов бинарных квадратичных форм отрицательного детерминанта, принадлежащие Кронекеру (Kronecker L., Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1875, 223—236) и Гурвицу (Hurwitz A., J. reine und angew. Math., 1886, **99**, 165—168). Автор для числа классов устанавливает целый ряд соотношений иного типа. Эти соотношения получаются из вышеупомянутых формул Кронекера и Гурвица.

Г. А. Ломадзе

**1004. Некоторые формулы разбиений. Карлиц** (Some partition formulas. Carlitz L.), Tohoku Math. J., 1954, **6**, № 2, 3, 149—154 (англ.)

Устанавливается ряд тождеств между бесконечными произведениями и бесконечными рядами, связанными с различными аддитивными функциями.

Г. А. Ломадзе

**1005. О разбиении целых чисел на простые слагаемые по способу наименьшего остатка. Риччи** (Sulla partizione degli interi in addendi primi col procedimento del residuo minimo. Ricci Giovanni), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 1, 1—10 (итал.)

Пусть $p'$ — наибольшее простое число с условием $p' \leqslant n$; положим $n = p' + n'$; пусть $p''$ — наибольшее простое с условием $p'' \leqslant n'$; полагаем $n = p' + p'' + n''$ и т. д. Таким способом можно разбить любое целое $n$ на простые слагаемые, включая и 1. Элементарно доказываются две теоремы:

1. Пусть $\theta'$ — нижняя граница чисел $\theta$ таких, что $p_{n+1} - p_n < p_n^{\theta}$ для $n$ достаточно большого. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, когда $k \geqslant k_0(\varepsilon)$ (достаточно большого), имеем

$$(\theta' + \varepsilon)^{-1} \ln \mu_{k-1} < \ln \mu_k < \mu_{k-1}/(1 - \varepsilon),$$

где $\mu_k$ — наименьшее целое, разлагающееся по меньшей мере на сумму $k$ простых слагаемых указанным выше способом.

2. Обозначим, при фиксированном $\delta$, где $0 < \delta \leqslant 1$, через $P_2(\xi;\ \delta)$ число целых чисел $n$ формы $n = p' + p''$ $(p' < n < \overline{p'}), (1 - \delta)\,\xi < n \leqslant \xi$, где $\overline{p'}$ — следующее за $p'$ простое число. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, при $\xi$ достаточно большом, имеем

$$(1 - \varepsilon)\frac{H}{2C_\delta}\frac{\delta\xi}{\ln \ln \xi} < P_2(\xi;\ \delta) < (1 + \varepsilon)\frac{\delta\xi}{\ln \ln \xi},$$

где $H$ — константа Шаха и Вильсона, $C_\delta$ — коэффициент Бруна.

В. А. Голубев

**1006. О числе нулей рекуррентной третьего порядка последовательности целых чисел. Уорд** (On the number of vanishing terms in an integral cubic recurrence. Ward Morgan), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 3, 155—160 (англ.)

Рассматривается последовательность целых чисел $(T)$:

$$T_0,\ T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_n,\ \ldots,$$

определяемая рекуррентными соотношениями вида

$$T_{n+3} = PT_{n+2} - QT_{n+1} + RT_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $P$, $Q$, $R$ — фиксированные целые числа, $R \neq 0$. Элементы последовательности $(T)$ составляют коэффициенты разложения (при $|z|$ достаточно большом)

$$g(z)/f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} T_{n-1} z^{-n},$$

где $f(z) = z^3 - Pz^2 + Qz - R$, $g(z) = T_0 z^2 + (T_1 - PT_0)z + (T_2 - PT_1 + QT_0)$. Натуральное число $k$ называется нулем последовательности $(T)$, если $T_k = 0$.

Доказывается, что если многочлен $f(z)$ невырожден (т. е. если у него нет двух корней, которые представляют корни из 1) и все 3 его корня целые, попарно взаимно простые между собой рациональные числа, то последовательность $(T)$ имеет самое большее три нуля. Автор отмечает связь этой задачи с проблемой Ферма и указывает на некоторые нерешенные вопросы из этой области, в частности, на гипотезу о том, что единственной последовательностью указанного выше типа, имеющей более чем два нуля, может быть только рекуррентная последовательность $(H)$, для которой $g(z) = 1$.

Б. М. Уразбаев

**1007. Длина наименьшего периода вычетов чисел $n^n$. Хампель** (The length of the shortest period of rests of numbers $n^n$. Hampel R.), Ann. polon. math., 1955, **1**, № 2, 360—366 (англ.)

В. Серпинский (Sierpinski W., Ann. polon. math., 1950, **23**, 256) доказал, что для каждого натурального $m$ вычеты по mod $m$ чисел $n^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ образуют бесконечную периодическую последовательность.

Автор вычисляет величину $S_m$ наименьшего периода такой последовательности. Пусть $m = \prod_{l=1}^{k} p_l^{\alpha_l}$, $\alpha_l \geqslant 1$; $\varphi(m)$ — функция Эйлера и $\{a_i\}$ — наименьшее общее кратное чисел $a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Тогда $S_m = \{p_i \varphi(p_i^{\alpha_i})\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Доказательство основывается на рассмотрении частного случая $m = p^{\alpha}$. Общий случай сводится к этому обычным приведением сравнения по составному модулю к сравнениям по попарно простым модулям.

Примечание референта. Следует указать точнее, чем это делает автор, какая часть рассуждений в случае $m = p^{\alpha}$ верна для любого $p$ и когда необходимо считать $p \neq 2$.

Б. М. Бредихин

**1008. О целых $n$, взаимно простых с $f(n)$. Ламбек, Мозер** (On integers $n$ relatively prime to $f(n)$. Lambek Joachim, Moser Leo), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 2, 155—158 (англ.)

Пусть $f(x) = \{f(1),\ f(2),\ \ldots\}$ — любая последовательность целых неотрицательных чисел, $Q_f(x)$ обозначает количество натуральных $n \leqslant x$, для которых $(n,\ f(n)) = 1$. Если $\lim_{x \to \infty} Q_f(x)/x$ существует, обозначим его $P_f$ и назовем «вероятностью того, что $n$ и $f(n)$ взаимно просты». $f^*(n)$ обозначает количество $m$ таких, что $f(m) = n$.

Доказывается теорема 1: Если $f(x)$ не убывает и $f^*(x)$ не убывает и конечна, то

$$Q_f(x) = 6\pi^{-2}x + O(f(x)\log f(x)) + \cap(f^*(f(x))\log f(x)) + O(xf(x)^{-1}).$$

Например, если $f(x) = [x^{1/2}]$, то $f^*(x) = 2x + 1$ и $Q_f(x) = 6\pi^{-2}x + O(x^{1/2}\log x)$.

Следствием является теорема 2: Если 1) $f(x)$ не убывает, 2) $f^*(x)$ не убывает и конечна, 3) $f(x)\log f(x) = o(x)$ и 4) $f^*(f(x))\log f(x) = o(x)$, то $P_f = 6\pi^{-2}$.

Ни одно из условий теоремы 2 не является лишним, как показывают примеры, приведенные автором.

Е. П. Ожигова

**1009. Заметка о четных совершенных числах. Лаборде** (A note on the even perfect numbers. Laborde Pedro), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 5, 348—349 (англ.)

Рассматривается мультипликативная функция $H(n)$, определенная следующим образом: $H(n) = n\tau(n)/\sigma(n)$, где $n$ — натуральное число, $\tau(n)$ — число делителей, $\sigma(n)$ — сумма делителей $n$. Используются формулы для $\tau(n)$ и $\sigma(n)$. Если $p$ — простое, то функция $H(p^{\alpha}) = p^{\alpha}(\alpha + 1)/(1 + p + \cdots + p^{\alpha})$ $(\alpha \geqslant 1)$.

Известно, что четные совершенные числа, определяемые требованием $\sigma(n) = 2n$, представимы в форме $n = 2^{q-1}(2^q - 1)$, где $p = 2^q - 1$ — простое. Показывается, что $H(n) > 2$ только для составных нечетных чисел. Пользуясь этим результатом, автор доказывает следующее утверждение: Если $n$ — целое четное вида $n = 2^{H(n)-1}(2^{H(n)} - 1)$, то оно совершенное.

Е. П. Ожигова

**1010. Теорема о сравнениях. Бини** (Un teorema sulle congruenze. Bini Umberto), Period. mat., 1955, **33**, № 1, 57—58 (итал.)

Дано элементарное доказательство сравнения, $a^{h\varphi(m)+1} \equiv a \pmod m$. При $m = 10$, $\varphi(10) = 4$ получаем $a^{4h+1} \equiv a \pmod{10}$. Этим доказано обобщение теоремы Витали: Каждое целое число и его $(4h+1)$-я степень оканчиваются в десятичной системе счисления на одну и ту же цифру. В. А. Голубев

**1011. Число примитивных пифагоровых треугольников с площадью, меньшей $n$. Уайлд** (On the number of primitive Pythagorean triangles with area less than $n$. Wild Roy E.), Pacif. J. Math., 1955, **5**, № 1, 85—91 (англ.)

Если из множества пифагоровых треугольников, стороны которых — взаимно простые числа, выделить все треугольники с площадью, меньшей $n$, и обозначить их число через $P_a(n)$, то

$$P_a(n) = cn^{1/2} - c'n^{1/3} + O(n^{1/4}\ln n),$$

где

$$c = \frac{\Gamma^2(1/4)}{2^{1/2}\pi^{5/2}},\quad c' = -\frac{\zeta(1/3)(1+2^{-1/3})}{\zeta(4/3)(1+4^{-1/3})} \approx 0{,}297,$$

$$O(n^{1/4}\ln n) = [(^{27}/_4)^{1/8} n^{1/4}\ln n].$$

Эта формула улучшает результат $P_a(n) = cn^{1/2} + O(n^{1/3})$, полученный Ламбеком и Мозером. Б. А. Кордемский

**1012. Обобщение теоремы Эйлера-Ферма. Данкан** (A generalization of the Euler-Fermat theorem. Duncan D. G.), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, №.4, 241 (англ.)

Известно, что, если $(a, m) = 1$, то

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m. \qquad (1)$$

Показывается, что сравнение (1) может иногда иметь место и для модуля $k$, превосходящего $m$.

Теорема. Если 1) $n$ — натуральное число; 2) $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ — совокупность всех простых таких, что $(p_i - 1)/n$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$; 3) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ — натуральные числа или нули такие, что $\varphi(p_i^{\alpha_i})/n$, $\varphi(p_i^{\alpha_i+1}) \nmid n$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$; 4) $a$ — натуральное число, взаимно простое с произведением $p_1p_2\cdots p_r$: $(a, p_1p_2\cdots p_r) = 1$, — то $a^n \equiv 1 \pmod{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}}$. К. Г. Бороздкин

**1013. Факторизация круговых полиномов по модулю простого числа. Бальё** (Factorisation des polynomes cyclotomiques modulo un nombre premier. Ballieu Robert), Ann. Sci. Soc. scient. Bruxelles, 1954, сер. 1, **68**, № 3, 140—144 (франц.)

Рассматриваются два случая разложения $x^m - 1$ на неприводимые множители по модулю простого числа $p$: 1) $p^t - 1 \mid m$; 2) $p \mid m$. П. Н. Реморов

**1014. Гигантские простые числа Мерсена. Андерсон** (Mersenneska primtalsjättar. Andersson Josef), Elementa, 1955, **38**, № 2, 83—87 (швед.)

Описывается история исследований больших чисел Мерсена за последние двадцать лет. Отмечается большая роль электронных вычислительных машин для установления простоты или непростоты чисел Мерсена. Новых результатов статья не содержит.

В. Д. Подсыпанин

**1015. Некоторые простые числа вида $h2^e - 1$. Ризель** (Nagra primtal av formen $h2^e - 1$. Riesel Hans), Elementa, 1955, **38**, № 2, 91—92 (швед.)

Для чисел вида $N = h2^e - 1$ в случае, когда $h$ не делится на 3 и $2^e > h/6$, имеет место критерий простоты, аналогичный критерию простоты чисел Мерсена. Используя этот критерий, автор исследовал на простоту все числа $N = h2^e - 1$, где $h \not\equiv 0 \pmod 3$ при $h \leqslant 55$, $e \leqslant 150$ и $h \leqslant 11$, $e \leqslant 250$. Для исследования применялась счетная машина BESK. Приводится таблица всех найденных простых чисел.

В. Д. Подсыпанин

**1016. Некоторые элементарные свойства сравнений по модулю $M$. Даймонд** (Some elementary properties of the relation, congruence, modulo $M$. Diamond Louis E.), Math. Mag., 1955, **28**, № 4, 213—220 (англ.)

Популярная заметка о сравнениях.

**1017. Сравнения. Диммик** (Congruence. Dimmick E. L.), Math. Mag., 1954, **28**, № 1, 41—43 (англ.)

**1018. Двенадцатиричная система счисления. Бирд** (The twelve base. Beard Ralph H.), Math. Teacher, 1955, **48**, № 5, 332—333 (англ.)

**1019. О разложении натуральных чисел на суммы различных треугольных чисел. Шинцель А.,** Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1954, **2**, № 9, 411—412

**О разложении натуральных чисел на суммы различных треугольных чисел. Шинцель** (Sur la décomposition des nombres naturels en sommes de nombres triangulaires distincts. Schinzel A.), Bull. Acad. polon. sci. Cl. III, 1954, **2**, № 9, 409—410 (франц.)

Известна теорема Г. Е. Рихера (Richert H. E., Nord. mat. tidsskr., 1949, **31**, 122), что всякое натуральное число, большее 33, является суммой различных треугольных чисел. В реферируемой работе с помощью двух известных теорем Полла (Pall G., Amer. Math. Monthly, 1933, **40**, 13) довольно просто доказывается теорема: Всякое натуральное число, большее 51, является суммой четырех различных неотрицательных треугольных чисел, уточняющая указанную теорему Г. Е. Рихера. Далее, перечисляются натуральные числа $\leqslant 51$, для которых теорема неверна.

А. П. Лурсманашвили

**1020. Таблица целых решений $a^2 + b^2 + c^2 = r^2$. Микса** (A table of integral solutions of $a^2+b^2+c^2=r^2$. Miksa Francis L.), Math. Teacher, 1955, **48**, № 4, 251—255 (англ.)

Дана таблица всех целых решений уравнения $a^2 + b^2 + c^2 = r^2$ для нечетных $r$ от $r = 3$ до $r = 207$. Указано 14 ошибок таблицы Бекона (Bacon R. H., School Sci. Math., 1947, **47**, 159—162). В. А. Голубев

**1021. Арифметические курьезы. Тебо** (Curiosités arithmétiques. Thébault Victor), Mathesis, 1953, **62**, 120—129 (франц.)

**1022. К теореме о единственном способе представления одного целого числа через другое. Комаров И. М.,** Сб. науч. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1955, № 5, 30—31

**1023. О признаках делимости. Колмогоров Н. А.,** Уч. зап. Кировского гос. пед. ин-та, 1955, **2**, № 8, 91—96

**1024. Исправления к статье «Приложения арифметики кватернионов к теории тернарных квадратичных форм и к разложению чисел на кубы» (УМН, VIII,**

5(57) (1953), 3—71). Малышев А. В., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 1, 243—244

Исправления к статье А. В. Малышева и референта (РЖМат, 1954, 3608). В замечании 13 (стр. 25—26) неверную оценку (1,89) следует заменить (в тех же обозначениях) на $<\varkappa_\varepsilon d^\varepsilon$ [о. н. д. $(d/\delta^2, \delta)]^{1/2}$; на стр. 32 (1,128) — на $\varkappa'_{\varepsilon'} m^{\varepsilon'} (c, m)^{1/2}$; на стр. 30 (1,117) — на $<\varkappa_\varepsilon m^{\nu/2-\tau/2+\varepsilon} r^{s_1} (c, m)^{1/2}$; на стр. 33 (1,131) — на $<\varkappa_\varepsilon m^{1/2-\nu_\gamma+\varepsilon} r^{-s_1} (c, m)^{-1/2}$. Все остальные оценки справедливы, все теоремы сохраняются. Ю. В. Линник

**1025 К. Введение в теорию чисел. Харди, Райт** (An introduction to the theory of numbers. Hardy Godfrey Harold, Wright Edward Maitland, 3-rd. ed., Oxford, Oxford U. P., 1955, XVI, 419 pp., 42 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 266, 9 (англ.)

**1026 К. Теоретическая арифметика. Серпинский** (Arytmetyka teoretyczna. Sierpiński Wacław. Warszawa, Państw. Wydawn. Nauk, 1955, 258 str., zł. 30), Przew. bibliogr., 1955, **11**, № 13, 202 (польск.)

**1027 Д. Неопределенные тернарные квадратичные формы, которые представляют нуль только тривиальным образом. Вильдман** (Indefinite ternäre quadratische Formen, die Null nur in trivialer Weise darstellen. Wildmann Helmut. Phil. Diss., Wien, 1954, 30 Bl. (Maschinschr.)), Oesterr. Bibliogr., 1955, № 8, 12 (нем.)

**1028 Д. К вопросу о границе натуральных чисел «внетабличного» промежутка, представимых в виде суммы простых слагаемых. Архангельская В. М.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Саратовск. ун-т, Саратов, 1955

---

**См. также:** 1046, 1114, 1115, 1425, 1660

## АЛГЕБРА

**1029. Некоторые элементарные понятия современной алгебры. Куджани** (Alcuni concetti elementari di algebra moderna. Cugiani Marco), Period. mat., 1955, **33**, № 1, 1—33 (итал.)

**1030 К. Элементы алгебраического анализа. Комбинаторика. Определители. Системы линейных уравнений. Краткие сведения о группах. Квадратичные формы. Алгебраические уравнения. Чиммино** (Elementi di analisi algebrica. Calcolo combinatorio. Determinanti. Sistemi di equazioni lineari. Cenni sui gruppi. Forme quadratiche. Equazioni algebriche. Cimmino G., 2 ed., Bologna, R. Patron, 1953, 176 p., 1700 L.), Bibliogr. ital., 1954, **88**, № 643, 512 (итал.)

**1031 К. Курс высшей алгебры.** (Для гос. ун-тов и пед. ин-тов). **Курош А. Г.** Изд. 4-е, перераб., М., Гостехиздат, 1955, 380 стр., 8 р. 30 к.

**1032 К. Высшая алгебра** (Учебник для пед. ин-тов и ун-тов). **Окунев** (Вища алгебра. Підручник для фіз.-матем. фак-тів пед. ін-тів і ун-тів. Окунев Л. Я. Вид 2, перероблю. і доп., Київ, «Радянська школа», 1954, 423 стр., 9 крб. 80 коп.) (укр.)

### МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

**1033. О преобразовании уравнений с квадратными корнями. Лауффер** (Zur Behandlung von Gleichungen mit Quadratwurzeln. Lauffer R.), Elem. Math., 1954, **9**, № 6, 133 (нем.)

Сообщение о приведении уравнения, содержащего квадратные корни, к рациональному виду путем многократного возведения в квадрат. Л. Я. Окунев

**1034. Метод решения общего уравнения четвертой степени. Нагл** (A method for the solution of the general quartic. Nagle T. D.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 5, 343 (англ.)

Для решения общего уравнения четвертой степени $f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ предлагается метод, близкий известному методу Феррари. Ю. Г. Федоров

**1035. Дважды импримитивные уравнения шестой степени. Александров В. И.,** Сб. науч.-техн. работ Азово-Черномор. ин-та механизации и электрификации с. х., 1954, № 7, 148—162

Устанавливаются общие выражения для корней дважды импримитивных уравнений 6-й степени (т. е. уравнений, допускающих разложения одновременно в подполях 2-й и 3-й степени). В случае циклических уравнений корни представляются формулами

$$x_1 = s_1 + f(s_1)\sqrt{h}, \quad x_4 = s_1 - f(s_1)\sqrt{h},$$
$$x_2 = s_2 - f(s_2)\sqrt{h}, \quad x_5 = s_2 + f(s_2)\sqrt{h},$$
$$x_3 = s_3 + f(s_3)\sqrt{h}, \quad x_6 = s_3 - f(s_3)\sqrt{h},$$

где $h$ — рациональное число, $f(x)$ — многочлен 2-й степени с рациональными коэффициентами, $s_1, s_2, s_3$ — корни циклического уравнения 3-й степени. Аналогично выражаются корни нециклических уравнений. Приемы получения этих формул обычные.

Б. М. Уразбаев

**1036. Применение способа Лобачевского к решению уравнений одного класса. Кальнин Л. Г.,** Уч. зап. Свердлов. гос. пед. ин-та, 1955, № 10, 3—9

Метод Лобачевского применяется для решения уравнений, приводящихся к двучленным и трехчленным. А. И. Ширшов

**1037. Система результантов из коэффициентов алгебраических соотношений. Орзингер** (Resultantensysteme aus koeffizienten algebraischer relationen. Orsinger Heinz), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 48—49 (нем.)

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_r$ — формы от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_\omega$. Если этим коэффициентам приписаны значения из некоторого поля $K$, то при $r = n$ система уравнений $y_1 = 0, y_2 = 0, \ldots, y_r = 0$ допускает нетривиальное решение, принадлежащее к некоторому расширению поля $K$, тогда и только тогда, когда $a_1, a_2, \ldots, a_\omega$ обращают в нуль результант $R$ форм $y_1, y_2, \ldots, y_r$; при $r > n$ аналогичным образом приходим к системе результантов $R_1, R_2, \ldots, R_h$ (ср. Ван-дер-Варден, Современная алгебра, ч. II, М. — Л., 1947, гл. XI).

В статье дан новый способ для получения системы результантов: строятся «расширенные формы»

$$y_1 = y_1 + b_{1,n+1}x_{n+1}^{g_1} + b_{1,n+2}x_{n+2}^{g_1} + \ldots + b_{1r}x_r^{g_1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$\overline{y_r} = y_r + b_{r,n+1}x_{n+1}^{g_r} + b_{r,n+2}x_{n+2}^{g_r} + \ldots + b_{rr}x_r^{g_r},$$

где $r - n = s > 0$, $g_1, g_2, \ldots, g_r$ — степени форм $y_1, y_2, \ldots$

$\dots, y_r$, а $b_{1,n+1}, \dots, b_{rr}$ — неопределенные коэффициенты. Результант $\bar{R}_s$ форм (1) представит собой $d^s$-ю степень ($d$ — общий наибольший делитель чисел $g_1, g_2, \dots, g_r$) формы $R$ от коэффициентов $a$, $b$, которую автор называет $b$-результантом данных форм $y_1, y_2, \dots, y_r$. Коэффициенты $R_1, R_2, \dots, R_h$ $b$-результанта, рассматриваемого как форма от коэффициентов $b_{1,n+1}, \dots, b_{rr}$, дают искомую систему результантов форм $y_1, y_2, \dots, y_r$. Доказательства указанного предложения не приводится.

Полученная на таком пути система результантов может быть определена также и как множество коэффициентов некоторых специальным образом определяемых соотношений, связывающих между собой формы $y_1, y_2, \dots, y_r$. Г. Б. Гуревич

**1038. Способ доказательства теоремы о результанте.** **Ван Ши-цян** (結式定理的一種證法.王世強), 數學通報 (Шусюэ тунбао), 1955, № 2, 5—9 (кит.)

Путем прямого вычисления определителей дается новый способ представления результанта $R(f, g)$ двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ над полем $P$ в форме Сильвестра. Автор считает, что его доказательство более понятно для начинающих. Лю Шао-сюэ

**1039. Симметрические многочлены с неотрицательными коэффициентами. Кёйперс, Мойленбелд** (Symmetric polynomials with non-negative coefficients. Kuipers L., Meulenbeld B.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 1, 88—93 (англ.)

Исходя из одной теоремы Брунна о детерминантах (Brunn H., Z. Math. und Phys., 1892, 37, 291—297), авторы доказывают следующее предложение: Если $S_j$ — элементарные симметрические функции переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($S_0 = 1$, $S_j = 0$ при $j < 0$ и $> n$), то определитель $|S_{k_{ij}}|$ любого порядка при условии, что $k_{i,m} - k_{i,m+1} = k(m) > 0$, $k_{m+1,i} - k_{m,i} = k^*(m) > 0$, является симметрическим многочленом от $x_1, x_2, \dots, x_n$ с неотрицательными коэффициентами. Таким же оказывается и выражение $|f_i(x_j)|/V$, где $|f_i(x_j)|$ — определитель, составленный из значений в точках $x_1, \dots, x_n$ многочленов $f_i(x) \equiv a_{i0} + a_{i1}x + \dots + a_{i,n+p}x^{n+p}$ ($i = 0, \dots, n-1$; $n \geqslant 2$, $p \geqslant 0$), при условии, что все определители $n$-го порядка матрицы $\| a_{ij} \|$ неотрицательны; $V$ — определитель Вандермонда $V(x_1, \dots, x_n)$. Аналогичное утверждение справедливо и для выражения $|F(x_i, y_j)|/V(x)V(y)$, где определитель $|F(x_i, y_j)|$ составлен из значений многочлена от двух переменных, а $V(x)$ и $V(y)$ — соответствующие определители Вандермонда.

Если $f(x)$ и $g(x)$ — степенные ряды с неотрицательными коэффициентами, сходящиеся в интервале $0 \leqslant x < a$, то выражение

$$(-1)^{n-1} \det |1 x_i^1 \dots x_i^{n-2} f(ux_j)\, g(vx_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n)| / V$$

может быть представлено в виде степенного ряда от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ $u$, $v$ с неотрицательными коэффициентами, сходящегося в области:

$$0 \leqslant x_1, x_2, \dots, x_n < a;\ 0 \leqslant u \leqslant 1;\ 0 \leqslant v \leqslant \frac{1}{a^{n-1}}.$$

При $n = 3$ из этого предложения вытекает результат Розенблума об абсолютно монотонных функциях (Rosenbloom P. C., Bull. Amer. Math. Soc., 1946, 52, 460). А. Г. Школьник

**1040. Достаточные условия того, что все конечные нули производной отношения двух полиномов Гурвица имеют отрицательные вещественные части; приложение к $H$-матрицам.** **Пародди** (Condition suffisante pour que tous les zéros finis de la dérivée du rapport de deux polynomes d'Hurwitz soient à partie réelle négative; applications aux matrices $H$. Parodi Maurice), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 2, 147—149 (франц.)

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — два полинома Гурвица с вещественными коэффициентами степеней $n$ и $m$ (для определенности $n > m$). Пусть нули полинома $f(x)$ лежат в круге с центром в точке $(-x_1, 0)$ и радиуса $R_1$, а нули полинома $g(x)$ — в круге с центром в точке $(-x_2, 0)$ и радиуса $R_2$. Так как $f(x)$ и $g(x)$ полиномы Гурвица то, круги можно выбрать так, что $x_1 > R_1$, $x_2 > R_2$.

Опираясь на одну теорему Уолта, автор доказывает, что неравенство

$$\frac{n}{m} > \frac{x_1 + R_1}{x_2 - R_2}$$

является достаточным условием того, что все корни производной отношения $f(x)/g(x)$ лежат в левой полуплоскости. Аналогичное условие выводится для отношения характеристических полиномов двух $H$-матриц. Н. С. Мейман

**1041. О двух сериях факторов в теории алгебраических уравнений.** **Чакалов** (Az algebrai egyenletek elméletében fellépö két faktorsorozatról. Csakalov L.), Magyar tud. akad., mat. és fiz., oszt. közl., 1954, 4, № 3, 343—352 (венг.)

Совокупность $n+1$ действительных чисел $c_0, c_1, \dots, c_n$ ($c_0 > 0$) автор называет нормированной серией факторов первого рода, если всякий многочлен $f(x) \equiv a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ степени не выше $n$ с действительными коэффициентами, удовлетворяющими условию $c_0a_0 + c_1a_1 + \dots + c_na_n = 0$, меняет знак, т. е. уравнение $f(x) = 0$ имеет по крайней мере один действительный корень нечетной кратности. Если при тех же условиях уравнение имеет по крайней мере один положительный корень нечетной кратности, то указанная совокупность называется нормированной серией факторов второго рода.

Решается вопрос о необходимых и достаточных условиях для того, чтобы совокупность $\{c_i\}$, $i = 0, \dots, n$ являлась нормированной серией факторов первого рода (второго рода). Аналогичная задача решена ранее Фаваром (Favard J., Bull. Soc. math. France, 1931, 59, 229) для бесконечной последовательности $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ с привлечением некоторой проблемы моментов. В реферируемой статье автор решает задачу для конечной совокупности $\{c_i\}$ чисто алгебраическими средствами. Доказывается теорема: Совокупность действительных чисел $c_0, c_1, \dots, c_n$ тогда и только тогда является нормированной серией факторов первого рода, когда квадратичная форма

$$\Sigma_{p,q=0}^{k} c_{p+q} u_p u_q,\ k = \left[\frac{n}{2}\right],$$

является положительно определенной. Подобно этому решается вопрос о серии второго рода.

Ставится вопрос о нахождении для фиксированной серии факторов первого рода $\{c_i\}$ минимального интервала $(\alpha, \beta)$, в котором меняет знак всякий многочлен

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,\ c_0a_0 + \dots + c_na_n = 0.$$

Доказывается, что при $n=2k-1$ концы интервала $\alpha$ и $\beta$ определяются крайними корнями многочлена

$$P_k(x)=\begin{vmatrix} c_0 & c_1 \dots & c_k \\ c_1 & c_2 \dots & c_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{k-1} & c_k \dots & c_{2k-1} \\ 1 & x \dots & x^k \end{vmatrix}$$

(все корни полинома $P_k(x)$ действительны). Аналогично решается вопрос для случая $n=2k-2$; здесь концы минимального интервала определяются крайними корнями многочлена $P(x)\equiv P_k(x)+cP_{k-1}(x)$, где $c$ — любое действительное число. А. К. Харадзе

**1042. Влияние прибавления единичной последовательности на порядок простой единичной последовательности полиномов. Макар** (Effect of the addition of the unit set on the order of a simple monic set of polynomials. Makar Ragy H.), Duke Math. J., 1954, **21**, № 1, 75—78 (англ.)

Рассматриваются последовательности полиномов вида

$$p_n(z)=\sum_{k=0}^{n} p_{nk}z^k \quad (n=0,1,2,3,\dots),\ p_{nn}=1.$$

В обозначениях, принятых в предыдущей статье автора (РЖМат, 1954, 1994), доказывается, что если $\{p_n(z)\}$ — алгебраическая простая единичная последовательность степени $m$ и порядка $\omega$, то последовательность $\{u_n(z)\}=a\{p_n(z)\}+b\{z^n\}$, $a+b=1$, имеет порядок $\Omega$, удовлетворяющий неравенству $\omega/(m-1)\leqslant\Omega\leqslant\omega(m-1)$, в котором как верхняя, так и нижняя грани достигаются. Приводится пример для случая $m=3$.

Эта теорема показывает, что добавление единичной последовательности $\{z^n\}$ может заметно изменить порядок последовательности полиномов $\{p_n(z)\}$. Для любого целого положительного $N$ существует простая единичная последовательность $\{p_n(z)\}$ порядка $\omega$, для которой последовательность $\{p_n(z)\}+\{z^n\}$ будет уже иметь либо порядок $N\omega$, либо порядок $\omega/N$. Однако, если алгебраически простая единичная последовательность $\{P_n(z)\}$ порядка $\omega$ имеет степень 2, то последовательность $a\{p_n(z)\}+b\{z^n\}$ будет иметь тот же порядок. А. Ф. Тиман

**1043. Метод моментов и последовательности полиномов с регулярным распределением нулей. Сарымсаков Т. А.**, Изв. АН УзССР, 1954, № 6, 91—98 (резюме узб.)

Рассматривается последовательность полиномов $\{P_n(x)\}$ с вещественными корнями, для которой предполагается существование предельного закона распределения корней:

$$\psi(x)=\lim_{n\to\infty}N_n(-\infty,x)/n. \qquad (1)$$

В формуле (1) $N_n(-\infty,x)$ обозначает число корней, не превышающих $x$, полинома $P_n(x)$. Такая последовательность полиномов называется последовательностью с регулярным распределением корней, что записывается в виде

$$\{P_n(x)\}\in R_\psi(a,b),$$

если все корни полиномов лежат на интервале $(a,b)$.

Существование предельной функции распределения корней $\psi(x)$ равносильно существованию пределов моментов корней последовательности полиномов при $n\to\infty$.

Теорема 1. Для равенства с точностью до постоянного слагаемого предельных функций распределения корней двух последовательностей полиномов $\{P_n(x)\}$ и $\{Q_n(x)\}$ с регулярным распределением корней в одном и том же интервале необходимо и достаточно, чтобы при любом фиксированном $k$ имело место предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty}p_{k,n}/q_{k,n}=1\ (q_{k,n}\neq 0),$$

где $p_{k,n}$ и $q_{k,n}$ — соответственно коэффициенты при $x^{n-k}$ полиномов $P_n(x)$ и $Q_n(x)$.

Если $\psi(x)$ дифференцируема при $a\leqslant x\leqslant b$, то существует преобразование $x=\omega(t)$ такое, что распределение корней относительно новой переменной $t$ будет в пределе равномерным. Поэтому при достаточно большом $n$ получаются приближенные значения корней $x_{i,n}$ $(i=1,2,\dots,n)$ полинома $P_n(x)$:

$$x'_{i,n}=\omega(t_{i,n}),\ t_{i+1,n}-t_{i,n}=\frac{\beta-\alpha}{n}, \qquad a=x(\alpha),\ b=x(\beta). \qquad (2)$$

Теорема 2. Пусть $\{P_n(x)\}\in R_\psi(a,b)$, известен один корень полинома $P_n(x)$ для каждого $n$, сходимость в равенстве (1) равномерна относительно $x$ в интервале $(a,b)$, функция $\omega(t)$ непрерывна в этом интервале, тогда значения корней полинома $P_n(x)$, вычисленные методом выравнивания (2), будут приближенными в совокупности. Это означает, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать натуральное число $n_0$, чтобы числа $x'_{i,n}$ удовлетворяли неравенствам

$$|x'_{i,n}-x_{i,n}|<\varepsilon$$

при $n\geqslant n_0$ и для всех $i=1,2,\dots,n$. В. С. Новоселов

**1044. Об одном приближенном методе вычисления вещественных корней полиномов, принадлежащих последовательности полиномов с регулярным распределением корней. Сарымсаков Т. А.**, Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 3, 413—416

Более подробное изложение дано в ранее вышедшей из печати работе того же автора (реф. 1043).

В. С. Новоселов

**1045. Заметка о положительных полиномах. Абхьянкар** (Note on positive polynomials. Abhyankar S. S.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 3, 184—187 (англ.)

При конструировании электрических сетей возникает задача о представлении положительного полинома $P(X)$, т. е. полинома с положительными коэффициентами, в виде суммы $\Sigma P_i(X)$ из наименьшего числа положительных полиномов, каждый из которых имеет только отрицательные корни. Автор доказывает, что если $n$ степень полинома $P(X)$, то наименьшее число слагаемых $m(n)$, достаточное для такого представления, равно наименьшему целому числу, превосходящему $n/2$. Теорема верна для полиномов с коэффициентами из произвольного упорядоченного поля.

Н. С. Мейман

**1046. Об абстрактном принципе обращения. Сюй** (Note on an abstract inversion principle. Hsu L. C.), Proc. Edinbourgh Math. Soc., 1954, **9**, № 2, 71—73 (англ.)

Обобщается одна теорема Белла (Bell E. T., Duke Math. J., 1948, **15**, 79—85). Пусть $X=\{x_1,\dots,x_n\}$ — абстрактное множество из $n$ элементов, $X_t$ — его подмножество, содержащее точно $t$ элементов, $X'_{n-t}$—

дополнение к $X_t$, $f_t(X_t, X'_{n-t})$ — однозначная функция от $(X_t, X'_{n-t})$ со значениями в модуле над некоторым коммутативным кольцом $C$; $T_s$ — оператор, определяемый формулой

$$T_s f_t(X_t, X'_{n-t}) = \begin{cases} f_{t-1}(X_{t-1}, X'_{n-t+1}), & \text{если } x_s \in X_t, \\ 0, & \text{если } x_s \notin X_t, \end{cases}$$

где $X_{t-1}$ — результат удаления элемента $x_s$ из $X_t$; $T_0$ — тождественный оператор; $P(T)$ — полином от операторов $T_1$, $T_1^{-1}$,..., $T_n$, $T_n^{-1}$ с коэффициентами из кольца $C$, имеющий обратный оператор $P^{-1}(T)$. Последний определяется равенством $P(T)P^{-1}(T) = T_0$, в котором перестановочность множителей доказывается. Тогда следующие две системы $2^n$ уравнений равносильны:

$$F_t(X_t, X'_{n-t}) = P(T)\, f_t(X_t, X'_{n-t}),$$

$$f_t(X_t, X'_{n-t}) = P^{-1}(T)\, F_t(X_t, X'_{n-t}).$$

Обобщение по сравнению с работой Белла заключается в том, что рассматриваются полиномы от многих аргументов вместо полиномов от одного оператора $T_s$ у Белла.

Б. З. Вулих

**1047. Теория положительной линейной зависимости. Дейвис** (Theory of positive linear dependence. Davis Chandler), Amer. J. Math., 1954, 76, № 4, 733—746 (англ.)

Положительной комбинацией конечного множества векторов вещественного конечномерного линейного пространства называется линейная комбинация этих векторов с неотрицательными коэффициентами. Векторы называются положительно зависимыми, если хотя бы один из них является положительной комбинацией остальных; в противном случае векторы называются положительно независимыми. Каждое конечное множество векторов порождает многогранный конус, состоящий из векторов, представляющих положительные комбинации данных. Если порождающие векторы положительно независимые, то они называются остовом порождаемого ими конуса. Когда конус совпадает со всем пространством или является подпространством, то его остов называется положительным базисом.

Основная теорема работы дает описание положительных базисов евклидова пространства.

Г. Ш. Рубинштейн

**1048. Симметричные линейные преобразования и комплексные квадратичные формы. Долф, Маклафлин, Маркс** (Symmetric linear transformations and complex quadratic forms. Dolph C. L., McLaughlin J. E., Marx I.), Communs Pure and Appl. Math., 1954, 7, № 4, 621—632 (англ.)

В конечномерном линейном комплексном пространстве $Z$ вводится индефинитное скалярное произведение посредством невырожденной билинейной симметричной формы. Изучаются спектральные свойства симметричного относительно этого скалярного произведения оператора $A((Ax, y) = (x, Ay)$: $x, y \in Z)$ с простыми элементарными делителями. Ряд результатов работы в основном известен (Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, М. — Л., 1948, гл. 9, 10). Помимо этих результатов, устанавливается некоторое мини-максимальное свойство мнимых частей собственных чисел такого оператора. Указывается, что к этим вопросам авторы пришли в связи с определением собственных чисел для неопределенной задачи Штурма-Лиувилля на $(0, \infty)$ с граничным условием на $\infty$ вида $ay(x) + by'(x) \to 0$, где $a/b$ невещественно.

Ю. М. Березанский

**1049. Замечание о матричных многочленах и подобии матриц. Смайли** (A remark on matric polynomials and similarity of matrices. Smiley M. F.), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 3, 173—174 (англ.)

Приводится тривиальная лемма и два следствия из нее. Основным является следствие 2: Если $M$ и $N$ — квадратные матрицы с элементами из данного поля $F$ и $P(x)(Ix - M)\,Q(x) = Ix - N$, где $P(x)$ и $Q(x) = Q_m x^m + \ldots + Q_1 x + Q_0$ — матричные многочлены с постоянными определителями, то матрица $P = Q_m N^m + \ldots + Q_1 N + Q_0$ является неособенной и $N = P^{-1}MP$.

Содержится указание на возможность использования следствия 2 для вычисления матрицы, подобно преобразующей данную матрицу к канонической форме. Указывается на возможность обобщений.

Примечание референта. Следствие 2 вытекает из результатов, приведенных в книге Ф. Р. Гантмахера «Теория матриц» (М., ГИТТЛ, 1953, гл. VI, §§ 4,5 (теоремы 6 и 7)).

Ю. Шмульян

**1050. Замечание относительно неравенства о нормах для квадратных матриц. Маркус** (A remark on a norm inequality for square matrices. Marcus M. D.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 1, 117—119 (англ.)

Для $n \times n$-матрицы $A$ с характеристическими числами $\lambda_j$ кратностей $k_j$ $(j = 1,2,\ldots, \alpha)$ и степенного ряда $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ с радиусом сходимости $\rho$ (предполагается, что все $|\lambda_j| < \rho$) устанавливается неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |g(\lambda_i)|^2\right)^{1/2} \leqslant \|g(A)\| \leqslant$$

$$\leqslant c\left[\sum_{j=1}^{\alpha}\sum_{s=0}^{k_j-1} \frac{(k_j-s)}{(s!)^2} |g^{(s)}_{(\lambda_j)}|^2\right]^{1/2}, \qquad (1)$$

где $\|g(A)\| = [\sum_{i,k=1}^{n} |\{g(A)\}_{i,k}|^2]^{1/2}$ и $c$ — постоянная, зависящая только от матрицы $A$. Отсюда в частном случае $g(z) = z^p$ следует неравенство Гаучи (РЖМат, 1953, 588). Неравенство (1) получается унитарным приведением (по Шуру) к треугольному виду матрицы $A$. Из неравенства (1) сразу следует характер поведения $\|e^{tA}\|$ при $t \to +\infty$.

Примечание референта. При выводе (1) предполагается, что $A$ не является нильпотентной матрицей, однако это ограничение излишне.

Ф. Р. Гантмахер

**1051. О некоторых достаточных признаках вещественности и простоты матричного спектра. Котелянский Д. М.,** Матем. сб., 1955, 36, № 1, 163—168

Устанавливаются новые классы матриц с простым и чисто вещественным спектром. Теорема М. Г. Крейна и референта о том, что все характеристические числа $n \times n$-матрицы $A$ положительны, просты и перемежаются с характеристическими числами любого главного минора $n-1$-го порядка, если все миноры в $A$ положительны — здесь распространяется на класс матриц, у которых положительны только главные миноры и миноры, получающиеся из главных вычеркиванием одной горизонтали и одной вертикали с разными номерами. Эти же результаты устанавливаются еще для более широкого класса матриц $n$-го порядка, характеризуемого двумя условиями:

а) последовательные главные миноры

$$A\begin{pmatrix}1,\ldots,n\\1,\ldots,n\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}2,\ldots,n\\2,\ldots,n\end{pmatrix},\ \ldots,\ A\begin{pmatrix}n\\n\end{pmatrix}$$

положительны,

б) все миноры вида

$$A\begin{pmatrix} p, & i_1, \ldots, i_\nu \\ p+1, & i_1, \ldots, i_\nu \end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix} p+1, & i_1, \ldots, i_\nu \\ p, & i_1, \ldots i_\nu \end{pmatrix}$$

$$(p = 1, 2, \ldots, n-1;\ 0 \leqslant \nu \leqslant n-p-1;$$

$$i_1, i_2, \ldots, i_\nu = p+2, p+3, \ldots, n)$$

четного порядка имеют один и тот же знак $\varepsilon$, а нечетного — противоположный знак — $\varepsilon$.

Исследования опираются на представляющую самостоятельный интерес следующую теорему.

Теорема. Если каждый из миноров характеристической матрицы $A_\lambda = A - \lambda E$

$$A_\lambda\begin{pmatrix} 1, 3, \ldots, n \\ 2, 3, \ldots, n \end{pmatrix},\ A_\lambda\begin{pmatrix} 2, 4, \ldots, n \\ 3, 4, \ldots, n \end{pmatrix}, \ldots, A_\lambda\begin{pmatrix} n-1 \\ n \end{pmatrix} \quad (1)$$

имеет для всех $\lambda$ внутри интервала $[\alpha, \beta]$ тот же знак, что и симметричный с ним относительно главной диагонали минор матрицы $A_\lambda$, то все определители (1) имеют вещественные и простые корни, расположенные внутри $[\alpha, \beta]$, причем корни двух последовательных определителей перемежаются.

В качестве приложений рассматриваются колебания линейного упругого континуума с закрепленными концами.

Ф. Р. Гантмахер

**1052. О некоторых операциях над матрицами.** И в а х о р и (On some matrix operators. I w a h o r i N a g a y o s i), J. Math. Soc. Japan, 1954, **6**, № 1, 76—105 (англ.)

Рассматриваются квадратные матрицы над полем $K$. Множество всех матриц $n$-го порядка обозначается $\mathrm{gl}(K, n)$. Рассматривается теоретико-множественное объединение $R = R(K) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{gl}(K, n)$. В $R$ вводятся операции: для $A \in \mathrm{gl}(K, n)$, $B \in \mathrm{gl}(K, m)$ $A \dotplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathrm{gl}(K, m+n)$; $A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B \ldots a_{1n}B \\ a_{n1}B \ldots a_{nn}B \end{pmatrix} \in \mathrm{gl}(K, mn)$; $A \otimes B = A \otimes I_m + I_n \otimes B \in \mathrm{gl}(K, mn)$.

Далее рассматриваются операторы $\zeta$, действующие в $R$ и удовлетворяющие условиям:

I. $d\zeta(A) = d(A)$ для любой матрицы $A \in R$ ($d(A)$ означает число строк матрицы);

II. $\zeta(TAT^{-1}) = T\zeta(A)T^{-1}$ для $A \in R$ и $T$ — невырожденной матрицы;

III. $\zeta(A \dotplus B) = \zeta(A) \dotplus \zeta(B)$, а также одному из условий:

$\mathrm{IV}_1$ $\zeta(A \oplus B) = \zeta(A) \oplus \zeta(B)$;

$\mathrm{IV}_2$ $\zeta(A \oplus B) = \zeta(A) \otimes \zeta(B)$;

$\mathrm{IV}_3$ $\zeta(A \otimes B) = \zeta(A) \oplus \zeta(B)$;

$\mathrm{IV}_4$ $\zeta(A \otimes B) = \zeta(A) \otimes \zeta(B)$.

Операторы, удовлетворяющие условиям (I—$\mathrm{IV}_1$), автор называет *s-s* операторами, условиям I—$\mathrm{IV}_2$, — *s-p* операторами, условиям I—$\mathrm{IV}_3$ — *p-s* операторами и условиям I—$\mathrm{IV}_4$ — *p-p* операторами.

Найдены все *s-s*, *s-p*, *p-s* и *p-p* операторы для случая произвольного алгебраически замкнутого поля $K$. Показано, что *s-p* операторы $\zeta$ обладают следующими свойствами: 1) если $AB = BA$, то $\zeta(A+B) = \zeta(A) \cdot \zeta(B)$; 2) $\zeta(-A') = [\zeta(A)]'^{-1}$. Аналогичные формулы получены и для других рассматриваемых типов операторов.

*s-s* операторы образуют алгебру Ли относительно операций:

$$(\alpha\zeta)(A) = \alpha\zeta(A),\ \alpha \in K;$$
$$(\zeta_1 + \zeta_2)(A) = \zeta_1(A) + \zeta_2(A); \quad (1)$$
$$[\zeta_1, \zeta_2](A) = \zeta_1(A)\zeta_2(A) - \zeta_2(A)\zeta_1(A).$$

Устанавливается, что эта алгебра изоморфна двойственной к однопараметрической алгебре Ли и является бесконечномерной коммутативной.

Алгебра Ли $\dot{L}$, двойственная к алгебре Ли $L$, строится следующим образом: пусть $R_0 = \{\rho_\alpha\}$ — множество всех линейных представлений алгебры $L$. Множество отображений $\zeta R_0$ в $R$, обладающих свойствами I—$\mathrm{IV}_1$, с заменой $A$ на $\rho$ является алгеброй Ли $\dot{L}$ относительно операций (1) (В формулах (1) аргумент $A$ также следует заменить на $\rho$). Харш-Чандра установлено (Harish-Chandra, Ann. Math., 1950, **51**, 299—330), что если $L$ — полупростая алгебра, то алгебра $\dot{L}$ изоморфна $L$. Настоящий результат является первым шагом в исследовании алгебр Ли, двойственных к неполупростым алгебрам.

Автор обобщает далее введенное Шевалле понятие «реплика» (Алгебр. реф. сб., М., 1948, № 125).

Пусть $A_{(r,s)} = \underbrace{A' \oplus \ldots \oplus A'}_{r \text{ раз}} \oplus \underbrace{A \oplus \ldots \oplus A}_{s \text{ раз}}$,

Матрица $Y$ называется репликой (по Шевалле) матрицы $X$, если для любых $r, s$ все векторы, удовлетворяющие уравнению $X_{r,s}\xi = 0$, удовлетворяют также уравнению $Y_{r,s}\xi = 0$. В работе доказано, что матрица $Y$ есть реплика матрицы $X$ тогда и только тогда, когда существует *s-s* оператор $\zeta$ такой, что $\zeta(X) = Y$. Реплику по Шевалле автор называет *s-s* репликой и вводит *s-p*, *p-s* и *p-p* реплики, определяемые следующим образом:

Пусть $A_{(r,s)} = \underbrace{A \oplus A \oplus \ldots \oplus A}_{r \text{ раз}} \oplus \underbrace{A'^{-1} \oplus A'^{-1} \oplus \ldots \oplus A'^{-1}}_{s \text{ раз}}$,

тогда $Y$ есть *s-p* реплика $X$, если $Y_{(r,s)}\xi = 0$ для любого $\xi$ такого, что $X_{r,s}\xi = 0$. В остальных случаях определение аналогичное.

Относительно *s-p*, *p-s* и *p-p* реплик устанавливаются теоремы, аналогичные теореме относительно реплики по Шевалле. Работа содержит далее некоторое распространение полученных результатов на случай, когда поле $K$ не является алгебраически замкнутым.

Ф. А. Березин

**1053. О сжимающих линейных преобразованиях $n$-мерного векторного пространства.** Э г е р в а р и (On the contractive linear transformations of $n$-dimensional vector space. E g e r v á r y E.), Acta scient. math., 1954, **15**, № 3—4, 178—182 (англ.)

Линейный оператор $A$, действующий в $n$-мерном евклидовом пространстве $R_n$, называется сжимающим, если $|Ax| \leqslant |x|$ для любого $x \in R_n$. Известно, что всякий сжимающий оператор может быть представлен в форме $A = PQ$, где $Q$ есть некоторый унитарный оператор в пространстве $R_{2n} \supset R_n$ и $P$ есть проектор $R_{2n} \to R_n$. Автор получает следующее представление степеней сжимающего оператора $A$:

$$A^j = PQ^j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

здесь $Q$ — унитарный оператор в пространстве $R_{(k+1)n} \supset R_n$, а $P$ есть проектор $R_{(k+1)n} \to R_n$.

Г. Е. Шилов

**1054. Замечание о норме обратной матрицы.** Р и х т е р (Bemerkung zur Norm der Inversen einer Matrix. R i c h t e r H a n s), Arch. Math., 1954, **5**, № 4—6, 447—448 (нем.)

Пусть $Q$ — матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы $A$ порядка $n$, и пусть $\|A\|$ обозначает евклидову норму матрицы $A$: $\|A\|^2 = \sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}|^2$. Доказывается, что $\|Q\| \leqslant \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n-2}{n}} \|A\|^{n-1}$;

равенство достигается тогда, когда $A$ кратна унитарной матрице. М. А. Наймарк

**1055. О влиянии преобразования Гаусса на спектры матриц. Котелянский Д. М.,** Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 1, 117—121

Преобразование Гаусса состоит из последовательных операций, каждая из которых приводит некоторую матрицу $A = \| a_{ik} \|_1^n$ к виду $\begin{pmatrix} a_{11} & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$, где $B = \| b_{ik} \|_2^n$ и $b_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1k}$ $(i, k = 2, \ldots, n)$. Рассматривается еще матрица $A_{11} = \| a_{ik} \|_2^n$. Характеристические многочлены матриц $A$, $B$ и $A_{11}$ обозначаются соответственно через $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ и $A_{11}(\lambda)$. В предположении, что корни $A(\lambda)$ и $A_{11}(\lambda)$ вещественны и перемежаются (это имеет место для симметрических, эрмитовых, осцилляционных и других типов матриц), устанавливается:

1. Между любыми двумя соседними корнями $A_{11}(\lambda)$ лежит один корень $B(\lambda)$.

2. Между любыми двумя соседними корнями $A(\lambda)$, лежащими по одну сторону от нуля, лежит один корень $B(\lambda)$. Кроме того, при $\lambda_1 < 0$ один корень $B(\lambda)$ лежит в интервале $(-\infty, \lambda_1)$. Ф. Р. Гантмахер

**1056. Алгебра, связанная с ортогональной группой. Браун** (An algebra related to the orthogonal group. Brown William Price), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 9—10 (англ.)

Краткая заметка, в которой сообщается, что изучена структура алгебры $\omega_f^n$, связанной с ортогональной группой (Вейль Г., Классические группы, М., Изд-во ин. лит., 1947, гл. 5, § 5), в случае, если эта алгебра полупроста. Утверждается (без доказательства), что $\omega_f^n$ полупроста тогда и только тогда, если $n \geqslant f - 1$. З. И. Боревич

**1057. Комбинаторные отношения и цветные линии. Гринвуд, Глисон** (Combinatorial relations and chromatic graphs. Greenwood R. E., Gleason A. M.), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 1, 1—7 (англ.)

Имеется $N$ точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Каждая точка соединена окрашенным отрезком с каждой из остальных точек. Для окраски отрезков употреблено $r$ различных цветов. Требуется найти минимальное целое число $n = n(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ такое, что если $N \geqslant n$, то все отрезки, соединяющие какие-либо $k_1$ (или $k_2, \ldots,$ или $k_r$) точек, из числа $n$, окажутся одного первого цвета (или одного второго цвета, ..., или одного $r$-го цвета).

В статье показано, что

а) $n(k_1, k_2) \leqslant C_{k_1+k_2-2}^{k_1-1}$, и найдено точное минимальное $n$ для некоторых частных случаев, например, $n(3,3)=6$;

б) $n(k_1+1, k_2+1, \ldots, k_r+1) \leqslant \dfrac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_r)!}{k_1!\, k_2! \ldots k_r!}$

и если $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 3$, то $n \leqslant [(r!)\, e] + 1$.

Б. А. Кордемский

## ГРУППЫ

**1058. Новое доказательство простоты знакопеременной группы. Поллак Г.,** Acta scient. math., 1955, **16**, № 1—2, 63—64

**1059. Конечные группы, допускающие точные абсолютно неприводимые представления. Гашюц** (Endliche Gruppen mit treuen absolut-irreduziblen Darstellungen. Gaschütz Wolfgang), Math. Nachr., 1954, **12**, № 3/4, 253—255 (нем.)

Пусть $A$ — алгебраически замкнутое поле характеристики 0, $\mathfrak{G}$ — конечная группа, $\mathfrak{S}$ — цоколь $\mathfrak{G}$ (произведение минимальных нормальных делителей $\mathfrak{G}$), $\mathfrak{A}$ — абелева компонента $\mathfrak{S}$. Подгруппой, порожденной множеством $\mathfrak{K}$ элементов группы $\mathfrak{G}$, называется минимальный из нормальных делителей $\mathfrak{G}$, содержащих $\mathfrak{K}$.

Доказана теорема: Группа $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда может быть изоморфно представлена неприводимой группой матриц с элементами из поля $A$, когда $\mathfrak{S}$ (или, что равноценно, $\mathfrak{A}$) порождается некоторым классом сопряженных элементов группы $\mathfrak{G}$ (разумеется, для $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{A}$ эти классы различны). Л. М. Глускин

**1060. Характеры симметрических групп степеней 15 и 16. Бивинс, Метрополис, Стейн, Уэлс** (Characters of the symmetic groups of degree 15 and 16. Bivins Robert L., Metropolis N., Stein Paul R., Wells Mark B.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, **8**, № 48, 212—216 (англ.)

Описание работы по вычислению характеров симметрических групп подстановок степеней 15 и 16 с помощью электронной счетной машины МАНИАК (MANIAC) в лаборатории Лос-Аламос. Схема вычислений была разработана с использованием рекуррентных формул, сводящих вычисление характеров симметрической группы произвольной степени $n$ к вычислению характеров симметрических групп, степени которых меньше $n$. Для симметрической группы степени 16 потребовалось вычислить 27258 различных характеров, на что было затрачено 12 час. работы счетной машины. В. К. Туркин

**1061. Замечания о характерах симметрической группы. II. Осима** (Some remarks on the characters of the symmetric group. II. Osima Masaru), Canad. J. Math., 1954, **6**, № 4, 511—521 (англ.)

Каждое обыкновенное неприводимое представление симметрической группы $S_n$ определяется схемой Юнга $\alpha$. В теории модулярных представлений группы $S_n$ важную роль играет введённое Накаямой понятие угла схемы (определение угла см. Алг. реф. сб., 1948, вып. II, реф. № 542). Если из схемы $\alpha$ в произвольном порядке выбросить углы длины $kp$ ($p$ — простое; $k = 1, 2 \ldots$), то в результате получится схема $[\alpha_0]$, называемая $p$-ядром ($p$-соге) схемы $\alpha$. Р. Брауэр и Робинсон показали, что обыкновенные неприводимые представления группы $S_n$, соответствующие схемам $\alpha$ и $\beta$, принадлежат одному $p$-блоку тогда и только тогда, когда $\alpha$ и $\beta$ имеют одно и то же $p$-ядро (Brauer R., Robinson G. de B., Trans. Roy. Soc. Canada, 1947, ser. III, **40**, 11—25).

Если $p$-ядро $[\alpha_0]$, соответствующее $p$-блоку $B$, состоит из $n - bp^l$ чисел, то $b$ называется весом блока $B$. Робинсон показал, что число обыкновенных неприводимых представлений группы $S_n$, принадлежащих $p$-блоку, зависит только от веса $p$-блока. Опираясь на этот результат, автор в своей предыдущей работе (РЖМат, 1954, 2011) доказал следующую теорему:

Пусть $k(n)$ — число разбиений числа $n$ в сумму положительных слагаемых $u_1, \ldots, u_s$ $(u_1 \geqslant \ldots \geqslant u_s;\ s \leqslant n)$. Тогда число $l^*(b)$ модулярных неприводимых представлений группы $S_n$, принадлежащих $p$-блоку веса $b$, выражается формулой

$$l^*(b) = \sum_{b_1, \ldots, b_{p-1}} k(b_1) \ldots k(b_{p-1})$$

$$\left( \sum_{i=1}^{p-1} b_i = b;\ 0 \leqslant b_i \leqslant b;\ k(0) = 1 \right).$$

В реферируемой работе дается более простое доказательство этой теоремы. Кроме того, автор устанавливает ряд новых свойств чисел разложения группы $S_n$ и доказывает теоремы, относящиеся к представлениям так называемой обобщенной симметрической группы.

С. Д. Берман

**1062. Об анализе выражений $\{m\}\otimes\{1^k\}$ и $\{m\}\otimes\{k\}$. Мурнаган** (On the analyses of $\{m\}\otimes\{1^k\}$ and $\{m\}\otimes\{k\}$. Marnaghan Francis D.), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1954, **40**, № 8, 721—723 (англ.)

Приведены (без вывода) формулы

$$(\{m\})\otimes\{1^k\})' = \{m\}(\{m\}\otimes\{1^{k-1}\})' -$$
$$-(\{m\}\otimes\{2\})(\{m\}\otimes\{1^{k-2}\})' + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{j-1}(\{m\}\otimes\{j\})(\{m\}\otimes\{1^{k-j}\})' +$$
$$+(-1)^j(\{m-1\}\otimes\{k\})\{j\},$$
$$(\{m\}\otimes\{k\})' = \{m\}(\{m\}\otimes\{k-1\})' -$$
$$-(\{m\}\otimes\{1^2\})(\{m\}\otimes\{k-2\})' + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{j-1}(\{m\}\otimes\{1^j\})(\{m\}\otimes\{k-j\})' +$$
$$+(-1)^j(\{m-1\}\otimes\{1^k\})\{j\},$$

служащие для вычисления членов, содержащих скобки, которые заключают $k-j$ членов при разложении на неприводимые конституэнты кронекеровых произведений видов $\{m\}\otimes\{1^k\}$ и $\{m\}\otimes\{k\}$ представлений линейных групп. Значок при каком-либо выражении указывает, что в этом выражении из скобок, содержащих $k-j$ членов, надо вычесть $\{1^{k-j}\}$, а скобки, содержащие более $k-j$ членов, следует зачеркнуть. Для случая $j=1$ эти формулы были получены автором ранее (Proc. Nat. Acad.Sci. U.S.A., 1951, **37**, 439—441).

В. К. Туркин

**1063. О факторизации конечных групп. Чунихин С. А.**, Докл. АН СССР, 1954, **97**, № 6, 977—980

Пусть $N$ — конечная совокупность отличных от единицы натуральных чисел, среди которых могут быть и совпадающие, и $n_1$ и $n_2$ — два числа, каждое из которых входит в $N$ (эти числа могут быть одинаковыми даже в случае, когда все числа, составляющие множество $N$, различны). Если среди чисел из $N$ можно выделить такую конечную последовательность с первым членом $n_1$ и последним $n_2$, что каждые два соседних члена ее не взаимно просты, то числа $n_1$ и $n_2$ назовем связанными друг с другом в совокупности $N$.

Произведение всех чисел одного какого-либо класса связанных между собой чисел совокупности $N$ (очевидно, совокупность $N$ распадается на попарно не пересекающиеся классы взаимно связанных чисел) назовем блоком этого класса чисел совокупности $N$.

Блоки совокупности всех индексов композиционного ряда конечной группы $\mathfrak{G}$ назовем композиционными блоками группы $\mathfrak{G}$. Основной результат работы формулируется следующим образом:

Если $g=m_1m_2\ldots m_k$ есть представление порядка $g>1$ конечной группы $\mathfrak{G}$ в виде произведения ее композиционных блоков (очевидно, что произведение всех композиционных блоков группы равно ее порядку), то группу $\mathfrak{G}$ можно по крайней мере одним способом представить в виде произведения $\mathfrak{G}=\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\ldots\mathfrak{M}_k$ попарно перестановочных подгрупп $\mathfrak{M}_1,\mathfrak{M}_2,\ldots,\mathfrak{M}_k$, имеющих соответственно порядки $m_1,m_2,\ldots,m_k$.

Приводится также ряд других свойств, связанных с понятием композиционного блока. На основании приведенных свойств показывается, что известные результаты Ф. Холла о разрешимых группах и факторизационная теорема Шура являются простыми следствиями сформулированного выше предложения.

Н. В. Черникова

**1064. О представлениях симметрической группы. Фарахат** (On the representations of the symmetric group. Farahat H.), Proc. London Math. Soc., 1954, **4**, № 15, 303—316 (англ.)

Изучаются модулярные представления симметрической группы $S_n$. Опираясь на методы Накаямы и Робинсона и используя результаты своей предыдущей заметки (РЖМат, 1953, 96), автор выводит формулу для числа обыкновенных представлений группы $S_n$, принадлежащих заданному $p$-блоку. На основании формул Литтльвуда (Littlewood D. E., Proc. Roy. Soc., 1951, **A209**, 333—353) доказывается теорема о числе линейно независимых соотношений между характерами в данном $p$-блоке, что дает возможность получить формулу для числа модулярных характеров в $p$-блоке. Кроме того, в работе содержится теорема о характеристиках $p$-сингулярных классов, обобщающая результат Литтльвуда из цитированной выше работы.

С. Д. Берман

**1065. Относительно обобщения Виландтом теоремы Силова. Цаппа** (Sopra un'estensione di Wielandt del teorema di Sylow. Zappa Guido), Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, № 4, 349—353 (итал.)

Дается частичное решение проблемы Виландта (Wielandt H., Math. Z., 1954, **60**, 407—408) об изоморфизме подгрупп Холла (подгруппа $M$ конечной группы $G$ называется подгруппой Холла этой группы, если порядок $M$ взаимно прост с индексом $M$ в $G$) данного порядка $m$ и о включении каждой подгруппы порядка $n$, где $n$ является делителем $m$, в подгруппу Холла порядка $m$ произвольной конечной группы. Группа $G$ порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ $(p_1>p_2>\cdots>p_r)$ называется дисперсивной (dispersibile), если для каждого $i$, $1\leqslant i\leqslant r$, в $G$ содержится нормальный делитель $N$ порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_i^{\alpha_i}$.

Доказывается теорема: Если $M$ и $N$ являются дисперсивными подгруппами Холла конечной группы $G$ и порядок $M$ является делителем порядка $N$, то $M$ содержится в подгруппе, сопряженной с $N$.

П. А. Гольберг

**1066. О нильпотентных транзитивных подгруппах симметрической группы. Супруненко Д.**, Докл. АН СССР, 1954, **99**, № 1, 23—25

Основным результатом реферируемой работы является следующее предложение: Все транзитивные максимальные нильпотентные подгруппы симметрической группы $S_n$ сопряжены между собой. Если $n=p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}\cdots p_k^{\nu_k}$ и $N_j$ — группа, изоморфная силовской $p_j$-подгруппе симметрической группы $S_{p_j^{\nu_j}}$ $(j=1,2,\ldots,k)$, то транзитивная максимальная нильпотентная подгруппа группы $S_n$ изоморфна прямому произведению $N=N_1\times N_2\times\ldots\times N_k$.

С. Н. Черников

**1067. Замечания о расщепляемых расширениях. Хигман Д. Г.** (Remarks on splitting extensions. Higman D. G.), Pacif. J. Math., 1954, **4**, № 4, 545—555 (англ.)

Расширение $G$ группы $N$ расщепляемо, если существует такая подгруппа $C\subset G$ (дополнение подгруппы $N$ в $G$), что $G=NC$ и $N\cap C=E$. В работе дается следующий критерий расщепляемости: подгруппа $C$ конечной группы $G$ будет тогда и только тогда дополнением нормального делителя $N$ в $G$, когда $C$ минимальна относительно свойства $G=NC$ и когда для

любого простого числа $p$ существует такая силовская $p$-подгруппа $S$ группы $G$, что пересечение $N \cap S$ дополняемо в $S$, и его дополнение содержится в $C$ (теорема 1).

Рассматриваются некоторые свойства нормального делителя, содержащегося в подгруппе Фраттини конечной группы. Изучается проблема сопряженности дополнений коммутативного нормального делителя $A$ в конечной группе $G$. Получены, например, такие результаты:

1) Пусть подгруппа $H \subset G$ содержит $A$. Если порядок $A$ и индекс подгруппы $H$ в $G$ взаимно просты, то дополнения $C$ и $D$ подгруппы $A$ в $G$ тогда и только тогда сопряжены в $G$, когда $C \cap H$ и $D \cap H$ сопряжены в $H$.

2) Пусть $G$ — расщепляемое расширение подгруппы $A$. Если для каждого простого числа $p$ существует такая силовская $p$-подгруппа $S$ группы $G$, что любые два дополнения пересечения $S \cap A$ в $S$ сопряжены в $S$, то любые два дополнения подгруппы $A$ в $G$ сопряжены в $G$.

3) Пусть порядок любого нормального делителя $N$ группы $G$ и его индекс в $G$ взаимно просты. Для того чтобы дополнения $C$ и $D$ подгруппы $N$ в $G$ были сопряжены в $\{C, D\}$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой подгруппы $H$, удовлетворяющей условию $G = NH$, дополнения в $H$ пересечения $N \cap H$ были равнотипными подгруппами группы $H$. Г. Н. Нефедьев

**1068. Особые изоморфизмы между конечными классическими группами. Дьёдонне** (Les isomorphismes exceptionnels entre les groupes classiques finis. Dieudonné Jean), Canad. J. Math., 1954, **6**, № 3, 305—315 (франц.)

Даются новые геометрические доказательства следующих изоморфизмов: 1) $PSL_2(F_2) \cong S_3$; 2) $PSL_2(F_3) \cong A_4$; 3) $PSL_2(F_4) \cong A_5$; 4) $PSL_2(F_5) \cong A_5$; 5) $PSL_2(F_7) \cong PSL_3(F_2)$; 6) $PSL_2(F_9) \cong A_6$; 7) $PSL_4(F_2) \cong A_8$; 8) $Sp_4(F_2) \cong S_6$; 9) $PU_4^+(F_4) \cong PSp_4(F_3)$, где $PSL(F_q)$ — проективная специальная группа, $Sp(F_q)$ — симплектическая группа, $PU^+(F_q)$ — унитарная специальная проективная группа, $PSp(F_q)$ — проективная симплектическая группа над конечным полем $F_q$ порядка $q$. Доказательства основаны главным образом на изучении инволюций $PSL(F_q)$.

Заметим, что на странице 309 (строка 10), повидимому, следует написать $T_{11}$: $(-1, i)$, $(1, -i)$, $(1+i, -1-i)$. Д. А. Супруненко

**1069. О некоторых признаках локально нильпотентных групп. Плоткин Б. И.,** Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 3, 181—186

Для элементов $g$ и $h$ группы $G$ составляется последовательность коммутаторов:

$$[h, g(0)] = h,\ [h, g(1)] = [h, g], \ldots, [h, g(n)] = [[h, g(n-1)], g], \ldots$$

Элемент $g$ называется нульэлементом, если при любом $h$ найдется такое $n$, что $[h, g(n)] = 1$. $G$ — нильгруппа, если все ее элементы являются нильэлементами. В работе устанавливаются некоторые свойства нильпотентных групп и указываются условия, при которых нильгруппа является локально нильпотентной.

Группа тогда и только тогда локально нильпотентна, когда она является локально разрешимой нильгруппой. Нильгруппа, все абелевы подгруппы которой конечны, будет конечной нильпотентной группой. Нильгруппа без кручения, все абелевы подгруппы которой имеют конечный ранг, будет нильпотентной группой конечного специального ранга в смысле А. И. Мальцева. Отсюда получается: нильгруппа без кручения с конечным специальным рангом будет нильпотентной; нильгруппа без кручения с условием минимальности (максимальности) для изолированных подгрупп будет нильпотентной. Группа с категорией (Конторович П. Г., Матем. сб., 1951, 28 (70), 79—88) локально нильпотентна. Доказывается также следующий общий результат: в произвольной группе произведение двух локально нильпотентных нормальных делителей снова будет локально нильпотентным нормальным делителем. Отсюда получается новое доказательство ранее установленной автором теоремы о том, что всякая группа с нормализаторным условием будет локально нильпотентной (РЖМат, 1954, 5458). П. Г. Конторович

**1070. О неприводимых нильпотентных матричных группах. Супруненко Д. А.,** Матем. сб., 1954, **35**, № 3, 501—512

Реферируемая статья в основном посвящена перенесению результатов, полученных автором в работе «Неприводимые нильпотентные матричные группы простой степени» (Матем. сб., 1952, **31**, 353—358), на нильпотентные неприводимые группы матриц над алгебраически замкнутым полем $P$, степень $n$ которых не имеет квадратных делителей. Основные из полученных в ней предложений формулируются следующим образом.

I. Если характеристика $\chi$ поля $P$ не является делителем числа $n > 1$ (при $\chi = 0$, $n$ — произвольное отличное от единицы натуральное число), то полная линейная группа $GL(n, P)$ степени $n$ над полем $P$ обладает неприводимыми нильпотентными подгруппами любого наперед заданного класса $l$. Если же $n$ делится на характеристику поля $P$, то в $GL(n, P)$ нет неприводимых нильпотентных подгрупп.

II. Пусть характеристика поля $P$ не является делителем числа $n$. Тогда максимальные метабелевы неприводимые подгруппы группы $GL(n, P)$ разбиваются на столько классов сопряженных подгрупп, сколько имеется типов абелевых конечных групп порядка $n$.

III. Пусть число $n$ не имеет квадратных делителей и не делится на характеристику поля $P$. Тогда в $GL(n, P)$ имеется такая счетная цепочка подгрупп

$$\Gamma_n^2 \subset \Gamma_n^3 \subset \ldots \subset \Gamma_n^l \subset \ldots,$$

что

1. $\Gamma_n^l$ — нильпотентная неприводимая группа класса $l$.

2. Любая неприводимая нильпотентная подгруппа группы $GL(n, P)$ класса $l$ сопряжена либо с $\Gamma_n^l$, либо с ее подгруппой.

3. Если $E \subset Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_{l-1} \subset \Gamma_n^l$ — верхний центральный ряд группы $\Gamma_n^l$, то для $1 < j < l$, $Z_j / Z_{j-1}$ — циклическая группа порядка $n$, а $\Gamma_n^l / Z_{l-1}$ — прямое произведение двух циклических групп порядка $n$. Следовательно, $\Gamma_n^l : Z_1 = n^l$.

С. Н. Черников

**1071. Резидуальные свойства групп. Грунберг** (Residual properties of groups. Gruenberg Karl Walter), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 24—25 (англ.)

Вводится новое понятие резидуального свойства. Пусть $(P)$ — некоторое групповое свойство; про группу $G$ говорится, что она «резидуально $(P)$», если каждому отличному от единицы элементу $x$ группы соответствует нормальный делитель $K$ такой, что $x \notin K$ и $G/K$ обладает свойством $(P)$.

Свободные и свободные нильпотентные группы являются резидуально конечными $p$-группами. Намечено доказательство того, что таковыми же являются

свободные разрешимые группы (т. е. представимые в виде фактор-группы свободной группы по ее $m$-му коммутанту, где $m$ — целое положительное число).

П. В. Стендер

**1072. О новом обобщении понятия нильпотентности группы. Пик** (Despre o nouă generalizare a noțiunii de nilpotență a unui grup. Pic G.), Bul. ştiint. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1954, 6, № 2, 199—211 (рум.; резюме русс., франц.)

Даются следующие определения.

1. Гиперцентром $\mathfrak{Z}_i(\mathfrak{G})$ $(i = 1, 2, \ldots)$ группы $\mathfrak{G}$ называется такая ее подгруппа $\mathfrak{Z}_i(\mathfrak{G})$, что фактор-группа $\mathfrak{Z}_i(\mathfrak{G})/\mathfrak{Z}_{i-1}(\mathfrak{G})$ — максимальный нильпотентный нормальный делитель группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_{i-1}(\mathfrak{G})$; $\mathfrak{Z}_0(\mathfrak{G}) = 1$.

2. Гиперкоммутаториальной $i$-й степенью $\mathfrak{R}_i(\mathfrak{G})$ называется пересечение всех таких нормальных делителей $\mathfrak{N}$ группы $\mathfrak{G}$, что $\mathfrak{R}_{i-1}(\mathfrak{G})/\mathfrak{N}$ — максимальный нильпотентный нормальный делитель группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$; $\mathfrak{R}_0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$.

3. Если для некоторого натурального числа $k$ $\mathfrak{R}_k(\mathfrak{G}) = 1$, то группа $\mathfrak{G}$ называется гипернильпотентной.

Устанавливается ряд свойств подгрупп $\mathfrak{Z}_i(\mathfrak{G})$ и $\mathfrak{R}_i(\mathfrak{G})$ группы $\mathfrak{G}$ (в частности, их характеристичность), а также некоторые свойства гипернильпотентных групп, аналогичные свойствам нильпотентных групп, и, в частности, следующее свойство:

Если цепь подгрупп $\mathfrak{R}_i(\mathfrak{G})$ группы $\mathfrak{G}$ оканчивается через конечное число шагов единицей, то цепь гипercентров $\mathfrak{Z}_i(\mathfrak{G})$ через конечное число шагов оканчивается группой $\mathfrak{G}$, и обратно; при этом длины обеих цепей совпадают.

В случае конечной группы $\mathfrak{G}$ это предложение не вызывает сомнений. Однако в случае произвольной бесконечной группы оно не будет верным. В самом деле, если группа $\mathfrak{G}$ является бесконечным прямым произведением конечных $p$-групп с неограниченно возрастающей длиной верхнего центрального ряда, то, очевидно, $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{G}) = 1$. Однако в группе $\mathfrak{G}$ не существует подгруппы $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G})$, так как в ней не существует максимального нильпотентного нормального делителя. Рассмотренный пример показывает также (вопреки утверждению автора (стр. 200)), что из соотношения $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{G}) = 1$ не всегда вытекает нильпотентность группы $\mathfrak{G}$. Отмечается, что класс гипернильпотентных групп достаточно обширен и что, в частности, он содержит все разрешимые группы.

С. Н. Черников

**1073. Существование внешних автоморфизмов для некоторых нильпотентных групп класса 2. Шенкман** (The existence of outer automorphisms of some nilpotent groups of class 2. Schenkman Eugene), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 1, 6—11 (англ.)

Основные результаты следующие:

1. Если $G$ — конечная некоммутативная группа, у которой коммутант содержится в центре, то порядок группы автоморфизмов группы $G$ делится на порядок $G$.

2. Если $G$ — $p$-группа, коммутант которой содержится в центре, и если существует такой показатель $k$, что $p^k$-я степень каждого элемента из $G$ содержится в коммутанте, то $G$ обладает внешними автоморфизмами.

В доказательствах используются леммы об автоморфизмах. Отметим следующую: Пусть $\Phi(G)$ — пересечение всех максимальных подгрупп конечной $p$-группы $G$ и $A$ — группа автоморфизмов $G$. Пусть $N$ — нормальный делитель в $A$, состоящий из всех автоморфизмов, оставляющих неподвижными смежные классы по $\Phi(G)$. Тогда $N$ — $p$-группа.

Б. И. Плоткин

**1074. Об упорядоченных разрешимых группах с конечным числом образующих. Рим** (On ordered, finitely generated, solvable groups. Ree Rimhak), Trans. Roy. Soc. Canada, 1954, June, Sec. 3, 48, 39—42 (англ.)

Основные результаты реферируемой статьи:

1. Если упорядоченная группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию максимальности для подгрупп, то она является $ZD$-группой, т. е. группой с убывающим центральным рядом.

2. Упорядоченная разрешимая группа с конечным числом образующих тогда и только тогда нильпотентна, когда она удовлетворяет условию максимальности для подгрупп.

Дан также пример группы, показывающий, что первое из этих предложений теряет силу, если упорядоченная группа $\mathfrak{G}$ не удовлетворяет условию максимальности для подгрупп.

С. Н. Черников

**1075. К теории разрешимых групп с условиями конечности. Плоткин Б. И.**, Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 3, 417—420.

Называя радикалом группы $\mathfrak{G}$ подгруппу $R(\mathfrak{G})$, порожденную всеми локально нильпотентными нормальными делителями из $\mathfrak{G}$ (или, попросту, максимальный локально нильпотентный нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$), автор изучает такие группы (по терминологии автора, радикальные), все отличные от единицы фактор-группы которых обладают отличными от единицы радикалами. Дается ряд предложений, показывающих, что строение радикальной группы существенно зависит от строения ее радикала. Ниже перечисляются основные из предложений такого рода.

1. Если в радикальной группе радикал имеет конечное число образующих элементов, то конечное число образующих элементов имеет вся группа и все ее подгруппы.

2. Радикальная группа тогда и только тогда конечна, когда ее радикал — конечная группа.

3. Если в периодической радикальной группе $\mathfrak{G}$ или в радикальной группе $\mathfrak{G}$, удовлетворяющей условию минимальности для нормальных делителей, радикал является конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп, то и сама группа $\mathfrak{G}$ является расширением такого рода.

Опираясь на эти теоремы и пользуясь рядом предложений Р. Бера, А. И. Мальцева, Н. Н. Мягковой, Д. М. Смирнова и С. Н. Черникова, автор устанавливает эквивалентность разного рода условий минимальности (максимальности) в радикальных группах.

Н. С. Черников

**1076. Разрешимые группы с условием максимальности. Бер** (Auflösbare Gruppen mit Maximalbedingung. Baer Reinhold), Math. Ann., 1955, 129, № 2, 139—173 (нем.)

Дается новое доказательство теоремы Мальцева о том, что для разрешимых групп из условия максимальности для абелевых подгрупп вытекает условие максимальности для всех подгрупп. Иным методом доказываются также некоторые связанные с нею результаты А. И. Мальцева (Матем. сб., 1951, 28 (70), 567—588), Д. М. Смирнова (РЖМат, 1953, 90) и В. С. Чарина (РЖМат, 1955, 3082) о группах автоморфизмов разрешимых групп. Приведенные в реферируемой работе доказательства этих результатов не опираются на свойства групп матриц, а основываются лишь на простых результатах из теории колец или теореме Минковского — Дирихле о структуре группы единиц поля алгебраических чисел. Значительная часть работы посвящена выводу критериев существования в группах разрешимых и абелевых подгрупп конечного индекса.

Пусть $R$ — коммутативное кольцо с единицей. $R$ называется кольцом конечного ранга, если аддитивная группа $R$ без кручения и конечного ранга. Идеал $J$ в $R$ называется идеалом конечного ранга, если ранг кольца вычетов $R/J$ конечен. В первом разделе устанавливается, что если нуль кольца $R$ можно представить в виде пересечения конечного числа простых идеалов конечного ранга, то группа автоморфизмов и группа корней из единицы кольца $R$ конечны.

Группа автоморфизмов Ф абелевой группы $A$ называется примитивной, если $E=1$ есть единственная Ф-допустимая подгруппа $A$ с фактором-группой $A/E$ без кручения, и полупримитивной, если $A$ допускает конечную систему отличных от 1 Ф-допустимых подгрупп $S_1, \ldots, S_k$, таких, что в каждой $S_i$ Ф индуцирует примитивную группу автоморфизмов и факторгруппа $A/S_1 \ldots S_k$ периодическая. Основные результаты второго раздела следующие:

1. Если Ф — абелева примитивная группа автоморфизмов абелевой группы без кручения $A$, то кольцо эндоморфизмов $E$ группы $A$, порожденное элементами Ф, является областью целостности, аддитивная группа которой изоморфна подгруппе группы $A$.

2. Пусть Ф — полупримитивная группа автоморфизмов абелевой группы без кручения $A$ конечного ранга. Тогда периодическая часть $\theta$ группы Ф конечна; если Ф — нормальный делитель группы автоморфизмов Г группы $A$, то централизатор Ф в Г имеет конечный индекс в Г. Конечность $\theta$ следует также из теоремы 5 названной выше работы референта.

Группа называется разрешимой, если каждый отличный от 1 гомоморфный образ $G$ обладает отличным от 1 абелевым нормальным делителем. В классификации А. Г. Куроша и С. Н. Черникова (Успехи матем. наук, 1947, 2, № 3(19), 18—59) разрешимая группа имеет тип $RJ^*$. В третьем разделе устанавливается ряд критериев существования разрешимых и абелевых подгрупп конечного индекса. Мы формулируем лишь некоторые из них:

1. Следующие свойства группы $G$ эквивалентны друг другу:

а) $G$ обладает разрешимой характеристической подгруппой конечного индекса,

б) $G$ обладает разрешимой подгруппой конечного индекса,

в) каждый бесконечный гомоморфный образ $G$ обладает бесконечным нормальным делителем с конечным коммутантом.

2. Группа $G$ тогда и только тогда обладает абелевой подгруппой конечного индекса, когда каждый бесконечный гомоморфный образ $G$ обладает бесконечным абелевым нормальным делителем и каждый нормальный делитель $N$ группы $G$ обладает максимальным абелевым нормальным делителем, в котором $N$ индуцирует конечную группу автоморфизмов.

3. Если каждая абелева периодическая подгруппа группы $G$ содержит лишь конечное число элементов любого данного порядка, то следующие свойства $G$ эквивалентны друг другу: а) $G$ обладает абелевой подгруппой конечного индекса, б) $G$ обладает разрешимой подгруппой конечного индекса, и нормализаторы абелевых подгрупп $G$ индуцируют в этих подгруппах конечные группы автоморфизмов, в) если $A$ — максимальный абелев нормальный делитель подгруппы $B$ группы $G$, то $B/A$ конечна, г) $G$ обладает разрешимой подгруппой конечного индекса и каждый нормальный делитель $G$ обладает максимальным абелевым нормальным делителем, в котором он индуцирует конечную группу автоморфизмов.

Доказывается также, что произведение всех конечных нормальных делителей любой группы $G$ конечно, если только конечны все абелевы периодические подгруппы $G$.

В четвертом и пятом разделах доказываются некоторые свойства групп автоморфизмов разрешимых групп, установленные ранее другими методами в указанных выше работах А. И. Мальцева, Д. М. Смирнова и В. С. Чарина. Опираясь на эти свойства, автор доказывает сформулированную выше теорему Мальцева. Д. М. Смирнов

**1077. Сверхразрешимые группы. Хупперт** (Überauflösbare Gruppen. Huppert Bertram), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 26—27 (нем.)

Приведена (без доказательства) формулировка следующей теоремы: Конечная группа сверхразрешима, если индексы всех ее максимальных подгрупп являются простыми числами.

Указывается, что доказательство основано на использовании следующего предложения: если индексы всех максимальных подгрупп разрешимой группы являются простыми числами, то коммутант этой группы нильпотентен. Приводятся следствия:

1. Пусть $\varphi(\mathfrak{G})$ — подгруппа Фраттини конечной группы $\mathfrak{G}$. Если фактор-группа $\mathfrak{G}/\varphi(\mathfrak{G})$ сверхразрешима, то сама группа $\mathfrak{G}$ также сверхразрешима.

2. Если $\mathfrak{N}$ — нормальный делитель конечной группы $\mathfrak{G}$, причем фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ сверхразрешима, то имеется такая сверхразрешимая подгруппа $\mathfrak{U}$ группы $\mathfrak{G}$, что $\mathfrak{G}=\mathfrak{N}\cdot\mathfrak{U}$ (т. е. $\mathfrak{N}$ имеет в $\mathfrak{G}$ сверхразрешимое дополнение в смысле Ф. Холла). В К. Туркин

**1078. Об одном классе бесконечных групп. Смирнов Д. М.,** Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1954, **5**, 57—60

Устанавливаются некоторые свойства групп, обладающих нормальным рядом конечной длины, все бесконечные факторы которого коммутативны (такого рода группы автор называет $B$-группами), и, в частности, следующее свойство:

Всякая $B$-группа является расширением разрешимой группы при помощи полупростой конечной группы. Если $B$-группа является $B_i$-группой (т. е. если она допускает конечный нормальный ряд, абелевы факторы которого имеют тип $A_i$ $(i=1,2,3,4,5)$ (Мальцев А. И., Матем. сб., 1951, 28/70, № 3, 567—588)), то она является расширением разрешимой группы типа $A_i$ при помощи полупростой конечной группы.

Опираясь на это предложение, автор распространяет некоторые результаты цитированной выше работы А. И. Мальцева, своей работы (РЖМат, 1953, 90), а также работы В. С. Чарина (РЖМат, 1954, 3622) на соответствующие классы $B$-групп. С. Н. Черников

**1079. О коммутаторах. Петреско** (Sur les commutateurs. Petresco Julian), Math. Z., 1954, **61**, № 3, 348—356 (франц.)

Рассматриваются различные соотношения между коммутаторами элементов группы, позволяющие автору получить несколько новых результатов, обобщающих, в частности, теорему Фиттинга и тождество Холла. Пусть $A, B$ — подгруппы, $a_i \in A$, $b_i \in B$, $A \cup B$ — подгруппа, порожденная элементами $A$ и $B$ $A \circ B$ — подгруппа, порожденная коммутаторами $a_i \circ b_i = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$, $K(A) = K^1(A) = A \circ A$, $K^i(A) = K(K^{i-1}(A))$, $N_B(A)$ — нормальный делитель, порожденный элементами $A \cup B$ в $B$. Тогда $K(A \cup B)$ есть множество элементов вида $\Pi a_i b_i$, где $\Pi a_i \in K(A)$, $\Pi b_i \in K(B)$; $N_{A \cup B}(A)$ — множество элементов вида $\Pi a_i b_i$, $\Pi b_i = 1$; $A \circ B$ — множество элементов $\Pi a_i b_i$, где $\Pi a_i = \Pi b_i = 1$ и $K^i(A \cup B) \subseteq K^i(A) \cdot (A \circ B) \cdot K^i(B)$.

Группу $A$ автор называет антиразрешимой, если $\overline{K}(A) = A$. Если $A$, $B$ антиразрешимы, то $A \cup B$ также антиразрешима. Если $K^{n-1}(A) \neq K^n(A) = K^{(n+1)}(A)$, то по определению $K^n(A) = \overline{K}(A)$. Имеет место соотношение

$$\overline{K}(A \cup B) = N_{A \cup B}[\overline{K}(A)] \cdot K(A \circ B) \cdot N_{A \cup B}[\overline{K}(B)],$$

из которого следует, в частности, что $\overline{K}(A \cup B) = \overline{K}(A \circ B)$, если $A$, $B$ разрешимы, и $\overline{K}(AB) = \overline{K}(A)\overline{K}(B)$, если $A$, $B$ инвариантные.

Полагая $O^1(A) = A \circ A$; $O^i(A) = O^{i-1}(A) \circ A$, автор получает соотношение

$$O^i(A \cup B) \subseteq O^i(A) \cdot (A \circ B) \cdot O^i(B).$$

Пересечение подгрупп $A^1$, инвариантных в $A$ и таких, что $A / A^1$ нильпотентна, обозначается через $\overline{O}(A)$. Тогда $\overline{O}(A \circ B) \subseteq \overline{O}(A) \cdot (A \circ B) \cdot \overline{O}(B)$. Если $A$, $B$ нормальны, то $O(AB) = \overline{O}(A)\overline{O}(B)$.

Далее вводятся в рассмотрение особые формы-коммутатрисы, с помощью которых формулируются и доказываются результаты, обобщающие тождество Холла и теорему Фиттинга о существовании нильпотентного и разрешимого ядер в группе. А. И. Мальцев

**1080. Теория групп с конечными классами сопряженных элементов. Эрдёш** (The theory of groups with finite classes of conjugate elements. Erdös J.), Acta math. Acad. sci. hung., 1954, **5**, № 1—2, 45—58 (англ.; резюме русс.)

**Теория групп с конечными классами. Эрдёш** (A véges osztályú csoportok elmélete. Erdös Jenö), Magyar tud. akad. mat és fiz. oszt. közl., 1954, **4**, № 1, 127—143 (венг.)

Обе работы, идентичные по содержанию, посвящены изложению теории групп с конечными классами сопряженных элементов, начатой еще Бером (Baer R., Duke Math. J., 1948, **15**, 1021—1032) и подробно разработанной Нёйманом (Neumann B. H. Proc. London Math. Soc., 1951, 3 ser., **1**, 178 — 187). Трактовка этой теории Нейманом, систематически использующим прямые произведения групп с объединенной подгруппой, сравнительно неэлементарна. Автор дает элементарные доказательства основных теорем теории групп с конечными классами сопряженных элементов: о периодичности коммутанта, о коммутативности групп без кручения и т. д., опираясь лишь на простейшие факты теории групп. Следуя Нёйману, автор приводит в качестве приложений построенной теории) доказательства теоремы Бера о конечности коммутанта в группе, индекс центра которой конечен (Baer R. Trans. Amer. Math. Soc., 1945, **58**, 348—389), и теоремы Дицмана (Дицман А. П., Докл. АН СССР, 1937, **15**, 1—76).

Новым является простое доказательство теоремы референта (Успехи матем. наук, 1951, **6** : 1, 187—189), использующее основные факты построенной теории. Приводится ряд примеров, выясняющих, в какой мере возможно усиление доказанных теорем.

Ю. Г. Федоров

**1081. Взаимные шрейеровы расширения групп. Редеи, Штейнфельд** (Gegenseitige Schreierschе Gruppenerweiterungen. Rédei L., Steinfeld O.), Acta scient. math., 1954, **15**, № 3-4, 243—250 (нем.)

Пусть $G$ и $\Gamma$ — некоторые группы. Если группа $\mathfrak{G}$ обладает такими двумя нормальными делителями $G'$ и $\Gamma'$, изоморфными $G$ и $\Gamma$ соответственно, что факторгруппа $\mathfrak{G}/G'$ изоморфна $\Gamma$ и $\mathfrak{G}/\Gamma'$ изоморфна $G$, то $\mathfrak{G}$ называется взаимным шрейеровым расширением групп $G$ и $\Gamma$.

Частным случаем такого рода расширений является прямое произведение двух групп.

Взаимное шрейерово расширение групп $G$ и $\Gamma$ строится авторами с помощью четырех функций двух переменных:

$$a^b, \alpha^b\ (\in \Gamma),\ \alpha^\beta, a^\beta\ (\in G)$$

и четырех функций одной переменной:

$$\rho(\alpha), \sigma(a)\ (\in \Gamma),\ r(a),\ s(\alpha)\ (\in G),$$

где $a, b \in G$, $\alpha, \beta \in \Gamma$.

Формулировка их свойств довольно громоздка.

Группа $\mathfrak{G}$ строится как совокупность пар $(a, \alpha)$, для которых определена операция умножения:

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, a^b \alpha^b \beta).$$

Таким образом определяются все взаимные расширения групп $G$ и $\Gamma$ с точностью до изоморфизма.

В. С. Чарин

**1082. Почти кольца, связанные со свободными группами. Нёйман** (Near-rings connected with free groups. Neumann Hanna), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 46—47 (англ.)

Рассматривается множество $\Phi_n$ всех эндоморфизмов свободной группы $F_n$ с фиксированной системой свободных образующих $e_i$. Любое отображение системы образующих $e_i$ в $F_n$ определяет эндоморфизм $\alpha$. В $\Phi_n$ с помощью равенств $e_i(\alpha + \beta) = e_i\alpha \cdot e_i\beta$ и $e_i(\alpha\beta) = (e_i\alpha)\beta$ определяются две алгебраические операции, связанные праводистрибутивным законом $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$. Тогда $\Phi_n$ оказывается почти кольцом, отличающимся от кольца возможными некоммутативностью сложения и невыполнением леводистрибутивного закона.

Вводится понятие идеала в $\Phi_n$, как нормального делителя $\mathfrak{A}$ аддитивной группы, удовлетворяющего условию $\xi\mathfrak{A}\eta \subseteq \mathfrak{A}$ для $\xi, \eta \in \Phi_n$, устанавливаются некоторые его свойства и связь с вполне инвариантной подгруппой из $F_n$. Доказательства отсутствуют.

Г. Н. Нефедьев

**1083. Лемма о свободных группах. Морimoto** (A lemma on a free group. Morimoto Akihiko), Nagoya Math. J., 1954, **7**, June, 149—150 (англ.)

Пусть $f(X, Y) = X^{k_1}Y^{l_1} \ldots X^{k_s}Y^{l_s}$ — слово относительно букв $X$, $Y$; $G$ — свободная группа, порожденная свободными образующими $x$, $y$. Доказано предложение: если выполняются условия

$$f(f(x, y), y) = f(x, f(y, y)),\ f(f(x, x), y) = f(x, f(x, y)),$$

то слово $f$ имеет один из видов: $1$, $X$, $Y$, $XY$, $YX$.

Л. М. Глускин

**1084. Об определении группы. Фараго** (Contribution to the definition of group. Farago Tibor), Publs mathematicae, 1954, **3**, № 1—2, 133—137 (англ.)

Предполагая, что группа $G$ определяется четырьмя постулатами (замкнутость $G$ по отношению к операции умножения, ассоциативность умножения, существование левой единицы и левого обратного элемента) рассматривается вопрос о замене постулата ассоциативности группового умножения $(ab)c = a(bc)$, где $a, b, c$ — любые элементы $G$, одним из следующих 15 постулатов:

1. $(ab)c = a(cb)$; 2. $(ab)c = b(ac)$; 3. $(ab)c = b(ca)$;
4. $(ab)c = c(ab)$; 5. $(ab)c = c(ba)$; 6. $a(bc) = a(cb)$;

7. $a(bc) = b(ac)$; 8. $a(bc) = b(ca)$; 9. $a(bc) = c(ab)$; 10. $a(bc) = c(ba)$; 11. $(ab)c = (ac)b$; 12. $(ab)c = (ba)c$; 13. $(ab)c = (bc)a$; 14. $(ab)c = (ca)b$; 15 $(ab)c = (cb)a$.

Показывается, что 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 13, 14 определяют коммутативную группу; случаи 4, 5, 6 определяют коммутативную систему, являющуюся не обязательно группой. Неассоциативную и некоммутативную систему определяют 7, 12 и 15; случай 15 определяет квазигруппу.

Отмечается, что случаи 8 и 13 были рассмотрены ранее в работе Санчес — Диас (РЖМат, 1954, 2001).

А. П. Дицман

**1085. О декартовых произведениях бесконечных циклических групп. Эренфейхт А., Лось Е.** (Sur les produits cartésiens des groupes cycliques infinis. Ehrenfeucht A., Los J.), Bull. Acad. polon. sci., 1954, **2**, № 6, 261—263 (франц.)

**О декартовых произведениях бесконечных циклических групп. Эренфейхт А., Лось Е.,** Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1954, **2**, № 6, 265—267

Символом $C^T$, где $C$ — аддитивная группа целых чисел и $T$ — данное множество, обозначается группа по сложению всех функций $x$, определенных для элементов $t \in T$ и принимающих целочисленные значения $x(t)$, причем сумма этих функций определяется обычным способом. Группа $C^T$ называется декартовым (или полным) произведением бесконечных циклических групп. Пусть $e^{(s)}$ $(s \in T)$—элемент группы $C^T$, определяемый формулой

$$e^{(s)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } t \neq s \\ 1 & \text{для } t = s \end{cases},$$

и $C^{T^*}$ — наименьшая подгруппа группы $C^T$, содержащая все элементы $e^{(s)}$, $s \in T$. Группа $C^{T^*}$ является свободной абелевой и называется прямым произведением в группе $C^T$. Обозначим через $H_G$ группу по сложению гомоморфизмов $h(G)$ абелевой группы $G$ в группу $C$. Группа $H_G$ называется регулярной, если $\bigcap_{h \in H_G} h^{-1}(0) = (0)$.

Для групп $C^T$, удовлетворяющих условию: (I) Если $h_1$ и $h_2$ суть два таких гомоморфизма группы $C^T$ в группу $C$, что $h_1(x) = h_2(x)$ для $x \in C^{T^*}$, то $h_1 = h_2$, — приводятся (без доказательства) следующие результаты: 1. Каждый гомоморфизм $h$ группы $C^T$ в группу $C$ имеет вид $h(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot x(t_i)$, где $x \in C^T$, $k_1, \ldots, \ldots, k_n$ — целые и $t_1, \ldots, t_n$ — зафиксированные элементы множества $T$. 2. Кольцо эндоморфизмов группы $C^T$ изоморфно кольцу всех матриц $\| a_{t,s} \|_{t,s \in T}$ с целочисленными элементами, имеющих в каждой строке только конечное число ненулевых элементов. 3. Группа $H_G$ при $G = C^T$ изоморфна $C^{T^*}$. 4. Если группа $H_G$ регулярна и изоморфна $C^T$, то группа $G$ изоморфна $C^{T^*}$. 5. Если группа $H_G$ изоморфна $C^T$, то группа $G$ является прямым произведением группы $A$, изоморфной $C^{T^*}$, и группы $B$, для которой $H_B = (0)$.

Л. Я. Куликов

**1086. О теореме Цассенхауза. Гоин** (On a theorem of Zassenhaus. Goheen H. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 5, 799—800 (англ.)

Дается новое простое доказательство следующей теоремы Цассенхауза (Zassenhaus H., Proc. Glasgow Mathematical Association 1952, **1**, 54—63): Если в конечной группе нормализатор всякой абелевой подгруппы является также ее централизатором, то группа является абелевой.

Л. Я. Куликов

**1087. Об абелевых нормальных делителях. Цубои** (On Abelian normal subgroups, Tsuboi Teruo), Sci. Repts. aitama Univ., 1954, **1**, № 3, 101—104 (англ.)

Доказывается теорема: Если конечная группа $G$ не есть $p$-группа, то всякий ее абелев нормальный делитель, индекс которого есть степень $p$, является прямым произведением своего пересечения с объединением верхнего центрального ряда группы $G$ и своего пересечения с тем членом $G_{c+1}$ нижнего центрального ряда группы $G$, для которого $c$ есть класс силовских $p$-подгрупп группы $G$.

А. П. Мишина

**1088. Проблемы расщепления в абелевых группах. Заремба** (Spacing problems in Abelian groups. Zaremba Stanislaw Krystyn), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 74 (англ.)

Рассматривается абелева группа $G_n$ с базисными элементами $g_1, \ldots, g_n$ одного и того же простого порядка $p$. Через $S_n^{(k)}$ обозначается совокупность всех элементов группы $G_n$ вида $g_{i_1}^{\alpha_1} \ldots g_{i_k}^{\alpha_k}$, где $0 \leqslant \alpha_j \leqslant p-1$, $j = 1, \ldots, k$. Без доказательства приводятся некоторые результаты, касающиеся существования такой системы элементов $H_n^{(k)}$ группы $G_n$, что каждый элемент группы $G_n$ единственным образом представляется в виде произведения элемента из $H_n^{(k)}$ на элемент из $S_n^{(k)}$. Отмечается, что полученные результаты могут быть применены в теории коммуникаций.

А. П. Мишина

**1089. Об абелевых группах, всякая счетная подгруппа которых является эндоморфным образом. Сонсяда Э.,** Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1954, **2**, № 8, 365—368 (англ.)

**Об абелевых группах, всякая счетная подгруппа которых является эндоморфным образом. Сонсяда** (On abelian groups every countable subgroup of which is an endomorphic image. Sąsiada E.), Bull. Acad. polon, sci., Cl. 3, 1954, **2**, № 8, 359—362 (англ.)

А. Кертес и Т. Селе (РЖМат, 1955, 2118) поставили проблему об определении строения абелевых групп $G$ обладающих следующим свойством:

(P) Всякая подгруппа группы $G$ является эндоморфным образом группы $G$;

кроме того они описали строение абелевых групп, у которых каждая подгруппа с конечной системой образующих является эндоморфным образом группы.

В реферируемой работе изучается строение абелевых групп, обладающих следующим свойством:

($P_1$) Всякая счетная подгруппа группы является эндоморфным образом группы.

Доказываются теоремы:

1) Для того чтобы периодическая абелева группа $T$ обладала свойством ($P_1$), необходимо и достаточно, чтобы: (*) всякая примарная компонента $T_p$ группы $T$ являлась либо группой с ограниченными в совокупности порядками элементов, либо могла быть гомоморфно отображена на группу $F_p = \sum_{n=1}^{\infty} C(p^n)$, где $C(p^n)$ — циклическая группа порядка $p^n$.

2) Абелева группа $G$ тогда и только тогда обладает свойством ($P_1$), когда либо $G$ имеет выделяющуюся в прямое слагаемое свободную абелеву подгруппу бесконечного ранга, либо $G$ представима в виде прямой суммы свободной абелевой группы с конечной системой образующих и периодической группы со свойством (*).

Строение абелевых групп без кручения, обладающих свойством (P), описывается теоремой.

3) Абелева группа $G$ без кручения тогда и только тогда обладает свойством $(P)$, когда она либо обладает конечной системой образующих, либо имеет выделяющуюся в прямое слагаемое свободную абелеву подгруппу, ранг которой равен рангу группы $G$.

Примечание референта. Из результатов работы Т. Селе (PAMat, 1955,4256, теорема 7)легко следует, что абелева $p$-группа $T_p$ тогда и только тогда может быть гомоморфно отображена на группу $F_p$, когда фактор-группа группы $T_p$ по ее максимальной полной подгруппе содержит элементы как угодно большого порядка. Л. Я. Куликов

**1090. Об одном классе линейно компактных абелевых групп. I. II. Лептин** (Über eine Klasse linear kompakter abelscher Gruppen I. II. Leptin Horst), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1954, **19**, № 1-2, 23—40; 1955, **19**, № 3-4, 221—243 (нем.)

Работа содержит обобщение некоторых результатов, касающихся одного класса топологических групп, изученного Круллем (Krull W., J. reine und angew. Math., 1942, **184**, 19—48) и референтом (Матем. сб., 1946, **19**, 311—340; 1948, **22**, 135—174; 1950, **27**, 85—102), а именно сепарабельных групп. Автор называет топологическую абелеву группу $G$ прюферовской, если в ней существует полная система окрестностей нуля, состоящая из подгрупп, и каждая центрированная система смежных классов по открытым подгруппам имеет непустое пересечение (в сепарабельных группах, кроме того, выполняется вторая аксиома счетности). Подгруппы, фактор-группы и пределы обратных спектров прюферовских групп являются прюферовскими группами. Всякая дискретная прюферовская группа является прямой суммой конечного числа конечных циклических групп и групп типа $p^\infty$. Каждая прюферовская группа является прямой суммой своих примарных компонент. Указаны некоторые свойства прюферовских групп, аналогичные свойствам нульмерных бикомпактных групп. Примарная прюферовская группа бикомпактна тогда и только тогда, когда в ней нет элементов бесконечной высоты. Замкнутое подмножество прюферовской группы бикомпактно тогда и только тогда, когда оно порождает бикомпактную подгруппу.

Гомоморфизм примарной прюферовской группы на прямую сумму групп ранга 1 называется чистым, если каждое прямое слагаемое имеет прообраз, изоморфно отображающийся на него. Ядро чистого гомоморфизма является сервантной подгруппой. Чистые гомоморфизмы, равно как и множество всех гомоморфизмов прюферовской группы на прямую сумму, образуют направленное частично упорядоченное множество, обладающее максимальным элементом. Даны некоторые теоремы о прямых разложениях прюферовских групп, обобщающие установленные ранее Круллем и референтом, например, если фактор-группа $G/H$ примарной прюферовской группы не имеет элементов конечного порядка, то $H$ является прямым слагаемым в $G$, каждая прюферовская группа без элементов конечного порядка является прямой суммой групп ранга 1. Указаны некоторые численные инварианты прюферовских групп, не разлагающихся в прямую сумму групп ранга 1. Наконец, автор строит теорию характеров для прюферовских групп, аналогичную теории характеров, построенной референтом для сепарабельных и косепарабельных групп. Эти результаты являются частным случаем общей теории характеров групп с заданной ограниченностью и теории характеров для прямых и обратных спектров топологических групп, построенной референтом (Виленкин Н. Я., Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, **15**, 339—462 и 503—532). Хотя результаты автора тесно связаны с работами референта, ссылки на работы референта отсутствуют. Н. Я. Виленкин

**1091. Линейно компактные модули и кольца. Лептин** (Linear kompakte Moduln und Ringe. Leptin Horst), Math. Z., 1955, **62**, № 3, 241—267 (нем.)

Топологический модуль $\mathfrak{M}$ с системой левых операторов $\Lambda$ называется линейно топологическим, если в нем существует полная система окрестностей нуля, состоящая из допустимых подмодулей. Линейно топологический модуль $\mathfrak{M}$ линейно компактен (л. к.), если каждая центрированная система смежных классов по замкнутым подмодулям имеет общую точку прикосновения. Если $\varphi$ — непрерывный $\Lambda$-гомоморфизм такого модуля, то для каждой центрированной системы $\{R_\alpha\}$ указанного выше вида $\bigcap \varphi(R_\alpha) = \varphi(\bigcap R_\alpha)$. Замкнутые подмодули л. к. модуля линейно компактны. Дано описание различных топологизаций л. к. модуля, сохраняющих линейную компактность. Среди них есть самая грубая, такая, что любой фильтр $\{R_\alpha\}$ замкнутых подмодулей, для которого $\bigcap R_\alpha = 0$, сходится к нулю. Л. к. модуль $\mathfrak{M}$ называется л. к. в узком смысле, если каждый непрерывный $\Lambda$-гомоморфизм $\mathfrak{M}$ в линейно топологический модуль открыт. К л. к. в узком смысле модулям принадлежат прюферовские группы (реф. 1090), л. к. векторные пространства над полями, л. к. полупростые кольца и т. д. Л. к. в узком смысле модули выделяются из полных линейно топологических модулей следующими эквивалентными свойствами: а) каждый $\Lambda$-гомоморфизм $\mathfrak{M}$ открыт, б) каждый непрерывный $\Lambda$-гомоморфизм отображает $\mathfrak{M}$ на $\Lambda$-модуль с самой грубой топологией, в) в фактор-модулях по открытым подмодулям в $\mathfrak{M}$ выполнено условие минимальности, г) $\mathfrak{M}$ линейно компактно и каждый открытый подмодуль в $\mathfrak{M}$ имеет минимальный надмодуль. Подмодули, непрерывные гомоморфные образы и прямые суммы (в тихоновском смысле) л. к. в узком смысле модулей л. к. в узком смысле.

Если топологическое кольцо $R$ л. к., то его джекобсоновский радикал (Jacobson N., Amer. J. Math., 1945, **67**, 300—320) замкнут. Радикал л. к. в узком смысле кольца трансфинитно нильпотентен. Простое л. к. кольцо без радикала является полным кольцом эндоморфизмов некоторого векторного пространства и обратно. Полупростое л. к. кольцо является топологической прямой суммой полных колец эндоморфизмов. Кольцо $R$ полупросто тогда и только тогда, когда оно является плотным подкольцом топологической прямой суммы полных колец эндоморфизмов. Эндоморфизм модуля называется гипернепрерывным, если он переводит все подмодули в себя. Пусть $\mathfrak{M}$ — полный линейно топологический модуль с множеством $\Lambda$ гипернепрерывных эндоморфизмов как левой областью операторов и множеством $\theta$ любых правых множителей. Разложение $\mathfrak{M} = \Sigma \mathfrak{M}_\alpha$ модуля $\mathfrak{M}$ в прямую топологическую сумму $(\Lambda, \theta)$-подмодулей называется гиперпрямым, если любой $\Lambda$-подмодуль $\mathfrak{N}$ является прямой суммой $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_\alpha$. Если такое разложение невозможно, то $\mathfrak{M}$ называется массивным (пример — разложение прюферовских групп на примарные прямые слагаемые). Каждый л. к. $(\Lambda, \theta)$-модуль с системой окрестностей нуля, состоящей из $(\Lambda, \theta)$-подмодулей, разлагается в гиперпрямую сумму массивных подмодулей. Каждое л. к. кольцо $R$ разлагается единственным образом в гиперпрямую сумму массивных двусторонних идеалов $R_\mu$. Если $R$ содержит единицу, то идеалы $R_\mu$ двусторонне неразложимы.

Н. Я. Виленкин

**1092. Абелевы группы с компактной группой характеров и теория двойственности некоторых линейно топологических абелевых групп. Лептин** (Abel-

sche Gruppen mit kompakten Charaktergruppen und Dualitätstheorie gewisser linear topologischer abelscher Gruppen. Leptin Horst), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1955, **19**, № 3/4, 244—263 (нем.)

Пусть $G$ — дискретная абелева группа и $\hat{G}$ — ее группа характеров. Каждому элементу $\hat{z}$ группы $\hat{G}$ ставится в соответствие группа $T_{\hat{z}}$, изоморфная группе $T$ вещественных чисел по mod 1, и через Γ обозначается топологическая прямая сумма групп $T_{\hat{z}}$. Соответствие $x \to (x, \hat{z})$, где $(x, \hat{z})$ — значение характера $\hat{z}$ для элемента $x$, определяет алгебраически изоморфное отображение $G$ на некоторую подгруппу $G^{\Delta}$ из Γ. Пусть $\mathfrak{H}$ топологическая абелева группа. Следующие три утверждения эквивалентны: 1) $\mathfrak{H}$ имеет достаточно много характеров и $\hat{G}$ является группой характеров для $\mathfrak{H}$ 2) существует непрерывное алгебраически изоморфное отображение $\mathfrak{G}$ на $G^{\Delta}$, 3) $G$ и $\mathfrak{H}$ алгебраически изоморфны и каждый алгебраический гомоморфизм $\mathfrak{H}$ в $T$ непрерывен. Если для $\mathfrak{H}$ выполнено одно из этих условий, то каждая подгруппа в $\mathfrak{H}$ замкнута и каждая компактная часть $\mathfrak{H}$ конечна. В этом случае утверждения 1—3 справедливы для любой подгруппы и любой фактор-группы $\mathfrak{H}$.

Абелева группа $G$ называется периодически топологизированной (п. т.-группой), если существует полная система окрестностей нуля в $G$, состоящая из открытых подгрупп $(U_{\alpha})$, фактор-группы по которым периодичны. $G$ называется циклически полной, если каждый элемент $x$ в $G$ порождает полную подгруппу $\{x\}$. $G$ называется примарной, если она является циклически полной п. т. группой и все $G/U_{\alpha}$ примарны. Совокупность циклически полных п. т. групп обозначается через $\mathfrak{B}$, а примарных групп $\mathfrak{B}_p$. Топология в группу характеров $G$ группы $G$ вводится при помощи аннуляторов компактных подгрупп из $G$. Подгруппа $H$ абелевой группы $G$ называется высокой, если фактор-группа $G/H$ периодична и существует такое число $n$, что все $p$-подгруппы $G/H$ имеют прюферовский ранг не более чем $n$. Абелева группа $\hat{G}$ называется линейно дискретной, если все ее высокие подгруппы открыты. Естественное отображение $\varphi$ группы $\hat{G}$ на вторую группу характеров $\hat{\hat{G}}$ топологично тогда и только тогда, когда каждая замкнутая подгруппа $H$ в $G$ с линейно дискретной фактор-группой открыта. Теорема двойственности справедлива для групп характеров групп $G \in \mathfrak{B}$. Для примарной п. т. группы $G$ отображение $\varphi$ является топологическим изоморфизмом тогда и только тогда, когда все подгруппы $H$ такие, что все содержащие их подгруппы замкнуты, открыты в $G$. Теорема двойственности справедлива также для примарных групп, удовлетворяющих первой аксиоме счетности.

Указаны связи введенной автором топологии в $\hat{G}$ с топологизацией $\hat{G}$ по Шёнеборну (РЖМат, 1955, 2572). Н. Я. Виленкин

**1093. Плотные вложения локально компактных связных групп. Гото** (Dense imbeddings of locally compact connected groups. Goto Morikuni), Ann. Math., 1955, **61**, № 1, 154—169 (англ.)

Изоморфное, в одну сторону непрерывное отображение $\varphi$ топологической группы $G$ в группу $H$ называется вложением $G$ в $H$. Вложение плотно, если замыкание образа $G^* = \varphi(G)$ группы $G$ в $H$ совпадает с $H$. Вложение замкнуто, если образ $G^*$ замкнут в $H$. С помощью теоремы Ямабе о том, что каждая локально компактная связная группа есть проективный предел последовательности групп Ли, автор распространяет результаты Ван Эста, А. И. Мальцева и свои относительно структуры вложений групп Ли на случай локально компактных связных групп. Основными результатами статьи являются две теоремы:

Теорема 1 (Обобщение теоремы Ван Эста). Пусть $G$ — локально компактная связная группа, группа всех внутренних автоморфизмов которой замкнута в группе всех ее автоморфизмов. Тогда для замкнутости всех вложений $G$ в произвольные локально компактные группы необходима и достаточна компактность центра $G$.

Теорема 3 (Обобщение результатов Мальцева и Гото). Пусть $\varphi$ — плотное вложение произвольной локально компактной связной группы $G$ в локально компактную связную группу $H$ со второй аксиомой счетности. Тогда в $G$ найдется такая однопараметрическая подгруппа $X$, для которой $\varphi(G) \cdot \overline{\varphi(X)} = H$, где черта означает замыкание в $H$.

Статья содержит также примеры и некоторые более детализированные предложения, относящиеся к тем же вопросам. А. И. Мальцев

**1094. Приведенные подгруппы алгебраических групп Ли. Мостов** (Reductive subgroup of algebraic Lie groups. Mostow G. D.), 2-e symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América. Villavicencio-Mendoza, julio 1954. Montevideo, Centro coop., cient., UNESCO América Latina, 1954, 37—38 (англ.)

Каждому утверждению для алгебры Ли отвечает аналогичное утверждение для соответствующей связной группы Ли и наоборот. Однако некоторые из результатов остаются справедливыми и для несвязных групп. В работе дается разложение, с помощью которого можно переносить результаты с алгебраических алгебр Ли на несвязные алгебраические группы Ли. Пусть $N$ — совокупность тех элементов радикала алгебраической группы Ли $G$, все собственные значения которых равны 1. Пусть $M$ — любая максимальная приведенная (т. е. не пересекающаяся с $N$) подгруппа $G$. Тогда $N$ — связный нормальный делитель и $G = MN$ (полупрямое разложение). Максимальные приведенные подгруппы все сопряжены с помощью внутренних автоморфизмов.

Как приложение получается разложение для ассоциативной алгебры, обертывающей алгебраическую алгебру Ли, а также теоремы: 1. Приведенная группа автоморфизмов алгебры Ли оставляет инвариантной максимальную полупростую подалгебру. 2. Приведенная группа автоморфизмов разрешимой алгебры Ли оставляет инвариантной картановскую подалгебру. Доказательства автор обещает поместить в Amer. J. Math. А. В. Сульдин

**1095. О линейных представлениях неполупростых групп Ли с нильпотентным радикалом. Рашевский П. К.**, Докл. АН СССР, 1954, **97**, № 5, 781—783

Пусть $G$ — группа Ли, $S$ — преобразования присоединенной группы, принадлежащие полупростой компоненте $G$, $R$ — радикал соответствующей алгебры Ли, $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n_R)$ — его структурные константы. Рассмотрим агрегат тензоров $V^i$, $V^i_{\alpha_1}$, $V^i_{\alpha_1\alpha_2}$, $\ldots$, $V^i_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$ $(i = 1, 2, \ldots, N; \alpha_k = 1, 2, \ldots, n_R)$. Координаты агрегата связаны условиями $V_{\alpha_1\ldots\alpha_s\alpha_{s+1}\alpha_k} - V_{\alpha_1\ldots\alpha_{s+1}\alpha_s\ldots\alpha_k} = V_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}\beta\alpha_{s+2}\ldots\alpha_k} C^{\beta}_{\alpha_s\alpha_{s+1}}$. Построим представление $G$ в пространстве агрегатов следующим образом. При преобразованиях из $S$ верхние индексы испытывают преобразование из некоторого линейного представления $S$ ($N$ — размерность пространства этого представления), а нижние подвергаются преобразованиям самой $S$. На преобразования из радикала верхние индексы не реагируют. Пусть $a = (a^{\alpha}) \in R$, тогда

инфинитезимальное преобразование $a$ преобразует нижние индексы по формуле

$$V_{\alpha_1\ldots\alpha_k} \to V_{\alpha_1\ldots\alpha_k\alpha_{k+1}}\, a^{\alpha_{k+1}} \quad (k = 0, 1, \ldots, m).$$

Основное утверждение работы следующее: всякое неразложимое унимодулярное линейное представление группы $G$ с нильпотентным радикалом эквивалентно ее представлению в пространстве агрегатов $V$ или в некоторой инвариантной плоскости этого пространства. Имеются также уточнения этого предложения. Доказательства не приводятся. А. В. Сульдин

**1096. Геометрическое исследование одного класса однородных пространств. Титс** (Étude géométrique d'une classe d'espaces homogènes. Tits Jacques), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 6, 466—468 (франц.)

Пусть $G$ — полупростая комплексная связная группа Ли. Выберем произвольное подмножество $\Pi$ системы простых корней $\Sigma\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ соответствующей алгебры Ли. Через $G[\Pi]$ обозначим однородное пространство $G/G(\Pi)$, где $G(\Pi)$ — связная подгруппа, отвечающая подалгебре, порожденной всеми корнями и корневыми векторами $e_\alpha$, соответствующими корням $\alpha = \Sigma_i k_i\alpha_i$; $k_i \geqslant 0$ для всех $\alpha_i \in \Pi$. Пространства вида $G[\Pi]$ называются $R$-пространствами. Пространства $G[\Pi]$ можно охарактеризовать схемой простых корней группы $G$, на которой кружком ● отмечены корни, принадлежащие $\Pi$. Например, схема ●—•—•—• соответствует четырехмерному проективному пространству.

Точками пространства $G(\Pi)$ являются классы смежности $gG(\Pi)$. Две точки пространств $G[\Pi]$ и $G[\Pi']$ называются инцидентными, если они могут быть записаны соответственно в виде $gG(\Pi)$ и $gG(\Pi')$. Совокупность $\tilde{\omega}$ точек пространства $G[\Pi]$, инцидентных с фиксированной точкой пространства $G[\Pi']$, называется $\Pi'$-плоскостью. Вообще говоря, плоскости $\tilde{\omega}$ не определяют однозначно $\Pi'$; кроме того, данной плоскости $\tilde{\omega}$ могут соответствовать много точек пространства $G[\Pi']$. Указано, как можно выбрать $\Pi''$ (оно определяется единственным образом) так, чтобы между точками $G[\Pi'']$ и плоскостями $\tilde{\omega}$ соответствие было взаимно однозначным. $G[\Pi'']$ можно интерпретировать как пространство $\Pi''$-плоскостей пространства $G[\Pi]$.

Если данные $\Pi'$-плоскость $\tilde{\omega}'$ и $\Pi''$-плоскость $\tilde{\omega}''$ пересекаются, то их пересечение есть некоторая $\Pi'''$-плоскость. Указано (в терминах $\Pi$, $\Pi'$, $\Pi''$) необходимое и достаточное условие того, чтобы $\Pi'$-плоскость содержала $\Pi''$-плоскость. Каждая $\Pi'$-плоскость $\tilde{\omega}'$ естественным образом может рассматриваться как однородное пространство (относительно преобразований группы $G$, оставляющих плоскость $\tilde{\omega}'$ инвариантной). Это пространство оказывается $R$-пространством, и его схема может быть получена из схемы пространства $G[\Pi]$ отбрасыванием точек, принадлежащих $\Pi'$. Изложенные свойства $\Pi'$-плоскостей применяются к изучению проективной комплексной плоскости над октавами (РЖМат, 1954, 3249). Доказательства не приведены. Г. И. Кац

**1097. Однородные изотропные и дважды однородные пространства. Титс** (Espaces homogènes et isotropes, et espaces doublement homogènes. Tits Jacques), C. r. Acad. sci. 1954, **239**, № 7, 526—527 (франц.)

Однородное пространство $S = G/H$ называется изотропным, дважды однородным и трижды однородным, если группа преобразований $G$ транзитивна соответственно относительно направлений касательных пространства $S$, пар и троек точек $S$.

Перечисляются все изотропные, дважды однородные и трижды однородные пространства $G/H$, где $G$ — группа Ли. Так, например, если группа $G$ не является вещественной формой особой простой группы Ли, дважды однородное пространство представляет собой либо аффинное, либо проективное пространство, либо овальную квадратичную гиперповерхность. Автор высказывает предположение, что эта теорема остается справедливой и для любых групп Ли $G$. Под проективными пространствами понимаются проективные пространства над вещественными, комплексными числами, кватернионами и проективная плоскость над октавами (РЖМат, 1954, 3249). Определим в данном проективном пространстве $P$ поляритет $\tau$, удовлетворяющий условию эрмитовости. Выбирая по-разному $\tau$, можно обычным путем определить эллиптическое пространство, овальную квадратичную гиперповерхность (абсолют) и гиперболическое пространство. Группы автоморфизмов этих пространств состоят из проективных преобразований пространства $P$, сохраняющих поляритет $\tau$ и рассматриваемых на точках соответствующего пространства. Г. И. Кац

**1098. К теории представлений спинорной группы. Бауэр** (Zur Darstellungstheorie der Spingruppe. Bauer Friedrich L.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 5—6 (нем.)

Через ${}^nO(\Delta)$ ($n = 2\nu$ или $n = 2\nu + 1$) обозначается примитивное представление $n$-мерной ортогональной группы ${}^nO$, имеющее порядок $\rho = 2^\nu$ и картановский вес $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)$. Спинорная группа ${}^\rho\mathrm{Spin}$ локально определяется изоморфизмом ее собственного представления ${}^\rho\mathrm{Spin}\,(1)$ с ${}^nO(\Delta)$. Векторы пространства представления ${}^\rho\mathrm{Spin}\,(1)$ называются ундорами первой ступени. Ундоры $n$-й ступени возникают при рассмотрении представлений ${}^\rho\mathrm{Spin}\,(1)^N\times$. Если $N = 2M$ и $n = 2\nu$, то (неэквивалентные) представления, содержащиеся в ${}^nO(\Delta)^N\times$ и ${}^NO(\Delta)^n\times$, могут быть определенным образом поставлены друг другу в соответствие так, что порядок одного равен кратности, с которой встречается другое, и наоборот. Обертывающие алгебры для ${}^nO(\Delta)^N\times$ и ${}^NO(\Delta)^n\times$ являются друг для друга коммутаторными алгебрами. Существует ряд аналогичных теорем о коммутаторных алгебрах для полупростых групп. Дано описание инвариантов, которые можно образовать из $2N$ ундоров. Число этих инвариантов равно рангу некоторой алгебры $O_N$, связанной с представлением ${}^\rho\mathrm{Spin}\,(1)^N\times$. Н. Я. Виленкин

**1099. Повторные интегралы и показательные гомоморфизмы. Чжэнь Го-цзай** (Iterated integrals and exponential homomorphisms. Chen Kuo-Tsai), Proc. London Math. Soc., 1954, **4**, № 16, 502—512 (англ.)

В $m$-мерном евклидовом пространстве рассматриваются кусочно-гладкие пути (задаваемые с точностью до параллельных переносов). Естественным образом определяется произведение $\alpha\beta$ и обращение $\alpha^{-1}$ путей. Пути $\beta\alpha\alpha^{-1}\gamma$ и $\beta\gamma$ называются эквивалентными. Классы эквивалентных путей образуют группу $\mathfrak{P}$. Для пути $\alpha$, определяемого функциями $x_i = x_i(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, $i = 1, \ldots, m$, вводятся интегралы $I_i(\alpha) = \int_a^b dx_i(t)$ и далее индуктивно $I_{i_1,\ldots,i_p}(\alpha) = \int_a^b I_{i_1,\ldots,i_{p-1}}(\alpha^t)\, dx_{i_p}(t)$, где $\alpha^c$ означает часть пути $\alpha$ от $t = a$ до $t = c$.

Равенство

$$\theta(\alpha) = 1 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_p} I_{i_1,\ldots,i_p}(\alpha)\, X_{i_1}\ldots X_{i_p}$$

определяет мультипликативный гомоморфизм группы $\mathfrak{P}$ в кольцо формальных степенных рядов от некоммутативных переменных $X_1, \ldots, X_m$ с вещественными коэффициентами. Если $\mathfrak{P}$ есть совокупность тех $\alpha$, для

которых в ряде $\theta(\alpha)$ однородные слагаемые степеней $1, \ldots, p-1$ отсутствуют, то группы $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}_{p+1}$, $p \geqslant 1$, изоморфны аддитивной группе конечномерного вещественного векторного пространства. Если $\alpha$ есть прямолинейный путь $x_i = c_i t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $\theta(\alpha) = \exp(c_1 X_1 + \cdots + c_m X_m)$, поэтому $\theta$ называется показательным гомоморфизмом. Высказывается предположение, что $\theta$ — изоморфизм.

Далее в работе обобщается одна конструкция Магнуса для свободных групп (Magnus W., Math. Ann., 1935, 111, № 2, 259—280) на некоторые свободные произведения. Пусть $J$ есть область целостности характеристики 0; $K$ — расширение области $J$, полученное присоединением к $J$ рациональных чисел; $H = H^{(1)} * \cdots * H^{(m)}$ — свободное произведение групп $H^{(i)}$, каждая из которых есть подгруппа аддитивной группы области $J$. Пусть $\Lambda$ — кольцо формальных степенных рядов от некоммутативных переменных $X_1, \ldots, X_m$ с коэффициентами из $K$; $P_i = 1 + \rho_{i1} X_i + \rho_{i2} X_i^2 + \ldots$, $\rho_{ij} \in K$, $\rho_{i1} \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$; $P_i^{\lambda}$, $\lambda \in H^{(i)}$, определяется с помощью биномиального ряда. Отображение $\lambda \to P_i^{\lambda}$, $\lambda \in H^{(i)}$ однозначно индуцирует изоморфизм $\Theta$ (называемый показательным) группы $H$ в мультипликативную систему кольца $\Lambda$. Нормальные делители $H_p$, состоящие из тех $u \in H$, для которых ряд $\Theta(u)$ не содержит слагаемых степеней $1, \ldots, p-1$, не зависят от выбора $P_i$. Пересечение всех $H_p$ состоит из 1, фактор-группы $H_p / H_{p+1}$ — абелевы. Если $H$ — свободная группа, то группы $H_p$ совпадают с группами нижнего центрального ряда.

З. И. Боревич

**1100. О характеристике групп с помощью некоторых свойств их отношений порядка. Тьеррен** (Sur la caractérisation des groupes par certaines propriétés de leurs relations d'ordre. Thierrin Gabriel), C.r. Acad. sci., 1954, **239**, № 22, 1453—1455 (франц.)

Частичное отношение порядка $\omega$ в полугруппе $S$ называется регулярным справа, если из $a \leqslant b$ следует для любого $x$, что $ax \leqslant bx$, $\omega$ называется сократимым справа, если из $ax \leqslant bx$ следует $a \leqslant b$. Аналогично определяется для отношения $\omega$ регулярность слева и сократимость слева. Доказываются теоремы: 1) Для того чтобы полугруппа с законом правой и левой сократимости была группой, необходимо и достаточно, чтобы ее частичные отношения порядка, регулярные справа, были сократимы справа. 2) Для того чтобы полугруппа с законом правой и левой сократимости была группой, необходимо и достаточно, чтобы ее частичные отношения порядка, сократимые справа, были регулярны справа. Из теоремы 1) как следствие вытекает: полугруппа тогда и только тогда будет группой, когда все ее частичные отношения порядка, регулярные справа будут сократимы справа и все ее отношения порядка, регулярные слева, будут сократимы слева. При доказательстве теоремы 1) используется понятие правого вычета элемента $m$ (Dubreil P., Mém. Acad. sci., 1941, 63, 1—52). В работе имеются опечатки.

А. Е. Либер

**1101. О существовании линейного упорядочения в группе. Лось** (On the existence of linear order in a group. Łoś J.), Bull. Acad. polon. sci., Cl. 3, 1954, 2, № 1, 21—23 (англ.)

**О существовании линейного упорядочения в группе. Лось**, Бюл. Польской АН, 1954, Отд. 3, **2**, № 1, 19—21

В одной из своих предыдущих работ (высланной в редакцию журнала Fundam. math.) автор доказал общую теорему, из которой следует, что необходимое и достаточное условие для того, чтобы группу можно было упорядочить, выражается как конъюнкция бесконечной последовательности общих предложений $\alpha_i$ (т. е. предложений, начинающихся с общих кванторов, после которых следует выражение, не содержащее кванторов и записанное лишь с помощью переменных, пробегающих элементы группы, и символов исчисления высказываний, знака тождества и символа групповой операции). В настоящей работе автор эффективно строит последовательность $\alpha_i$, пользуясь следующей леммой: группу $G$ можно упорядочить тогда, и только тогда, когда для любых ее элементов $a_1, \ldots, a_n$ существуют такие числа $E_1, \ldots, E_n$, равные $\pm 1$, что наименьшая инвариантная в $G$ полугруппа, порождаемая элементами $a_1^{E_1}, \ldots, a_n^{E_n}$, не содержит единицы группы. (Полугруппой, инвариантной в $G$, автор называет такое множество $H \subset G$, что из $a, b \in H$ следует $ab \in H$ и из $a \in H$, $x \in G$ следует $xax^{-1} \in H$.

A. Mostowski

**1102. О нескольких свойствах некоторых классов полугрупп. Тьеррен** (Sur quelques propriétés de certaines classes de demi-groupes. Thierrin Gabriel), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 21, 1335—1337 (франц.)

Указаны необходимые и достаточные условия того, что данная полугруппа есть гомогруппа (РЖМат, 1953, 117). Далее выделяются полугруппы, обладающие свойством: а) Для любых элементов $a$, $b$ существуют такие целые положительные числа $r$, $s$, $t$, что $(ab)^r = a^s b^t = b^t a^s$. Для такой полугруппы показано, что она является объединением непересекающихся полугрупп без собственных простых идеалов. Такое же строение устанавливается для конечных полугрупп независимо от выполнения условия а). Дано условие того, что абелева группа не имеет собственных простых идеалов, а также условия, при которых полугруппа без собственных простых идеалов есть группа.

А. Е. Либер

**1103. К теории хаусдорфовых бикомпактных полугрупп. Шварц Ш.**, Чехосл. матем. ж., 1955, **5**, № 1, 1—23 (резюме англ.)

Пусть $S$ есть хаусдорфово бикомпактное пространство, для элементов которого определено непрерывное ассоциативное умножение. Если $e$ — идемпотент, то совокупность всех $a \in S$, для которых $e \in \overline{\{a, a^2, a^3, \ldots\}}$, обозначается через $K_e$. Для различных идемпотентов $e_1$ и $e_2$ множества $K_{e_1}$ и $K_{e_2}$ не имеют общих элементов. Доказывается, что $S$ всегда обладает идемпотентными элементами и равна сумме всех $K_e$. Если $S$ коммутативна, то все $K_e$ являются полугруппами.

Если $a \in K_e$ и $ae = a$, то $a$ называется регулярным элементом. Все элементы $S$ являются регулярными в том и только в том случае, когда $S$ есть сумма попарно не пересекающихся групп. Если при этом $S$ связна и имеет лишь конечное количество идемпотентов, то $S$ является группой. Идемпотент $e$ называется максимальным, если из $xe = ex = e$, где $x$ — некоторый идемпотент, всегда следует $x = e$; $e$ называется примитивным, если из $xe = ex = x$ следует $x = e$.

Если $e$ — максимальный идемпотент, то $K_e$ замкнуто. Если пересечение всех $\overline{K}_e$ непусто, то $S$ обладает единственным максимальным идемпотентом. Если все идемпотенты $S$ примитивны, то все $K_e$ замкнуты. Если для некоторого идемпотента $e$ $\overline{K}_e = S$, то такой идемпотент единственный, он примитивен, причем $S$ не имеет других примитивных идемпотентов; если при этом $S$ имеет лишь конечное число идемпотентов, то $K_e$ открыто.

Е. С. Ляпин

**1104. О разложении коммутативных полугрупп. Тамура, Кимура** (On decompositions of a commutative semigroup. Tamura Takayuki, Kimura Naoki), Kodai Math. Sem. Repts, 1954, № 4, 109—112 (англ.)

Пусть $S$ — полугруппа. Разложением $S$ в полуструктуру полугрупп называется представление $S$ в виде $S=\bigcup_\nu S_\nu$, где $S_\nu$ — полугруппы, не имеющие попарно общих элементов, причем и $S_\alpha S_\beta$ и $S_\beta S_\alpha$ содержатся в одной и той же $S_\gamma$. Доказывается, что существует наиболее дробное разложение $S$ в полуструктуру полугрупп. Для коммутативной $S$ описывается строение такого разложения. Это делается с помощью рассмотрения следующего квазиупорядочения в $S$: $a\geqslant b$ $(a, b\in S)$, если существуют такое натуральное $m$ и такой $x\in S$, что $a^m=bx$. Если одновременно $a\geqslant b$ и $a\leqslant b$, то $a\sim b$. Разложение на классы взаимно эквивалентных элементов и приводит к указанному разложению $S$. Е. С. Ляпин

**1105. О компактных полугруппах с единственным идемпотентом. Тамура** (On compact one-idempotent semigroups. Tamura Takayuki), Kodai Math. Sem. Repts, 1954, № 1, 17—21 (англ.)

Пусть $S$ есть компактная полугруппа, т. е. компактное топологическое пространство, для элементов которого определено непрерывное ассоциативное умножение. Доказывается, что среди элементов $S$ обязательно есть идемпотенты. Если $S$ обладает лишь единственным идемпотентом $e$, то для $G=Se$ выполнено: 1) $G$ компактно, 2) $G$ есть наибольшая группа в $S$, 3) $G$ есть наименьший идеал в $S$, 4) $G=eS$, 5) $ex=xe$ для всех $x\in S$, 6) отображение $S$ в себя $x\to xe$ является гомоморфизмом.

Если $S$ имеет нулевой элемент $e$ и не имеет других идемпотентов, и только в этом случае, ни одно из уравнений $ux=x$, $xu=x$, $uxv=x$ $(u, v\in S)$ не имеет других решений в $S$, кроме $x=e$. Пересечение всех $S^n$ $(n=1, 2, 3,\ldots)$ в этом случае равно $e$. Для произвольной компактной регулярной полугруппы $S$, обладающей единственным идемпотентом, указанное пересечение равно $G$. В частности, из $S^2=S$ в этом случае следует, что $S$ есть группа. Е. С. Ляпин

**1106. Связки полугрупп. Клиффорд** (Bands of semigroups. Clifford A. H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 3, 499—504 (англ.)

Пусть $S$ есть полугруппа и $S=\bigcup_\nu S_\nu$, где $S_\nu$ суть полугруппы, принадлежащие некоторому классу полугрупп $\Omega$, причем различные $S_\nu$ не имеют попарно общих элементов. Если $S_\alpha S_\beta$ (т. е. множество элементов вида $xy$, где $x\in S_\alpha$, $y\in S_\beta$) всегда целиком содержится в одной из $S_\gamma$, то $S$ называется связкой полугрупп класса $\Omega$. Если при этом и $S_\alpha S_\beta$ и $S_\beta S_\alpha$ всегда содержатся в одной и той же $S_\gamma$, то $S$ называется полуструктурой полугрупп класса $\Omega$. Частным случаем связки является матрица полугрупп класса $\Omega$, когда $S_\nu$ занумерованы двойными индексами, причем $S_{\alpha\beta}S_{\lambda\mu}\subset S_{\alpha\mu}$. Изучаются различные свойства указанных конструкций, в частности получены следующие результаты.

Связка полугрупп класса $\Omega$ есть полуструктура полугрупп, каждая из которых есть матрица полугрупп класса $\Omega$. $S$ является связкой групп тогда и только тогда, когда: 1) $a\in Sa^2\cap a^2S$ для любого $a\in S$, 2) $Sba=Sba^2$, $abS=a^2bS$ для любых $a, b\in S$. Для того чтобы $S$ была полуструктурой групп, условие 2) заменяется условием коммутирования идемпотентных элементов. Особо рассматривается случай, когда все $S_\nu$ состоят каждая из одного элемента. Рассматривается также случай, когда $\Omega$ есть класс простых (т. е. не имеющих нетривиальных идеалов) полугрупп или класс вполне простых полугрупп (т. е. простых полугрупп с некоторым добавочным условием относительно идемпотентов). Матрица простых (вполне простых) полугрупп сама есть простая (вполне простая) полугруппа.

Указывается, что рассуждениями, сходными проведенным в работе, может быть доказана теорема, полученная ранее Олафом Андерсеном (в неопубликованной работе) и позже Карузо: для того чтобы $S$ была полуструктурой простых полугрупп, необходимо и достаточно, чтобы $a\in Sa^2S$ для всех $a\in S$. Е. С. Ляпин

**1107. Полугруппы, во всех представлениях которых операторы имеют неподвижные точки. II. Ляпин Е. С.**, Матем. сб., 1955, 36(78), № 1, 111—124

В ранее опубликованной части I работы (РЖМат, 1955, 1114) автор определил право-уничтожающее произведение $\mathfrak{A}=\mathfrak{N}_\varphi\times\mathfrak{M}$ двух полугрупп как полугруппу пар $[b, \varphi(c)]$ и элементов $c$, где $b\in\mathfrak{N}$, $c\in\mathfrak{M}$, а $\varphi$ — фиксированный гомоморфизм, отображающий $\mathfrak{M}$ на полугруппу $\mathfrak{M}$, причем выполняются следующие правила умножения:

$$[b, \varphi(c)]\,c'=[b, \varphi(cc')],\quad c'\,[b, \varphi(c)]=[b, \varphi(c)],$$

$$[b, \varphi(c)]\,[b', \varphi(c')]=[bb', \varphi(c')].$$

Там же были введены класс полугрупп $P$, состоящий из полугрупп, во всех представлениях которых каждый оператор имеет неподвижную точку, и класс полугрупп $P_0$, базисный для класса $P$. В настоящей части II работы исследования продолжаются на основе введенных новых понятий.

Говорят, что полугруппа $\mathfrak{A}$ обладает ядром $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{M}$ соответственно, если она циклическая или разлагается в право-уничтожающее произведение $\mathfrak{A}=\mathfrak{N}_\varphi\times\mathfrak{M}$ с циклическим множителем $\mathfrak{M}$. Две полугруппы с ядрами называются сопряженными, если ядро каждой из них содержится в подполугруппе, изоморфной другой полугруппе. Два класса полугрупп называются сопряженными, если все их полугруппы обладают ядрами, и каждая полугруппа одного класса сопряжена с какой-либо полугруппой другого класса, причем две полугруппы одного класса, сопряженные с одной и той же полугруппой другого класса, изоморфны между собой. Указывается метод нахождения всех полугрупп, сопряженных с полугруппами класса $P_0$. Класс $P_0$ является также самосопряженным. Классы полугрупп, сопряженные с классами $P_0$, и только они являются базисными классами для класса $P$. П. Г. Конторович

**1108. Максимальные идеалы в компактных полугруппах. Кох, Уоллес** (Maximal ideals in compact semigroups. Koch R. J., Wallace A. D.), Duke Math. J., 1954, **21**, № 4, 681—685 (англ.)

Пусть $S$ — моб, т. е. хаусдорфово топологическое пространство, в котором определено непрерывное ассоциативное умножение элементов. Если $A, B\subset S$, то $AB$ означает множество элементов, представимых в виде $ab$ $(a\in A,\ b\in B)$. Непустое подмножество $A$ из $S$ называется идеалом $S$, если $AS$, $SA\subset A$. Если $A\neq S$, то идеал $A$ называется собственным. Пусть $S$ компактно (бикомпактно). Доказывается ряд свойств $S$, в том числе следующие:

Если $A$ есть собственный идеал $S$, то $A$ содержится в некотором максимальном собственном идеале $S$. При этом все максимальные собственные идеалы $S$ являются открытыми множествами.

Если $J$ — некоторый максимальный собственный идеал $S$, содержащий все идемпотенты $S$, то $S^2\subset J$.

Если $S$ имеет лишь один идемпотент и $S^2=S$, то $S$ является топологической группой.

Если $S$ обладает единичным элементом $u$ (т. е. $ux = xu = x$ для всякого $x \in S$), то $S = H \cup J$, где $H$ есть группа, $J$ есть идеал $S$ (или пустое множество), причем $H$ и $J$ не имеют общих элементов. Е. С. Ляпин

**1109. О метрических группоидах и их пополнениях. Конклинг, Эллис** (On metric groupoids and their completions. Conkling Randall, Ellis David), Portugaliae Math., 1953, **12**, 99—103 (англ.)

Терминология: группоид (Bruck R. H., Trans. Amer. Math. Soc., 1946, **60**, 245—354; Math. Revs, 1947, 8, 134), равномерно метрический группоид: метрический группоид, где групповая операция (равномерно) непрерывна по обеим переменным; непрерывность операции в группоиде отдельно по каждой переменной обозначена приставкой «псевдо». Авторы доказывают, что равномерно метрический группоид $G$ можно плотно, изометрично и изоморфно вложить в равномерно метрический группоид $C$, полный относительно своей метрики. $C$ коммутативен тогда и только тогда, когда $G$ коммутативен, и содержит единицу тогда и только тогда, когда $G$ содержит единицу. Если $G$ равномерно псевдометрический, он является топологической группой (см., например, Banach, Studia math., 1931, **3**, 101—113, Gelbaum, Kalisch and Olmsted, Proc. Amer. Math. Soc., 1951, **2**, 807—821; Math. Revs, 1952, **13**, 206; Koshiba, Osaka Math. J., 1951, **3**, 49—53; Math. Revs, 1951, **12**, 673; Montgomery, Bull. Amer. Math. Soc., 1936, **42**, 879—882). Таким образом равномерно метрические группы являются топологическими группами и пополнимы до равномерно метрических топологических групп. Нормированные абелевы группы $G$ такие, что $|ma| = |m||a|$ для всех целых $m$ и всех $a \in G$, могут быть включены в банахово пространство включением $G$ в нормированную группу с делением (это преобразует ее в рациональную нормированную векторную группу), а затем пополнением. Доказательства прямые. G. K. Kalisch

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 8, 684.

**1110. Об обобщении групп. Хасимото Х.** (On a generalization of groups. Hashimoto Hiroshi), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 7, 548—549 (англ.)

Рассматривается мультипликативная ассоциативная система $G$ с оператором $\theta$, удовлетворяющим условиям: $(a^\theta a)b = b$, $(ab)^\theta = b^\theta a^\theta$. Доказывается, что множество $G^\theta$ является группой, и система $G$ разбивается на классы $aC(e)$, где $C(e)$ — множество всех идемпотентов, причем это множество является множеством всех левых единиц системы. Каждый элемент системы $G$ единственным образом представим в виде произведения элемента группы $G^\theta$ и идемпотента. Указываются необходимые и достаточные условия того, что $G$ — группа, в частности $a = a^{\theta\theta}$. Г. Н. Нефедьев

**1111 Д. Разрешимые и пильпотентные группы матриц. Супруненко Д.** Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1955

**1112 Д. О построении групп, порождаемых перестановочными группами. Петерсен И. Ф.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Тартуск. ун-т, Тарту, 1955

## ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

**1113. Теорема Веддербарна. Гоин** (The Wedderburn theorem. Goheen Harry), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 1, 60—62 (англ.)

Приводится новое теоретико-групповое доказательство теоремы Веддербарна о конечных телах. Е. Г. Шульгейфер

**1114. Обобщение теоремы Редеи. Фрёлих** (The generalization of a theorem of L. Rédei's. Fröhlich A.), Quart. J. Math., 1954, 5, № 18, 130—140 (англ.)

Пусть $K$ — циклическое поле степени $l^\alpha$ ($l$ — простое число) над полем рациональных чисел. Пусть $A$ — мультипликативная группа всех идеалов $K$, $I$ — группа всех главных идеалов, порожденных вполне положительными числами $K$, $\sigma$ — образующая группы Галуа $\Gamma(K)$ поля $K$, $\Lambda$ — подполе $K$, $A_\Lambda$, $I_\Lambda$ — обозначают соответственно группы идеалов и главных идеалов $\Lambda$. Групповое кольцо $\Gamma(\Lambda)$ над полем рациональных чисел считается областью операторов $A_\Lambda$. Изучается структура мультипликативной фактор-группы $A/A^{(1-\sigma)^2}I$. Строятся ее инварианты, исходя из инвариантов групп $A/A^{(1-\sigma)}I$, $A^{(1-\sigma)}I/A^{(1-\sigma)^2}I$. Относительно последних доказывается следующее:

1. Имеют место разложения в прямые произведения $A/A^{(1-\sigma)^r}I \simeq \prod_\Lambda A_\Lambda/A_\Lambda^{(1-\sigma)^r}I_\Lambda$ $(r>0)$, $A^{(1-\sigma)^s}I/A^{(1-\sigma)^r}I \simeq \simeq \prod_\Lambda A_\Lambda^{(1-\sigma)^s}I_\Lambda/A_\Lambda^{(1-\sigma)^r}I_\Lambda$ $(r>s>0)$, где $\Lambda$ пробегает все максимальные подполя $K$, степень которых есть степень простого числа.

2. Пусть $f(K)$ — ведущий дивизор $K$, $p_i (i=1, 2, \ldots, m)$ — различные простые делители $f(K)$, $l^{\nu_i}$ — порядок ветвления $p_i$ в $K$. Тогда инвариантами группы $A/A^{(1-\sigma)}I$ будут $(l^{\nu_2}, \ldots, l^{\nu_m})$.

3. Инварианты группы $A^{(1-\sigma)}I/A^{(1-\sigma)^2}I$ определяются элементарными делителями матрицы $T = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$, где $U$, $V$ — квадратные матрицы порядка $m$, элементы которых зависят от $l^{\nu_i}$.

Из последнего предложения для квадратичного поля $K$ вытекает теорема Редеи (Rédei L., J. reine und angew. Math., 1934, **171**, 55—61): число инвариантов $A/I$, делящихся на 4, равно $m - 1 - r$ ($r$ — ранг $U$).

4. Обобщение теоремы Инаба (Inaba E., J. Fac. Sci., Imp. Univ. Tokyo, 1940, **4**, № 2, 61—115): пусть $d_l$ — число инвариантов мультипликативной группы $A/I$, делящихся на $l$; тогда $2(m-1) - r \leqslant d_l \leqslant (l-1)(m-1) - (l-2)r$.

В заключение намечается общий подход к изучению структурных свойств мультипликативных групп $A/A^{(1-\sigma)}I$, $A^{(1-\sigma)}I/A^{(1-\sigma)^2}I$ путем сопоставления им некоторых изоморфных групп характеров Дирихле.

Б. М. Уразбаев

**1115. Заметка о башне полей классов. Фрёлих** (A note on the class field tower. Fröhlich A.), Quart. J. Math., 1954, 5, № 18, 141—144 (англ.)

Пусть $K$ — заданное циклическое поле простой степени $l$ над полем рациональных чисел. Строится по индукции последовательность полей

$$K_0 = K, K_1, K_2, \ldots, K_n, K_{n+1}, \ldots \qquad (1)$$

где $K_{n+1}$ есть максимальное неразветвленное поле классов над $K_n$ с относительной степенью, представляющей степень $l$. С последовательностью (1) связана известная проблема Фуртвенглера (Klassenkörperturmprobleme), согласно которой для заданного поля $K$ требуется узнать, состоит ли последовательность (1) из конечного или бесконечного числа различных полей классов. В настоящее время проблема решена для самых простейших случаев. Если обозначить через $m = m(K)$ число различных простых делителей дискриминанта $K$, то

доказано, что: а) $K_1 = K_0$, если $m \leqslant 1$; в) $K_1 \neq K_0$, если $m > 1$.

В статье доказывается, что при $m > 3$ последовательность (1) содержит не менее трех полей, т. е. $K_2 \neq K_1$. При доказательстве используются результаты предыдущей работы автора (реф. 1114). Если же $m = 2,3$, то всегда можно построить циклическое поле $K$ степени $l$, дискриминант которого содержит $m$ простых множителей, такое, что $K_1 = K_2$. Б. М. Уразбаев

**1116. Теорема существования в алгебраической теории обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений.** Эпстейн (An existence theorem in the algebraic study of homogeneous linear ordinary differential equations. Epstein Marvin P.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 1, 33—41 (англ.)

Пусть $F$ есть дифференциальное поле нулевой характеристики с полем констант $C$. Известно (Kolchin E. R., Bull. Amer. Math. Soc., 1948, 54, 927—932), что любой линейный однородный дифференциальный полином $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y$ $(n \geqslant 1, p_1 \ldots p_n \in F)$ обладает системой корней $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, удовлетворяющей следующим двум условиям: 1) $\eta_1, \ldots, \eta_n$ линейно независимы над $C$; 2) дифференциальное поле, полученное присоединением к $F$ всех $\eta_i$ и производных от них, обладает тем свойством, что его поле констант $D$ является конечным алгебраическим расширением поля $C$.

В реферируемой работе доказывается, что система корней $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ может быть выбрана так, чтобы $D$ являлось нормальным расширением поля $C$. В. М. Глушков

**1117. Дифференциальное уравнение Риккати в полях характеристики 2.** Егер (Die Piccatische Differentialgleichung in Körpern der Charakteristik 2. Jaeger Arno), Arch. Math., 1954, 5, № 4—6, 423—428 (нем.)

Пусть $D$ есть регулярное дифференцирование (Jaeger A., Monatsh. Math., 1952, 56, 181—219) в каком-либо поле $K$ характеристики $p$, $a \neq 0$, $b$, $c$ — фиксированные элементы этого поля. Обозначим через $R(y)$ дифференциальный полином $Dy + ay^2 + by + c$, а через $P(y)$ дифференциальный полином $Dy + by$. Известно (РЖМат, 1954, 2022), что при $p > 2$ уравнение Риккати $R(y) = 0$ всегда разрешимо в некотором квадратичном $D$-допустимом расширении поля $K$. В реферируемой работе изучается вопрос о существовании решений уравнения $R(y) = 0$ при $p = 2$. Оказывается, что:

1. При $P(b) \neq 0$ существует точно два различных решения, они удовлетворяют уравнению $P(a)y^2 + P(b)y + P(c) = 0$.

2. При $P(b) = 0$, $P(a) \neq 0$ либо вовсе не имеется решений, либо существует единственное решение, удовлетворяющее уравнению $P(a)y^2 + P(c) = 0$. Даются необходимые и достаточные условия существования решения в этом случае.

3. При $P(b) = P(a) = P(c) = 0$ существует бесконечно много решений. Два частных решения удовлетворяют уравнению $axy^2 + y + cx = 0$, если $b = 0$, и уравнению $ay^2 + by + c = 0$, если $b \neq 0$. Решения соответствующего однородного уравнения Риккати $(c = 0)$ даются формулой $y = (ax + k)^{-1}$, если $b = 0$, и $y = b/(xDa + k)$, если $b \neq 0$ $(k$ — произвольная $D$-константа из $K)$. Любое решение есть сумма частного решения и решения соответствующего однородного уравнения.

4. При $P(b) = P(a) = 0$, $P(c) \neq 0$ решений не существует. В. М. Глушков

**1118. О теории размерности колец.** Зейденберг (On the dimension theory of rings. Seidenberg A.), Pacif J. Math., 1954, 4, № 4, 603—614 (англ.)

Уточняются и усиливаются результаты предыдущей статьи автора (РЖМат, 1955, 1679). Кольцо $O$ называется кольцом типа $(n, m)$, если $O$ имеет размерность $n$, а кольцо многочленов $O[x]$ — размерность $m$. Доказываются следующие предложения:

1. Пусть область целостности $O$ целозамкнута и имеет тип $(n, m)$, $K$ — поле частных для $O$, а $K'$ — собственное расширение $K$, в котором поле $K$ алгебраически замкнуто. Пусть далее $\Sigma$ — поле с дискретной оценкой ранга 1, имеющее $K'$ своим полем вычетов. В таком случае область целостности $O^*$, состоящая из элементов поля $\Sigma$, вычеты которых принадлежат $O$, также целозамкнута и имеет тип $(n+1, m+2)$.

2. При тех же обозначениях, что и в 1, но при условии $K' = K$, область целостности $O^*$ целозамкнута и типа $(n+1, m+1)$.

3. Для любых натуральных чисел $n$ и $m$, удовлетворяющих соотношению $n + 1 \leqslant m \leqslant 2n + 1$, существуют целозамкнутые кольца типа $(n, m)$.

4. Если $O$ — любая область целостности размерности 1, то кольцо многочленов $O[x_1, \ldots, x_n]$ имеет размерность $\leqslant 2n + 1$.

5. Если $O$ — область целостности типа (1,2), то размерность кольца многочленов $O[x_1, \ldots, x_n]$ точно равна $n + 1$.

6. При том же условии, что и в 5, размерность расширения кольца $O$, имеющего конечное число образующих, не превосходит степени трансцендентности этого расширения, увеличенной на единицу.

7. Если в 6 дополнительно потребовать, чтобы пересечение отличных от нуля простых идеалов из $O$ равнялось нулю, то размерность любого расширения кольца $O$, имеющего конечное число образующих, точно равна увеличенной на единицу степени трансцендентности этого расширения. А. И. Узков

**1119. Замечание к теореме Гильберта о корнях.** Фландерс (A remark on Hilbert's Nullstellensatz. Flanders Harley), J. Math. Soc. Japan, 1954, 6, № 2, 160—161 (англ.)

Доказывается следующее предложение, использованное Зарисским в его доказательстве теоремы Гильберта о корнях: Если $k$ и $K$ — поля, причем поле $K$, рассматриваемое как кольцо, имеет над $k$ конечное число образующих, то $K$ есть конечное алгебраическое расширение поля $k$. Автор указывает, что, кроме доказательства Зарисского, имеются еще два доказательства этого предложения. А. И. Узков

**1120. Замечание об оценках, связанных с локальной областью целостности.** Рис (A note on valuations associated with a local domain. Rees D.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 2, 252—253 (англ.)

Относительно локальной равнохарактеристической области целостности $Q$ с максимальным идеалом $m$ доказываются следующие две теоремы:

1. Пусть $a$ — произвольный идеал кольца $Q$. Тогда пересечение всех целозамкнутых $m$-примарных идеалов кольца $Q$, содержащих $a$, совпадает с целозамыканием $\bar{a}$ в $Q$ идеала $a$.

2. Если $S$ — множество всех оценок, определенных в поле частных $F$ кольца $Q$ и связанных с $Q$, то пересечение колец оценок, принадлежащих оценкам из $S$, совпадает с целозамыканием в $F$ кольца $Q$. (Кольцом оценки, принадлежащим данной оценке поля $F$, называется подкольцо поля $F$, состоящее из всех элементов, оценка от которых неотрицательна.) Е. Г. Шульгейфер

**1121. Исправление моей статьи «О структуре полных локальных колец».** Нагата (Corrections to my paper «On the structure of complete local rings». Nagata Masayoshi), Nagoya Math. J., 1953, 5, Febr., 145—147 (англ.)

Исправляется ошибка, на которую указал автору Коэн (Math. Revs, 1952, **13**, 7).

1122. **Простое доказательство структурной теоремы Веддербарна — Артина.** Селе (Simple proof of the Wedderburn-Artin structure theorem. Szele T.), Acta math. Acad. sci. hung., 1954, **5**, № 1—2, 101—107 (англ.; резюме русс.)

Основываясь на теореме Джекобсона о плотности неприводимых колец эндоморфизмов, автор дает простое доказательство известной теоремы Веддербарна — Артина о полупростых кольцах: кольцо, не содержащее нильпотентных правых идеалов и удовлетворяющее условию минимальности для правых идеалов, изоморфно прямой сумме конечного числа полных матричных колец над телами.

Приводится также и очень прозрачное доказательство самой теоремы Джекобсона. В. М. Курочкин

1123. **Алгебра, определяемая бинарной кубической формой.** Херема (An algebra determined by a binary cubic form. Heerema Nickolas), Duke Math. J., 1954, **21**, № 3, 423—443 (англ.)

Пусть $F$ — поле более чем с двумя элементами, $a$, $b$, $c$, $d$ — фиксированные элементы этого поля (не обязательно различные). Рассматривается ассоциативная алгебра $A$ над $F$, порожденная величинами $R$ и $S$, удовлетворяющими тождественному соотношению $(Rx+Sy)^3 \equiv ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$ для всех значений переменных $x$ и $y$ из $F$. Доказывается, что алгебра $A$ имеет бесконечную размерность над $F$, а любой ее собственный гомоморфный образ уже конечномерен.

Если поле $F$ расширено подходящим образом, то с помощью невырожденного линейного преобразования переменных $x$ и $y$ основная кубическая форма $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$ может быть преобразована в одну из следующих четырех стандартных форм: $k(x^2y+y^2x)$, $kx^2y$, $kx^3$, $0$ $(k\neq 0)$.

В первом случае центр $Z$ алгебры $A$ изоморфен $F[t_1, t_2]/(t_1^3+t_2^3+k^2t_2)$, где $F[t_1, t_2]$ — алгебра полиномов от двух коммутирующих переменных $t_1$ и $t_2$, а $(t_1^3+t_2^3+k^2t_2)$ — ее главный идеал, порожденный элементом, стоящим в скобках. В остальных случаях (при условии $3\neq 0$) $Z\cong F[t_1, t_2]/(t_1^3+t_2^3)$. Далее $Z$ содержит подалгебру $B$, изоморфную алгебре полиномов $F[t]$ и в случае, когда $2\neq 0$, имеет базис из 18 элементов над алгеброй $B$, рассматриваемой как область операторов. В. М. Глушков

1124. **Теорема Ферма для алгебр.** Уокер (Fermat's theorem for algebras. Walker Gordon L.), Pacif. J. Math., 1954, **4**, № 2, 317—320 (англ.)

Пусть $A$ — ассоциативная алгебра над полем $F$, $\delta(A)$ — совокупность многочленов $f(x)\in F[x]$ таких, что $f(a)=0$ при любом $a\in A$. Доказываются теоремы:

1) Если $A=A_1\oplus A_2\oplus\ldots\oplus A_k$, где $A_i$ — алгебра всех матриц порядка $m_i$ с элементами из $GF(p^n)$, $m_1\leqslant m_2\leqslant\ldots\leqslant m_k$, то $\delta(A)$ есть главный идеал, порожденный многочленом

$$f(m_k, p^n, x)=(x^{p^n}-x)(x^{p^{2n}}-x)\ldots(x^{p^{m_k n}}-x).$$

2) Если $A$ — полупростая алгебра над полем $F$ характеристики $p$, и ее простые составляющие имеют ранги $m_1^2, \ldots, m_k^2$ над своими центрами $GF(p^{n_1}), \ldots, GF(p^{n_k})$, соответственно, то $\delta(A)$ есть главный идеал, порожденный общим наименьшим кратным (о. н. к.) многочленов $f(m_1, p^{n_1}, x), \ldots, f(m_k, p^{n_k}, x)$.

3) Если $A$ — алгебра (конечного ранга) над полем $F$, $N$ — ее радикал, $\delta(A/N)=(f)$, $f\in F[x]$ и $\delta(N)=(x^r)$, то $(g_1)\supseteq\delta(A)\supseteq(g_2)$, где $g_1$ — о. н. к. многочленов $x^r$ и $f(x)$, а $g_2=[f(x)]^r$. А. И. Ширшов

1125. **О полугрупповых алгебрах.** Манн (On semigroup algebras. Munn W. D.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, **51**, № 1, 1—15 (англ.)

Согласно теореме Машке, всякое представление конечной группы $\mathfrak{G}$ матрицами с элементами из поля $\mathfrak{F}$, характеристика которого не делит порядок $\mathfrak{G}$, вполне приводимо. Автор рассматривает вопрос, какова структура конечных полугрупп (ассоциативных систем) $S$, любое представление которых с элементами из данного поля $\mathfrak{F}$ вполне приводимо.

Для формулировки основных результатов введем, следуя автору, такие определения. Полугруппа $S$ называется нуль-полугруппой, если произведение любых двух элементов $S$ равно нулю. $S$ называется простой, если она не содержит идеалов, отличных от $S$ и от нуля, и если в то же время $S$ не есть нуль-полугруппа порядка 2. Убывающая цепочка идеалов $S=S_1\supset S_2\supset\ldots\supset S_n\supset S_{n+1}=\phi$ называется главным рядом $S$, если между соседними идеалами нельзя вставить промежуточного. Фактор-полугруппы $S_i/S_{i+1}$ называются главными факторами $S$. Полугруппа $S$ называется полупростой, если она обладает главным рядом, все факторы которого просты. Известно, что каждая простая полугруппа $S$ изоморфна некоторой регулярной матричной полугруппе $S_{mn}[\mathfrak{G}, P]$ над группой $\mathfrak{G}$. Элементами $S_{mn}[\mathfrak{G}, P]$ являются $m\times n$-матрицы $(x)_{ij}$, где $x_{ij}=x\in\mathfrak{G}$, $x_{\alpha,\beta}=0$ $(\alpha,\beta)\neq(i,j)$, а закон умножения $\circ$ в $S_{mn}[\mathfrak{G},P]$ дается формулой $(x)_{ij}\circ(y)_{rs}=(x)_{ij}P(y)_{rs}=(xp_{jr}y)_{is}$, где $P$ — заранее данная $n\times m$-матрица нулей или элементов $\mathfrak{G}$. По аналогии с этой конструкцией автор для произвольной алгебры $\mathfrak{A}$ над $\mathfrak{F}$ и фиксированной $m\times n$-матрицы $P$ над $\mathfrak{A}$ вводит алгебру $m\times n$-матриц $M_{mn}[\mathfrak{A}, P]$ над $\mathfrak{A}$, в которой сложение и умножение на элементы $\mathfrak{F}$ производятся по обычным правилам, а в качестве умножения берется операция $\circ$, определяемая формулой $A\circ B=APB$. Доказывается, что $M_{mn}[\mathfrak{A}, P]$ полупроста тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ полупроста, $m=n$ и матрица $P$ обратима в $\mathfrak{A}_n$. Связь со сформулированным выше основным вопросом очевидна, так как полная приводимость всех представлений $S$ равносильна полупростоте алгебры $\mathfrak{A}(S)$ полугруппы $S$ над $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{A}(S)$ полупроста тогда и только тогда, когда полупроста алгебра каждого главного фактора полугруппы $S$.

Простую полугруппу $S$ автор называет $c$-неособенной, если $S\cong S[\mathfrak{G}, P]$, где $\mathfrak{G}$ — указанная выше базисная группа, а $P$ обратима в групповой алгебре группы $\mathfrak{G}$ над полем характеристики $c$. Основная теорема: алгебра $\mathfrak{A}(S)$ над полем характеристики $c$, не делящей порядков базисных групп главных факторов $S$, тогда и только тогда полупроста, когда главные факторы $S$ являются $c$-неособенными простыми полугруппами. Пусть полугруппа $S$ допускает относительные дополнения, т. е. для каждого $a\in S$ существуют $e$, $a'$ такие, что $ea=ae=a$, $aa'=a'a=e$, и пусть $\mathfrak{F}$ — поле, характеристика которого не делит порядков базисных групп главных факторов $S$. Тогда $\mathfrak{A}(S)$ полупроста тогда и только тогда, когда все идемпотенты $S$ коммутируют. А. И. Мальцев

1126. **Когерентно-инвариантные отображения на крэнекеровских произведениях.** Джейкоб (Coherence invariant mappings on Kronecker products. Jacob Henry G. Jr), Amer. J. Math., 1955, **77**, № 1, 177—189 (англ.)

Хуа-Ло-кеном было введено понятие когерентности пары прямоугольных матриц над полем и изучены отображения систем матриц, сохраняющие когерентность

(Hua L. K., Sci. Repts Nat. Tsing Hua Univ., 1948, A5, 150—181). Используя соответствие между матрицами и линейными преобразованиями конечномерных векторных пространств, автор обобщает результаты Хуа-Локена, рассматривая пространства над некоммутативными телами и не предполагая конечности числа их измерений.

Пусть $X$ — левое, $Y$ — правое векторные пространства над телом $\Delta$, $X \times Y$ — их кронекеровское произведение (Jacobson N., Lectures in abstract algebra, Vol. II. D. Van Nostrand Company, New York, 1953, 208—256). Каждый элемент $T$ из $X \times Y$ представим в виде конечной суммы $T = \Sigma x_i \times y_i$; $x_i \in X$, $y_i \in Y$. Минимальное число членов в таких представлениях элемента $T$ называется рангом этого элемента. Два элемента из $X \times Y$ называются когерентными, если ранг их разности равен единице. Взаимно однозначное отображение кронекеровского произведения $X_1 \times Y_1$ над телом $\Delta_1$ на кронекеровское произведение $X_2 \times Y_2$ над телом $\Delta_2$ называется когерентно-инвариантным, если образы каждой пары когерентных элементов из $X_1 \times Y_1$ также когерентны.

Основной результат работы: Если размерности каждого из пространств $X_1$, $Y_1$, $X_2$, $Y_2$ не меньше двух, и каждое из тел $\Delta_1$ и $\Delta_2$ содержит более двух элементов, то всякое когерентно-инвариантное отображение $X_1 \times Y_1$ на $X_2 \times Y_2$, переводящее 0 в 0, обратное к которому также когерентно-инвариантно, может быть одного и только одного из следующих двух типов:

1) $\Sigma x_i \times y_i \to \Sigma x_i P \times y_i Q$, где $P$ и $Q$ — полулинейные преобразования $X_1$ на $X_2$ и соответственно $Y_1$ на $Y_2$, ассоциированные с одним и тем же изоморфизмом между $\Delta_1$ и $\Delta_2$.

2) $\Sigma x_i \times y_i \to \Sigma y_i Q \times x_i P$, где $P$ и $Q$ — полулинейные преобразования $X_1$ на $Y_2$ и соответственно $Y_1$ на $X_2$, ассоциированные с одним и тем же изоморфизмом между $\Delta_1'$ и $\Delta_2$. Здесь $\Delta_1'$ — антиизоморфный образ $\Delta_1$, $X_1'$ — левое, $Y_1'$ — правое векторные пространства над $\Delta_1'$, получающиеся из $X_1$ и соответственно из $Y_1$ при антиизоморфизме $\Delta_1 \backsim \Delta_1'$.

В заключительной части работы рассматриваются некоторые приложения к теории колец линейных преобразований векторных пространств. В. К. Иванов

**1127. О мультипликативной группе простой алгебры. Тойода, Хаттори** (On the multiplicative group of simple algebras. Toyoda Goro, Hattori Akira), J. Math. Soc. Japan, 1954, **6**, № 3-4, 262—265 (англ.)

Рассматривается центрально простая алгебра $A$ конечного ранга над бесконечным полем $F$. Пусть $B$ — любая подалгебра алгебры $A$, отличная от $A$ и $F$. Подалгебра $B'$ называется сопряженной с подалгеброй $B$, если в $A$ существует такой регулярный элемент $t$, что $B' = tBt^{-1}$; совокупность всех подалгебр алгебры $A$, сопряженных с $B$, обозначается через $[B]$. Мультипликативная группа $A^*$ регулярных элементов алгебры $A$ может быть представлена в транзитивной группе подстановок множества $[B]$. Доказывается, что ядром такого представления группы $A^*$ является мультипликативная группа $F^*$ регулярных элементов поля $F$. Ранее эта теорема была доказана одним из авторов для частного случая, когда $B$ — простая подалгебра алгебры $A$ (J. Math. Soc. Japan, 1952, 4, 205—217).

Доказывается также следующее утверждение: Пусть $B$ и $C$ — любые алгебры с единицей над полем $F$, причем алгебра $C$ отлична от $F$, и пусть $A = B \times C$ — их прямое произведение. Пусть, кроме того, выполняется условие ($G$): для каждого элемента $b \in B$ можно подобрать такой элемент $c \in C$, не содержащийся в $F$, что элемент $b + c$ регулярен в $A$. Тогда, если подалгебра $B'$ алгебры $B$ есть централизатор в $B$ некоторой подалгебры $B'' \subset B$, то $B'$ совпадает с пересечением определенных подалгебр алгебры $A$, сопряженных с $B$ относительно регулярных элементов алгебры $A$.

Отмечается, что условие ($C$) выполняется, если алгебра $A$ удовлетворяет условию обрыва цепочек для левых идеалов и каждый неделитель нуля из $A$ регулярен или если $A$ является алгебраической алгеброй. Е. Г. Шульгейфер

**1128. О примарных разложениях идеалов в некоммутативных кольцах. Томинага** (On primary ideal decompositions in non-commutative rings. Tominaga Hisao), Math. J. Okayama Univ., 1953, **3**, № 1, 39—46 (англ.)

Рассматриваются (двусторонние) идеалы некоммутативного (ассоциативного) кольца $R$. Если $A$ и $B$ — идеалы, то $AB^{-1}$ обозначает идеал, состоящий из тех $x \in R$, для которых $xB \subseteq A$; далее $AB^{-k} = (AB^{-k+1})B^{-1}$. Аналогично определяется $B^{-k}A$. Идеал $P$ называется простым, если $A^{-1}P = PA^{-1} = P$ при любом $A \not\subseteq P$. Пересечение всех (минимальных) простых идеалов, содержащих данный идеал $A$, называется радикалом идеала $A$ и обозначается через $\bar{A}$. Идеал $Q$ называется примарным, если $B^{-1}Q = QB^{-1} = Q$ при любом $B \not\subseteq \bar{Q}$; если при этом фактор-кольцо $\bar{Q}/Q$ нильпотентно, то $Q$ называется сильно примарным. Радикал сильно примарного идеала прост. Простой идеал $P$ называется ассоциированным с идеалом $A$, если существует идеал $C \not\subseteq A$ такой, что $Q = AC^{-1}$ есть сильно примарный идеал и $\bar{Q} = P$. Если для идеалов $A$ и $B$ существует $k$ такое, что $AB^{-k} = AB^{-k-1} = B^{-k-1}A = B^{-k}A$, то $AB^{-k}$ называется предельным идеалом $A$ по $B$.

Доказана теорема: чтобы в кольце $R$ каждый идеал можно было представить в виде пересечения конечного числа сильно примарных идеалов, необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1) для любого идеала $A$ фактор-кольцо $\bar{A}/A$ нильпотентно; 2) для любых идеалов $A$ и $B$ существует предельный идеал идеала $A$ по $B$; при этом для данного $A$ существует только конечное число различных идеалов, которые могут быть получены последовательным построением, начиная с $A$, всевозможных предельных идеалов; 3) если $P$ есть минимальный простой идеал, содержащий $A \neq R$, то $AP^{-1} \neq A$; 4) если простой идеал $P$ ассоциирован с $A$, то существует сильно примарный идеал $Q$ такой, что $A \subseteq Q$, $\bar{Q} = P$, и при всяком $B \subseteq Q$ имеем $\overline{AB^{-1}} \neq P$.

При выполнении перечисленных условий имеют место такие же теоремы единственности, как и в коммутативных кольцах. З. И. Боревич

**1129. Дополнение к моей предыдущей работе «О примарных разложениях идеалов в некоммутативных кольцах». Томинага** (Supplement to my previous paper «On primary ideal decompositions in non-commutative rings». Tominaga Hisao), Math. J. Okayama Univ., 1954, **3**, № 2, 135—138 (англ.)

Показывается, что условие 1) (реф. 1128) является следствием условий 2) и 3), а во второй части условия 2) достаточно потребовать лишь конечность числа всех различных предельных идеалов идеала $A$. Далее приводятся два других условия, которыми можно заменить условия 2) и 4). З. И. Боревич

**1130. Несколько замечаний о радикальных идеалах. Томинага** (Some remarks on radical ideals. Tominaga Hisao), Math. J. Okayama Univ., 1954, **3**, № 2, 139—142 (англ.)

Идеал $C$ (некоммутативного) кольца $R$ называется радикальным, если он совпадает со своим радикалом

$\overline{C} = C$ (реф. 1128). Радикальный идеал $C$ может быть охарактеризован также условием: из $AB \subseteq C$ следует $\overline{A} \cap B \subseteq C$ ($A$ и $B$ — идеалы). Все радикальные идеалы кольца $R$ образуют дистрибутивную структуру относительно операций $A \cup B = \overline{A+B}$ и $A \cap B$. Условие максимальности для радикальных идеалов кольца $R$ имеет место тогда и только тогда, если: 1) в кольце $R$ имеет место условие максимальности для простых идеалов и 2) каждый радикальный идеал кольца $R$ представим в виде пересечения конечного числа простых идеалов. З. И. Боревич

**1131. Некоторые теоремы относительно ассоциативных колец Цорна. Левицкий** (Some theorems concerning associative Zorn rings. Levitzki J.), Bull. Res. Council Israel, 1954, 3, № 4, 380—384 (англ.)

Изучается класс $I$-колец, т. е. ассоциативных колец, в которых каждый правый не нильидеал обладает отличным от нуля идемпотентным элементом (по Капланскому — ассоциативные кольца Цорна).

Получены следующие результаты:

1. Если $T$ есть $I$-кольцо с единицей и без нильпотентных элементов, то индекс нильпотентности $i(S)$ полного матричного кольца $S = T_n$ степени $n$ над $T$ равен $n$ (теорема, известная для случая, когда $T$ — тело).

2. Если $S$ — полупростое в смысле Джекобсона $I$-кольцо конечного индекса $i(S) = r$, то каждое нильподкольцо $U \subset S$ нильпотентно, причем $U^r = 0$. Эта теорема в одной из более ранних работ автора (Math. An., 1931, 105, 620) была доказана для полных матричных колец над телами.

3. Если $S = T_n$ и $S' = T'_{n'}$—полные матричные кольца степеней $n$ и $n'$ над $I$-кольцами $T$ и $T'$, не содержащими нильпотентных элементов, и $S' \subseteq S$, причем кольца $S$ и $S'$ обладают общей единицей, то $n'$ делит $n$. Эта теорема в более ранней работе автора (Math. Z., 1931, 33, 663) доказана для случая, когда $T$ и $T'$ — тела. Л. И. Головина

**1132. Обобщенно матричные алгебры. Браун** (Generalized matrix algebras. Brown W. P.), Canad. J. Math., 1955, 7, № 2, 188—190 (англ.)

Алгебра $\mathfrak{A}$ ранга $mn$ над полем $K$ характеристики нуль называется обобщенно матричной, если она обладает базисом $\{e_{ij}\}$ $(1 \leqslant i \leqslant m;\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, элементы которого перемножаются по следующему правилу: $e_{ij}e_{pq} = \varphi_{jp}e_{iq}$, где $\varphi_{jp} \in K$. Элементы $\varphi_{ij}$ образуют $n \times m$-матрицу $\Phi = (\varphi_{ij})$; $\Phi$ называется матрицей умножения алгебры $\mathfrak{A}$ относительно базиса $\{e_{ij}\}$. Если ранг матрицы $\Phi$ равен $r$, то от базиса $\{e_{ij}\}$ можно перейти к такому базису $\{e'_{ij}\}$, матрица умножения относительно которого имеет вид

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $I_r$ — единичная матрица порядка $r$. Доказывается теорема: фактор-алгебра обобщенно матричной алгебры $\mathfrak{A}$ по ее радикалу есть полная матричная алгебра порядка $r$ (т. е. обобщенно матричные алгебры примарны); обобщенно матричная алгебра проста тогда и только тогда, когда она обладает единицей. Е. Г. Шульгейфер

**1133. Основы теории фробениусовых расширений. Каш** (Grundlagen einer Theorie der Frobeniuserweiterungen. Kasch Friedrich), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 31—32 (нем.)

Автор называет кольцевое расширение $F/R$ фробениусовым расширением, если $F/R$ обладает такими левым и правым базисами (не обязательно конечными), что порождаемые ими регулярные представления $F$ в $R$ равны между собой. Это понятие является обобщением фробениусовых алгебр, которые характеризуются, как известно, эквивалентностью левого и правого регулярных представлений. Если кольцо $R$ обладает единицей, удовлетворяет условию минимальности для односторонних идеалов и аннулятор каждого идеала (левого, правого) отличного от $R$ будет отличным от нуля, то на фробениусово расширение $F/R$ распространяются основные свойства фробениусовых алгебр. Кольцевое расширение Галуа $F/R$, где $F$ — простое, а $R$ — полупростое, будет фробениусовым расширением, чем подтверждается высказанное предположение Накаяма (Nakyama T., Proc. Congr. Math., 1950, 11, 49). Наконец, фробениусово расширение может быть применимо для доказательства теоремы Машке в формулировке Гашюца (Gashütz W., Math. Z., 1952, 56, 376) при очень общих предположениях. Доказательств не приводится. П. Г. Конторович

**1134. Об обобщении, данном Накаямой, для теоремы о $x^{n(x)}$. Розенберг, Зелинский** (On Nakayama's extension of the $x^{n(x)}$theorems. Rosenberg Alex, Zelinsky Daniel), Proc. Amer Math. Soc., 1954, 5, № 3, 484—486 (англ.)

Доказываются две теоремы о коммутативности колец (одна — для примитивных колец, другая — для полупростых), каждый элемент $a$ которых удовлетворяет условию: $a^{n_1(a)}\alpha_1 + \ldots + a^{n_r(a)}\alpha_r \in Z$, где $Z$ — центр кольца, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — фиксированные элементы из $Z$, $n_i(a) > n_1(a) > 0$. Аналогичный результат о телах см. в работе Накаямы (РЖМат. 1953, 1100). В. М. Курочкин

**1135. О классификации ассоциативных алгебр посредством теории когомологий. Роз** (On the classification of associative algebras by means of cohomology theory. Rose I. H.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 62—63 (англ.)

Ассоциативная алгебра $A$ называется $n$-мерной, если существует отличная от нуля $n$-мерная группа когомологий алгебры $A$ (Hochschild G., Ann. Math., 1945, 46, 58—67), но каждая $n+1$-мерная группа когомологий $A$ равна нулю.

Сформулирована теорема: если $B$ — несепарабельный односторонний идеал сепарабельной алгебры $A$, то $B$ одномерна. В частности, алгебра всех матриц $n$-го порядка, в которых последние $r < n$ столбцов состоят только из нулей, одномерна. Л. М. Глускин

**1136. Поднятые идемпотенты. Зелинский** (Raising idempotents. Zelinsky Daniel), Duke Math. J., 1954, 21, № 2, 315—322 (англ.)

Пусть $R$ — ассоциативное кольцо, $N$ — идеал в нем (как правило, радикал); исследуются условия, при которых систему ортогональных идемпотентов $e_i$ $(i \in \mathfrak{m})$ фактор-кольца $R/N$ можно «поднять» в $R$, т. е. когда в $R$ можно найти систему ортогональных идемпотентов $e_i^*$ $(i \in \mathfrak{m})$, отображающихся на $e_i$ при гомоморфизме $R \to R/N$. Строится очень простой пример кольца ($N^2 = 0$, $R/N$ — прямая сумма изоморфных полей, $\mathfrak{m}$ несчетно), в котором этого сделать нельзя.

Доказано, что любую систему ортогональных идемпотентов можно «поднять» в $R$ в каждом из следующих двух случаев:

1. $R$ — алгебра над $K$; радикал $N$ имеет над $K$ конечный ранг.

2. $R$ — линейно компактное топологическое кольцо; пересечение замыканий степеней $N^i$ радикала $N$ равно 0. (Линейная компактность $R$ означает, что непусто

пересечение любой центрированной системы классов смежности по левым замкнутым идеалам кольца $R$).

Дается следующее обобщение теоремы Веддербарна. пусть $R$ — линейно компактная топологическая алгебра над $K$ и $N$ — ее радикал, причем пересечение замыканий степеней $N^i$ равно 0. В другой работе автора (РЖМат, 1954, 1586) было доказано, что в этом случае $R/N$ является полной прямой суммой полных матричных колец конечной степени над некоторыми (дискретными) телами. Если все эти тела конечномерны и сепарабельны над $K$, то $R$ расщепляема, т. е. $R = S + N$, где $S \cong R/N$ и $S$ — замкнутая подалгебра в $R$.

Если, в частности, $R$ компактно и примарно ($pR = 0$), то $R = S + N$, где $N$ — радикал, а $S$ — замкнутая подалгебра. В этом случае естественное изоморфное отображение $S \to R/N$ есть гомеоморфизм. Ставится вопрос: не будет ли это справедливо и в условиях сформулированной выше теоремы. В. М. Курочкин

**1137. Характеристика одного класса колец. Сан-Суси** (A characterization of a class of rings. San Soucie R. L.), Amer. J. Math., 1955, **77**, № 1, 190—196 (англ.)

Правоальтернативное, но не альтернативное тело $B$ называется телом Брука, если $B$ является двумерным пространством над полем $F$ характеристики 2, а умножение в $B$ задается формулой

$$(f, g)(h, k) = (fh + g \cdot k\theta,\ fk + gh),$$

где $f, g, h, k \in F$ и $\theta$ — эндоморфизм аддитивной группы поля $F$. Доказывается, что для того чтобы правоальтернативное неальтернативное тело $K$ характеристики 2 было телом Брука, необходимо и достаточно, чтобы

$$[wx, y, z] = w[x, y, z] + [w, y, z]x + [w, x, [y, z]]$$

и

$$[[x, y], w, z] = 0$$

для любых $x, y, z, w \in K$, где $[x, y] = xy - yx$, $[x, y, z] = (xy)z - x(yz)$. Л. А. Скорняков

**1138. Точные треугольные представления $Z$-алгебр Ли. Глушков В. М.**, Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 4, 617—620

Известная теорема Биркгофа о существовании точных треугольных представлений нильпотентных алгебр Ли переносится на случай $Z$-алгебр Ли. Алгебра Ли $A$ называется $Z$-алгеброй, если она обладает хотя бы одной центральной системой, т. е. упорядоченным по включению множеством $M = \{A_\alpha\}$ идеалов $A_\alpha$ со следующими свойствами: 1) все объединения и пересечения входящих в $M$ идеалов, нулевой идеал и сама алгебра $A$ входят в $M$; 2) если $A_\alpha$ — максимальный идеал системы $M$, не содержащий элемента $a \neq 0$ алгебры $A$, то $a \cdot b \in A_\alpha$ для любого $b \in A$.

Необходимое для доказательства теоремы понятие веса формального произведения $x_{\beta_1} \dots x_{\beta_k}$ элементов базиса $A$ вводится автором так: сначала проводится упорядочение в множестве индексов $\alpha$ по закону $\alpha_1 < \alpha_2$, если $A_{\alpha_1} \subset A_{\alpha_2}$; затем вес определяется как индекс $\alpha$ со следующими свойствами: 1) любое лиево произведение, составленное из $x_{\beta_1}, \dots, x_{\beta_k}$, содержится в $A_\alpha$; 2) существует произведение того же вида, которое не содержится ни в одном $A_{\alpha_1}$ при $\alpha_1 < \alpha$.

Наконец, собственно треугольной матрицей называется множество элементов $a^\alpha_\beta$, где $\alpha$ и $\beta$ пробегают некоторое упорядоченное множество $R$, $a^\alpha_\beta = 0$ при $\beta \leqslant \alpha$ и для каждого $\beta$ лишь конечное число элементов $a^\alpha_\beta$ отлично от нуля (ср. Глушков В. М., Матем. сб., 1952, 30, 79—104). Показывается, что локально-нильпотентная алгебра Ли является $Z$-алгеброй.

В. В. Морозов

**1139. Заметка о представлениях нильпотентных алгебр Ли. Кертис** (A note on the representations of nilpotent Lie algebras. Curtis Charles W.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 5, 813—824 (англ.)

Основные результаты следующие:

1. Пусть $L$ — нерасщепляемая алгебра Ли линейных преобразований векторного пространства $\mathfrak{M}$ конечной размерности над полем $K$ и пусть $D$ — линейное преобразование такое, что $[L, D] \in L$. Если дифференцирование $A \to [A, D]$ в $L$ нильпотентно, то минимальный полином $D$ есть степень неприводимого полинома. В частности, если $L$ — нерасщепляемая нильпотентная лиева алгебра линейных преобразований векторного пространства конечной размерности, то минимальный полином каждого элемента из $L$ является степенью неприводимого полинома.

2. Пусть $x \to V_x$ — представление конечной степени нильпотентной лиевой алгебры $L$ над бесконечным полем $K$. Если $\det U_x = 0$ для всех $x \in L$, то существует такой ненулевой вектор $v$ в пространстве представления, что $vV_x = 0$ для всех $x \in L$. Как отмечает автор, для случая нулевой характеристики поля $K$ этот результат установлен ранее Шевалле.

3. Пусть $L$ — нильпотентная лиева алгебра над произвольным полем $K$. Если $x \to V_x$ — нерасщепляемое представление $L$ конечной степени, то любые две неприводимые составляющие $v$ эквивалентны.

4. Базис $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ лиевой алгебры называется регулярным, если из $i < j$ следует $[a_i, a_j] \in (a_{i+1}, \dots, a_n)$. Всякая нильпотентная лиева алгебра конечной размерности обладает регулярным базисом. Пусть $L$ — нильпотентная лиева алгебра над полем $K$ простой характеристики, $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ — регулярный базис $L$ и $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ — произвольная упорядоченная система неприводимых полиномов в $K[x]$. Тогда существует такое неприводимое представление $x \to V_{xx}$, что минимальный полином $V_{|a_i}$ есть степень $f_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Если каждый многочлен $f_i$ линеен или является степенью единственного линейного множителя над алгебраическим замыканием поля $K$, то представление $V$ определяется единственным образом с точностью до эквивалентности.

5. Пусть $L$, $a_1, a_2, \dots, a_n$; $f_1, f_2, \dots, f_n$ такие, как в пункте 4. Тогда существует последовательность $K_i$ положительных целых чисел, $\lim_{i \to \infty} k_i = \infty$ и нерасщепляемые представления $U^{(i)}$ степени $k_i$, $i = 1, 2 \dots$, что для всех $i$ минимальный полином $V^{(i)}_{a_j}$ есть степень $f_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

В доказательствах существования используются некоторые результаты относительно продолжения неприводимых представлений алгебры на полупрямое произведение алгебры и ее алгебры дифференцирований.

Исправление к работе см. Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 6, 1001). Б. И. Плоткин

**1140. О кольцах Ли простых колец. Херстейн** (On the Lie ring of a simple ring. Herstein I. N.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, **40**, № 305—306, (англ.)

**О кольцах Ли и J-кольцах простых ассоциативных колец. Херстейн** (On the Lie and Jordan rings of a simple associative ring. Herstein I. N.), Amer. J. Math., 1955, **77**, № 2, 279—285 (англ.)

Пусть $A$ — ассоциативное кольцо. Идеалом Ли кольца $A$ называется идеал кольца Ли $A^L$, построенного с помощью операции $[a, b] = ab - ba$ на аддитивной группе кольца $A$. В частности, идеалом Ли будет множество $[A, A]$ — подгруппа аддитивной группы кольца $A$, порождаемая всеми элементами вида $[a, b]$. Аналогично определяется $J$-кольцо $A^J$ с помощью операции $a \circ b = ab + ba$.

Содержание второй работы:

1. Пусть кольцо $A$ не содержит локально нильпотентных идеалов, характеристика $A$ взаимно проста с 2, и $U$ — (собственное) подкольцо кольца $A$, являющееся идеалом Ли. Тогда или $U$ содержит нетривиальный идеал кольца $A$, или же $U$ содержится в центре кольца $A$.

2. Доказав, что простое кольцо не является локально нильпотентным, автор формулирует соответствующую теорему в предположении простоты кольца $A$.

3. Пусть $A$ — простое кольцо и $U$ — идеал Ли. Тогда или $U \supset [A, A]$, или $U$ содержится в центре кольца $A$, или же $A$ есть алгебра ранга 4 над своим центром, являющимся полем характеристики 2.

4. Из простоты кольца $A$ следует простота кольца $A^J$, если характеристика $A$ взаимно проста с 2.

В первой работе без доказательств формулируются некоторые (вообще говоря, более слабые) из этих результатов. А. И. Ширшов

**1141. Новый класс простых алгебр Ли. Франк** (A new class of simple Lie algebras. Frank Marguerite Straus), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, **40**, № 8, 713—719 (англ.)

Пусть $F$ — поле характеристики $p \neq 0$, $B_n$ — алгебра многочленов над $F$ от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с соотношениями $x_1^p = x_2^p = \cdots = x_n^p = 0$, $W_n$ — совокупность преобразований алгебры $B_n$, называемых дифференцированиями, вида $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i \in B_n$, причем если $f \in B_n$, то $fA = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i$.

Известно, что $W_n$ есть алгебра Ли относительно операций

$$f(AB) = (fA)B - (fB)A.$$

Пусть $M_n$ — совокупность элементов $A \in W_n$ таких, что $\delta(A) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = 0$, а $T_n$ — совокупность элементов из $M_n$ таких, что их координаты $a_i$ представимы в виде $a_i = \sum_{j \neq i} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}$, где $a_{ij}$ — некоторые элементы из $B_n$. Доказывается, что $M_n$ — подалгебра $W_n$ ранга $(n-1)p^n + 1$, $T_n$ — простая алгебра Ли ранга $(n-1)(p^n - 1)$ и $T_n = M_n^2$. А. И. Ширшов

**1142. Об одном классе полупростых ограниченных алгебр Ли. Селигман** (On a class of semisimple restricted Lie algebras. Seligaman George B.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, **40**, № 8, 726—728 (англ.)

Сообщаются без доказательства некоторые результаты относительно полупростых ограниченных алгебр Ли (РЖМат, 1956, 259) над полем простой характеристики $p$. При этом используются обозначения известных классов простых алгебр Ли характеристики $p$ ($p > 2$).

A. Все квадратные матрицы порядка $n$, след которых равен нулю над полем Ф простой характеристики $p$, где $p$ не делит $n$. Если $p \mid n$, то эта алгебра $A_{n-1}$ имеет одномерный центр, фактор — алгебра по которому является простой ограниченной алгеброй Ли.

B. Алгебры $B_n$ всех квадратных порядка $2n+1$ кососимметрических Ф-матриц.

C. Алгебры $C_n$ всех квадратных порядка $2n$ Ф-матриц $M$, удовлетворяющих условию $S^{-1}M'S = -M$, где $M'$ — транспонированная для $M$, и $S = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$

D. Алгебры $D_n$ всех квадратных порядка $2n$ кососимметрических Ф-матриц ($n \geqslant 4$).

E. Для достаточно больших $p$ аналоги пяти исключительных простых алгебр нулевой характеристики.

Теорема 1. Пусть $L$ — простая ограниченная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем Ф характеристики $p > 7$. Пусть $L$ обладает ограниченным представлением с невырожденной формой Киллинга. Тогда $L$ изоморфна алгебре одного из классов $A$, $B$, $C$, $D$, $E$.

Теорема 2. Простые алгебры Ли с невырожденной формой Киллинга над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > \max(q, 7)$ принадлежат одному из следующих типов:

$$A_n\ (p \nmid (n+1));$$
$$B_n\ (p \nmid (2n-1)), \quad n \geqslant 2;$$
$$C_n\ (p \nmid (n+1)), \quad n \geqslant 3;$$
$$D_n\ (p \nmid (n-1)), \quad n \geqslant 4;$$

или являются аналогами $C_2$, $F_4$, $E_7$, $E_8$ пяти исключительных простых алгебр Ли над полем нулевой характеристики. При этом $q$ — подходящее простое число. Б. И. Плоткин

**1143. Гомоморфные образы специальных J-алгебр. Кон** (Homomorphic images of special Jordan-algebras. Cohn Paul Moritz), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 11—12 (англ.)

Резюме одноименной работы автора (РЖМат, 1955, 3653).

**1144. Новые результаты об алгебрах с ассоциативными степенями. Кокорис** (New results on power-associative algebras. Kokoris Louis A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **77**, № 3, 363—373 (англ.)

Известно, что коммутативная алгебра (кольцо) $\mathfrak{A}$, характеристика которой взаимно проста с 30, будет алгеброй (кольцом) с ассоциативными степенями, если $x^2x^2 = x^3x$ для любого $x \in \mathfrak{A}$. Для алгебр и колец характеристики 3 и 5 в настоящей работе доказываются следующие утверждения. Коммутативная алгебра $\mathfrak{A}$ над полем $\mathfrak{F}$ характеристики 3, содержащим более трех элементов, будет алгеброй с ассоциативными степенями, если $x^2x^2 = x^3x$ и $x^3x^2 = x^4x$ для любого $x \in \mathfrak{A}$. Чтобы коммутативное кольцо $\mathfrak{A}$ характеристики 3 было кольцом с ассоциативными степенями, достаточно справедливости в $\mathfrak{A}$ равенств $x^2x^2 = x^3x$ и

$$2[(x, y)x]x^2 + (x^2y)x^2 + 2(xy)x^3 = x^4y + (x^3y)x + [(x^2y)x]x + 2\{[(xy)x]x\}x.$$

Коммутативное кольцо $\mathfrak{A}$ характеристики 5 будет кольцом с ассоциативными степенями, если $x^2x^2 = x^3x$ и $x^4x^2 = x^5x$ для любого $x \in \mathfrak{A}$.

Если в $\mathfrak{A}$ справедливо тождественное соотношение $x^\alpha x^\beta - x^{\alpha+\beta} = 0$, то подставляя в него, вместо $x$, $x + \lambda y$ (или более длинную линейную комбинацию $x + \lambda y + \mu z + \ldots$), где $\lambda$ — элемент основного поля, если $\mathfrak{A}$ — алгебра, и целое число, если $\mathfrak{A}$ — кольцо, полу-

чаем равенство $\Sigma_i \lambda^i A_i = 0$, где $A_i$ — многочлены от $x, y$, называемые сопутствующими многочленами. Коммутативное кольцо $\mathfrak{A}$ называется кольцом со строго ассоциативными степенями, если $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ для каждого $x \in \mathfrak{A}$ и всех целых положительных $\alpha$ и $\beta$ и если равны нулю все сопутствующие многочлены. В случае, когда $\mathfrak{A}$ — алгебра, последнее требование эквивалентно тому, что $\mathfrak{A}$ остается алгеброй с ассоциативными степенями при любом расширении основного поля. Каждое коммутативное с ассоциативными степенями кольцо, характеристика которого взаимно проста с 30, является кольцом со строго ассоциативными степенями. В общем же случае не всякое кольцо с ассоциативными степенями будет кольцом со строго ассоциативными степенями; приводится пример коммутативной с ассоциативными степенями алгебры $\mathfrak{A}$ над полем $\mathfrak{F}$, состоящим из трех элементов, не являющейся алгеброй со строго ассоциативными степенями.

На коммутативные со строго ассоциативными степенями кольца и алгебры характеристик 3 и 5 обобщаются теорема 2 из работы Алберта (Albert A., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, 64, 559) и все основные результаты из другой работы Алберта (Trans. Amer. Math. Soc., 1950, 69, 503—527).

При доказательстве этих результатов автор ссылается на доказательства, приведенные в работе Алберта, изменяя их лишь в тех местах, где они не проходят для алгебр характеристики 3 или 5.

В конце рассматриваются коммутативные с ассоциативными степенями алгебры ранга 2 и характеристики 0. Известно, что в этом случае единица $e$ алгебры $\mathfrak{A}$ представима в виде суммы двух ортогональных идемпотентов: $e = u + v$, а сама алгебра $\mathfrak{A}$ разлагается в прямую сумму трех модулей $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_{12} + \mathfrak{A}_2$, где $\mathfrak{A}_1$ — совокупность элементов $x_1$, удовлетворяющих условию $ux_1 = x_1$ и $vx_1 = 0$, $\mathfrak{A}_{12}$ — совокупность элементов $y_{12}$, для которых $uy_{12} = vy_{12} = \frac{1}{2} y_{12}$ и $\mathfrak{A}_2$ — совокупность элементов $x_2$, удовлетворяющих условию $ux_2 = 0$ и $vx_2 = x_2$. $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ являются взаимно ортогональными подалгебрами и имеют соответственно вид $\mathfrak{A}_1 = u\mathfrak{F} + \mathfrak{Y}_1$ и $\mathfrak{A}_2 = v\mathfrak{F} + \mathfrak{Y}_2$ ($\mathfrak{F}$ — основное поле), где $\mathfrak{Y}_1$ и $\mathfrak{Y}_2$ — нильподалгебры. Произведения $y_{12}x_1 \in \mathfrak{A}_{12} + \mathfrak{A}_2$ и $y_{12}x_2 \in \mathfrak{A}_{12} + \mathfrak{A}_1$ для любых $y_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$, $x_1 \in \mathfrak{A}_1$ и $x_2 \in \mathfrak{A}_2$, так что $y_{12}x_1 = y_{12}S_{12}(x_1) + y_{12}S_2(x_1)$, а $y_{12}x_2 = y_{12}T_{12}(x_2) + y_{12}T_1(x_2)$, где $S_{12}(x_1)$ и $T_{12}(x_2)$ — эндоморфизмы модуля $\mathfrak{A}_{12}$, а $S_2(x_1)$ и $T_1(x_2)$ — гомоморфные отображения модуля $\mathfrak{A}_{12}$ соответственно в модули $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_1$.

Доказывается теорема: Если $\mathfrak{A}$ — коммутативная с ассоциативными степенями алгебра ранга 2 и характеристики 0, то $y_{12}T_1(x_2) \in \mathfrak{Y}_1$ для любых $y_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$ и $x_2 \in \mathfrak{A}_2$, и $y_{12}S_2(x_1) \in \mathfrak{Y}_2$ для любых $y_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$ и $x_1 \in \mathfrak{A}_1$. В предисловии автор выражает надежду, что, опираясь на эту теорему, можно будет доказать гипотезу, что всякая простая коммутативная с ассоциативными степенями алгебра ранга 2 и характеристики 0 есть $J$-алгебра. Е. Г. Шульгейфер

**1145. Неассоциативные линейные алгебры. Рошкулец** (Algebre liniare neasociative. Roşculeţ Marcel N.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne, Sec. mat. şi fiz., 1954, 6, № 2, 251—262 (рум.; резюме русс., франц.)

Известно, что алгебру Кэли $A_8$ можно строить при помощи алгебры кватернионов $A_4$ точно так же, как алгебру $A_4$ при помощи алгебры $A_2$ комплексных чисел. Автор продолжает этот процесс и строит алгебры $A_{2^n}$ ранга $2^n$ над полем действительных чисел.

В алгебрах $A_2$, $A_4$ и $A_8$ можно, как известно, определить норму, значениями которой будут действительные числа, причем норма произведения элементов равна произведению норм. В алгебрах $A_{2^n}$ также определяется норма. Доказывается, что для того чтобы в $A_{2^n}$ норма произведения равнялась произведению норм, необходимо, чтобы это имело место в $A_{2^{n-1}}$ и чтобы алгебра $A_{2^{n-1}}$ была ассоциативна.

Далее автор исходит от некоторой ассоциативной и коммутативной алгебры $A_3$ ранга 3 и строит ассоциативную алгебру $A_9$ ранга 9 и неассоциативную алгебру $A_{27}$ ранга 27, в которых можно определить норму с таким же свойством. Я. В. Хион

**1146. Представление неассоциативных колец в ассоциативных. Скорняков Л. А.,** Докл. АН СССР, 1955, 102, № 1, 33—35

Пусть $\bar{A}$ — ассоциативное кольцо с кольцом операторов $\Omega$ и внешне присоединенной (к кольцу $A$) единицей $e$; $\bar{A}^+$ — аддитивная группа кольца $\bar{A}$. Если $\bar{A}^+$ представлена в виде прямой суммы своих подгрупп: $\bar{A}^+ = B + \Omega e + C$, т. е. каждый элемент $a \in \bar{A}$ допускает единственным образом запись $a = B(a) + \Omega(a)e + C(a)$, где $B(a) \in B$, $\Omega(a) \in \Omega$, $C(a) \in C$, то элементы подгруппы $B$ относительно новой операции $b_1 \circ b_2 = B(b_1 b_2)$ образуют, вообще говоря, неассоциативное $\Omega$-операторное кольцо. Доказывается, что всякое (неассоциативное) кольцо $K$ может быть представлено указанным образом с помощью некоторого ассоциативного кольца $\bar{A} \cong \bar{A}(K)$. Если подгруппа $B + \Omega e$ порождает кольцо $\bar{A}$, а подгруппа $C$ является правым идеалом кольца $\bar{A}$, не содержащим нетривиальных (двусторонних) идеалов, то такое представление единственно с точностью до изоморфизма соответствующих колец и подгрупп. Указываются некоторые связи между свойствами колец $K$ и $\bar{A}$. А. И. Ширшов

**1147. Энтропические функции в неассоциативных алгебрах. Этерингтон** (Entropic functions of non-associative algebras. Etherington Ivor M. H.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 18—19 (англ.)

Определение логарифма, как решения некоторого функционального уравнения, переносится на любые алгебры над полем действительных или комплексных чисел. М. М. Постников

**1148. Неассоциативные кольца. Беренс** (Nichtassoziative Ringe. Behrens Ernst-August), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 7 (нем.)

Резюме одноименной работы автора (РЖМат, 1955, 4284). А. И. Ширшов

**1149. Об алгебрах Ньюмена. II. Вооенака** (On Newman algebra. II. Wooyenaka Yuki), Proc. Japan Acad., 1954, 30, № 7, 562—565 (англ.)

Работа непосредственно примыкает к предыдущей работе автора (РЖМат, 1955, 5657). Ее содержание сводится к замене аксиомы 3. $a + b = b + a$ из системы аксиом, определяющей так называемую алгебру Ньюмена, более слабой аксиомой 8′. $a + b'b = b'b + a$, и аксиомы $10_3$. $a + a = 0$ булева кольца с единицей — аксиомой $10_2'$ $(a' + a) + a = a'$. Л. И. Головина

**1150. Координаты в геометрии. Фрайер, Гальперин** (Coordinates in geometry. Fryer K. D., Halperin Israel), Trans. Roy. Soc. Canada, 1954, Sec. III, 48, June 11—26 (англ.)

Дается модернизация доказательства известного результата Нёймана (Neumann J. von, Continuous geometry, Princenton, N. J., 1936, 1, 2), связывающего с данной дедекиндовой структурой с дополнениями некоторое регулярное кольцо.

Примечание референта. Ссылки на работу Нёйманн не всегда корректны. Под *AL* (стр. 12—13) следует понимать $(a+b)c+a=(a+b)(a+c)$, а не тождество, указанное в тексте. Л. А. Скорняков

**1151. Теорема о частично упорядоченных множествах.** Рабин (A theorem on partially ordered sets. Rabin Michael), Riveon lematematika, 1954, **7**, 26—29 (евр.; резюме англ.)

Теорема, упомянутая в заголовке, утверждает, что если $M$ удовлетворяет условиям обрыва убывающих и возрастающих цепей, а каждое совсем не упорядоченное подмножество множества $M$ конечно, то $M$ конечно.

Примечание референта. Эта теорема установлена Кёнигом (D. König). (См. Биркгоф Г., Теория структур, М., 1952, стр. 68, упр. 7).

M. Jerison.

Перевод из Math. Revs, 1954, 15. № 5, 389.

**1152. К проблеме вложения.** Лезьёр (Sur un problème d'immersion. Lesieur Leonce), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 40—41 (франц.)

Строится вложение с сохранением бесконечных пересечений дистрибутивной структуры, обладающей свойством дизъюнктности, в полную булеву структуру.

А. Х. Лившиц

**1153. Отношения конгруэнтности на дистрибутивной структуре.** Терстон (Congruences on a distributive lattice. Thurston H. A.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1954, **10**, № 2, 76—77 (англ.)

Если $L$ — структура подмножеств множества $S$ и $K$ — подмножество (не обязательно элемент $L$), то отношение $\mathfrak{q}_K$ между элементами $L$, заданное условием: $X\mathfrak{q}_K Y$ тогда и только тогда, когда $X\cap K=Y\cap K$, является отношением конгруэнтности на структуре $L$. Если $L$ — структура конечных подмножеств множества $S$ и $\mathfrak{q}$ — отношение конгруэнтности на $L$ то существует подмножество $K$ множества $S$, для которого $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}_K$. Если $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{r}$ — любые два отношения, то $\mathfrak{pr}$ является отношением, для которого $X\mathfrak{pr}Y$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $Z$, что $X\mathfrak{p}Z$ и $Z\mathfrak{r}Y$. Если $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{r}$ — любые два отношения конгруэнтности структуры конечных подмножеств, то $\mathfrak{pr}=\mathfrak{rp}$.

А. Х. Лившиц

**1154. Системы отношений конгруэнтности в структурах.** Якубик, Ян, Чехосл. матем ж., 1954, **4**, № 3, 248—273 (резюме англ.)

Изучаются условия разрешимости системы двух сравнений с одним неизвестным по некоторым отношениям конгруэнтности в дистрибутивных и модулярных структурах. Пусть $S$ — структура и $A\subseteq S$. Обозначим через $R_1(A)$ наименьшее отношение конгруэнтности на $S$ такое, что все элементы множества $A$ сравнимы по модулю $R_1(A)$. В первом параграфе изучаются свойства наименьших отношений конгруэнтности.

Во втором параграфе рассматриваются дистрибутивная структура $S$ и система сравнений в ней

$$x\equiv u\,(\mathrm{mod}\,R_1(A)),\quad x\equiv v\,(\mathrm{mod}\,R_1(B)),\qquad (1)$$

где $u, v\in S$ и $A, B$ — выпуклые подструктуры в $S$. Если $A, B$ — идеалы, то система (1) разрешима (относительно $x\in S$) тогда и только тогда, когда

$$u\equiv v\,(\mathrm{mod}\,R_1(A)\vee R_1(B)).\qquad (2)$$

Балахандран доказал эту теорему, предполагая дополнительно существование в $S$ нуля (Balachandran V. K., J. Indian Math. Soc., 1949, **13**, 76—80). В общем случае условие (2) только необходимо для разрешимости системы (1). Обозначим через (*Ba*) утверждение, состоящее в том, что из условия (2) следует разрешимость системы (1). Доказываются теоремы:

1. Если $u, v, A, B$ произвольны, то (*Ba*) имеет место тогда и только тогда, когда $S$ есть структура с относительными дополнениями.

2. Если $u, v$ заданы, то (*Ba*) имеет место тогда и только тогда, когда (замкнутый) интервал $(u\wedge v, u\vee v)$ является булевой алгеброй.

3. Если $A, B$ заданы, $A\cap B$ непусто и $R_1(A)\wedge R_1(B)=0$, то (*Ba*) имеет место тогда и только тогда, когда выпуклая подструктура структуры $S$, порожденная подструктурами $A$ и $B$, является прямым произведением своих подструктур $A$ и $B$. При этом структура $L$ названа прямым произведением своих подструктур $L_1$ и $L_2$, если существует такое изоморфное отображение структуры $L$ на прямое произведение $L_1\times L_2$ структур $L_1$ и $L_2$ и такой элемент $x_0\in L_1\cap L_2$, что для любых $x_1\in L_1$, $x_2\in L_2$ имеем $x_1\to(x_1, x_0)$, $x_2\to(x_0, x_2)$. Приводится условие выполнимости (*Ba*) и в случае, когда $A\cap B$ пусто.

В третьем параграфе рассматриваются модулярная структура $S$ и система сравнений (1), где $u, v\in S$ и $A, B$ — идеалы в $S$. Для удобства формулировок автор вводит понятие интервала типа $\alpha$. Пусть $S$ содержит подструктуру $S_1$ из пяти элементов $a, b, c, d, e$, связанных лишь условиями $a<b<e$, $a<c<e$, $a<d<e$, и пусть $\overline{S}_1$ — наименьшая выпуклая подструктура, содержащая $S_1$. Интервал $J\subseteq S$ назван интервалом типа $\alpha$, если он проективен некоторому интервалу $J'\subseteq\overline{S}_1$. Каждое из следующих условий достаточно для справедливости (*Ba*):

1. Интервал $(u\wedge v, u\vee v)$ не содержит интервалов типа $\alpha$.

2. Любой интервал типа $\alpha$ идеала $A$ проективен некоторому интервалу типа $\alpha$ идеала $B$ и наоборот.

3. Идеалы $A, B$ не содержат интервалов типа $\alpha$.

В заключение автор доказывает, что утверждение теоремы 10 гл. V книги Биркгофа (Биркгоф Б., Теория структур, М., 1952) остается справедливым, если вместо конечности длины структуры предположить лишь конечность всех цепей, обладающих наименьшим и наибольшим элементами.

М. Л. Берликов

**1155. Вложение произвольной структуры в $o$-топологическую структуру.** Каппос (Einbettung eines beliebigen Verbandes in einem $o$-topologischen Verband. Kappos Demetrios A.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 30—31 (нем.)

Формулируется утверждение о том, что всякую структуру $S$ можно вложить в $o$-топологическую структуру $S^T$ и что при определенных (автором не указанных) условиях $S^T$ можно однозначно расширить до $o$-топологической полной структуры.

А. Х. Лившиц

**1156. Об операторах замыкания полной структуры.** Дуингер (On the closure operators of a complete lattice. Dwinger Ph.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954 **A57**, № 5, 560—563 (англ.)

Оператор $\varphi$ полной структуры $L$ называется оператором замыкания, если 1) из $A\geqslant B$ следует $\varphi(A)\geqslant\varphi(B)$ для каждых $A, B\in L$; 2) $\varphi(A)\geqslant A$ для каждого $A\in L$; 3) $\varphi^2=\varphi$. Если положим 4) $\varphi_1\leqslant\varphi_2$ тогда и только тогда, когда $\varphi_1(A)\leqslant\varphi_2(A)$ для каждого $A\in L$, — то операторы замыкания полной структуры образуют полную структуру $C_L$.

Структура операторов замыкания $C_L$ полной структуры $L$ тогда и только тогда дистрибутивна, когда $L$ является полной цепью. Структура операторов замыкания $C_L$ является булевой алгеброй тогда и только тогда, когда $L$ вполне упорядочена и обладает единицей. Кроме того, если $C_L$ является булевой алгеброй, то она вполне дистрибутивна.

А. Х. Лившиц

**1157. Метрические структуры. Микулик Мирослав,** Чехосл. матем. ж., 1954, 4, № 4, 364—371 (резюме англ.)

Рассматриваются множества $S$, обладающие следующими свойствами: 1. $S$ является полной структурой. 2. На $S$ введена метрика $\rho$, относительно которой $S$ компактно. 3. Если $A$ — произвольное непустое подмножество множества $S$, $d(A)$ — его диаметр, $l = \bigwedge_{t\in A} t$ и $L = \bigvee_{t\in A} t$, то $d(A) = \rho(l, L)$.

Примером такого множества $S$ является множество всех решений дифференциального уравнения $x' = f(t, x)$, где $f(t, x)$ — равномерно непрерывная и ограниченная функция в области $|t-\xi| \leqslant a$, $|x-\eta| < \infty$, проходящих через все точки вида $\xi, \eta + \lambda b$, где $b$ — константа, а $\lambda$ пробегает интервал $(-1, 1)$.

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов полной структуры $S$ называется o-сходящейся ($\divideontimes$-сходящейся) к элементу $x$, если $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{k=n}^{\infty} x_k = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k = x$ (если из каждой подпоследовательности $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность, o-сходящуюся к $x$). В структуре $S$ метрическая сходимость, o-сходимость и $\divideontimes$-сходимость эквивалентны.

Подмножество $A$ структуры $G$ называется выпуклым, если из $x, y \in A$ и $x \leqslant z \leqslant y$ следует $z \in A$. Подструктура $A$ структуры $S$ называется замкнутой, если для любого подмножества $X \subset A$ $\bigvee_{t\in X} t \in A$ и $\bigwedge_{t\in X} t \in A$. Если $A$ — непустая выпуклая подструктура структуры $S$, то она замкнута тогда и только тогда, когда множество $A$ компактно. А. Х. Лявшиц

**1158. Некоторые свойства $n$-адических соотношений. Копи, Харари** (Some properties of $n$-adic relations. Copi Irving A., Harary Frank), Portugaliae math., 1953, **12**, 143—152 (англ.)

Соотношение от $n$ аргументов $Rx_1x_2\ldots x_n$ называется симметричным, если оно допускает любые перестановки своих аргументов, и рефлексивным, если $Rxx\ldots x$ справедливо для всех $x$ из области определения соотношения $R$. Дается следующее обобщение двойной транзитивности: если, при $x_{ij} = x_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, $Rx_{i1}x_{i2}\ldots x_{in}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, то $Rx_{11}x_{22}\ldots x_{nn}$. Теорема: Если $n$ — четное, то из симметричности и транзитивности следует рефлексивность. Теорема: Если $R$ рефлексивно, симметрично и транзитивно, то таким же будет соотношение от двух аргументов $S(xy) \equiv Rxx\ldots xy$; кроме того, если $n$ нечетно, то области определения $S$ и $R$ совпадают. Определяются обратное соотношение $Rx_nx_{n-1}\ldots x_1$, а также композиция соотношений $R_1x_1, x_2\ldots x_{n-1}y$, $R_kx_1x_2x_3\ldots x_{k-1}x_k\ldots x_k$ $(1 < k < n)$, $R_nyx_2x_3\ldots x_n$, для некоторого $y$, и приводятся аналоги различных правил из алгебры соотношений от двух аргументов. R. C. Lyndon

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 8, 676.

**1159. О единственном подпрямом разложении в универсальных алгебрах и их характеристике посредством своих тождеств. Фостер** (On a unique subdirect factorization in universal algebras and their characterization by their identities. Foster Alfred L.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 19—20 (англ.)

Сообщены некоторые условия возможности и единственности подпрямых разложений в универсальных алгебрах (РЖМат, 1955, 637). Л. М. Глускин

**1160. Некоторые замечания о понятии свободной алгебраической системы. Переманс** (Some remarks on the notion of a free algebraic system. Peremans Wouter), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 49—50 (англ.)

Приводятся некоторые соображения о проблемах теории свободных алгебраических образований. А. Х. Лявшиц

**1161 К. Простой пример законного перехода от комплексных чисел к числам из произвольного поля. Вейль** (A simple example for the legitimate passage from complex numbers to numbers of an arbitrary field. Weyl Hermann. New York, N. Y., Hafner Publishing Co. Inc., 1953, 75—79 p., 2.50 doll.) (англ.)

Автор отмечает, что если $f(X_1, \ldots, X_n)$ — такой многочлен с целочисленными коэффициентами, что $f(c_1, \ldots, c_n) = 0$ для любых комплексных чисел $c_i$, то $f(c_1', \ldots, c_n') = 0$ для любых элементов $c_i'$ из произвольного поля. Отсюда следует, что если некоторый алгоритм, позволяющий по исходным данным выразить результаты, имеет место в поле комплексных чисел (например, метод Лагранжа для обращения целого ряда порядка 1), то этот же алгоритм остается справедливым и в произвольном поле. Это замечание дает некоторый ответ (очень частный, как признает даже сам автор) на проблему «редукции по модулю $p$», поставленную А. Вейлем. P. Samuel

Перевод из Math. Revs., 1954, № 8, 667

**1162 Д. Группы и линейные множества с дизъюнктными элементами. Сорокина В. И.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ленингр. гос. пед. ин-т, Л., 1955

**1163 Д. Кольца, нормированные при помощи полугрупп. Хион Я. В.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1955

---

**См. также:** 918, 962, 968, 983, 991, 998, 999, 1164, 1183, 1196, 1203, 1204, 1205, 1206, 1299, 1352, 1436, 1493, 1494, 1504 К, 1598, 1600, 1606, 1613, 1614, 1634, 1661, 1681, 1689 Д

## ТОПОЛОГИЯ

**1164. Арифметика фильтров и топологические пространства. Монтейро** (L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques. Monteiro António A.), 2° symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América, Villavicencio-Mendoza, julio 1954. Montevideo, Centro coop., cient., UNESCO América Latina, 1954, 129—162 (франц.)

Обзорная статья лишь с немногими доказательствами, в которой систематизируются результаты различных авторов, в том числе и автора данной статьи, образующие структурную теорию топологических пространств (подход к топологическому пространству с точки зрения структуры — в смысле теории структур,— образованной его замкнутыми множествами). С этой точки зрения исследуются различные понятия отделимости (особенно нормальность и различные ослабления и усиления ее), пополнения пространств и т. п. Основные средства исследования — понятие фильтра и примыкающие к нему понятия. П. С. Александров

**1165. Распространение одной теоремы Рисса на случай обобщенных компактных пространств. Инфантоцци** (Extensiones a los conjuntos compactos generalizados de una proposicion de Riesz. Infantozzi Carlos A.), Publs Inst. mat. y estadist. Fac. ingr., Montevideo, 1953, **2**, № 6, 121—133 (исп.)

В пространствах, компактных в данном отрезке мощностей $[\alpha, \beta]$ в смысле П. С. Александрова и П. С. Урысона (Math. Ann., 1924, **92**, 258—26; Verhandel. Koninkl. nederl. akad. wetensch., sect. I, 1929, **14**, № 1, 1—96; Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1950, **31**, 1—94, а также Смирнов Ю. М., Изв. АН СССР, 1950, **14**, № 2, 155—178), исследуются системы множеств, имеющие мощность $\leqslant\beta$; доказывается, что если такая система $\alpha$-центрирована (т. е. всякая ее подсистема мощности $<\alpha$ имеет непустое пересечение), то непусто и пересечение замыканий всех данных множеств. Исследуются различные типы пространств, в которых эта теорема имеет место. П. С. Александров

**1166. Теоремы выбора для непрерывных отображений. Майкл** (Selection theorems for continuous functions. Michael Ernest Arthur), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 241—242 (англ.)

Приводится обобщение теорем о распространении отображений Дугунджи (Dugundji, Pacif. J. Math., 1951, **1**, 353—367) и Куратовского (Kuratowski R., Fundam. math., 1935, **24**, 269—288). Пусть $F$ ставит в соответствие каждой точке топологического пространства $X$ некоторое непустое замкнутое множество топологического пространства $Y$. Выбором для $F$ назовем такое непрерывное отображение $f$ пространства $X$ в $Y$, что $f(x)\in F(x)$ для каждого $x\in X$. По определению, соответствие $F$ имеет свойство $e(A)$, (соответственно $ne(A)$) (extension (resp. neighborhood extension) property modulo $A$)), если всякий выбор для соответствия $F$, рассматриваемого лишь на замкнутом множестве $A$ пространства $X$, можно продолжить в выбор для всего $F$ (соответственно для $F$, рассматриваемого на некоторой окрестности множества $A$). Приводятся достаточные условия, при которых соответствие $F$ обладает свойством $e(A)$ (соответственно $ne(A)$). Например (теорема 1): если $X$ — паракомпактное, а $Y$ — банахово пространство и если $F$ — полунепрерывно снизу (т. е. для каждого открытого в $Y$ множества $U$ совокупность всех тех точек $x\in X$, для которых $F(x)\cap U\neq\Lambda$, открыто в $X$), а множество $F(x)$ выпукло для каждого $x\in X$, то свойство $e(A)$ выполняется для каждого замкнутого множества $A$. Доказательств нет. Ю. М. Смирнов

**1167. О расширении непрерывных отображений на счетно-паракомпактные пространства. Исеки** (On extension of continuous mappings on countable paracompact normal spaces. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 8, 736—740 (англ.)

Доказывается, что любое непрерывное отображение $f$ какого-либо замкнутого множества $A$, лежащего в (счетно) паракомпактном пространстве $X$, в (соответственно сепарабельное) банахово пространство $Y$ может быть непрерывно продолжено на все $X$. Следствие: Для того чтобы метрическое пространство $R$ со счетной базой было абсолютным окрестностным ретрактом ($ANR$) относительно счетно-паракомпактных пространств, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось каждое из условий: 1) $R$ топологически полно и $ANR$ относительно метрических пространств со счетной базой, 2) $R$ есть $ANR$ относительно нормальных пространств.

Примечание референта. Полученные результаты интересно сравнить с результатами Майкла и Хаммера (РЖМат, 1955, 5663, 5666). Ю. М. Смирнов

**1168. Характеризация топологических пространств при помощи непрерывных отображений. Кандо** (Characterization of topological spaces by some continuous functions. Kando Tetsuo), J. Math. Soc. Japan, 1954, **6**, № 1, 45—54 (англ.)

Даются характеристики следующих видов топологических пространств: а) нормальные паракомпактные пространства (во всякое открытое покрытие можно вписать открытое локально-конечное покрытие); б) нормальные пространства, в) нормальные счетно-паракомпактные пространства (во всякое счетное открытое покрытие можно вписать локально-конечное открытое покрытие); г) нормальные слабо паракомпактные пространства (во всякое точечно-конечное открытое покрытие можно вписать локально-конечное открытое покрытие).

Пусть $F$ — отображение топологического пространства $R$ в пространство $2^B$ всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств банахова пространства $B$. Отображение $F$ назовем полунепрерывным снизу, если для каждого открытого в $B$ множества $U$ множество всех точек $x\in R$, для которых $F(x)\cap U\neq\Lambda$, открыто в $R$. Отображение $F$ назовем компактным, если каждое $F(x)$ компактно. Скажем, что отображение $F$ реализуемо (термин референта), если существует такое непрерывное отображение $f$ пространства $R$ в $B$, что $f(x)\in F(x)$ для каждого $x\in R$. Найденные автором характеристики таковы: а) для любого банахова пространства каждое полунепрерывное снизу отображение $F$ реализуемо; б) для любого банахова пространства со счетной базой каждое полунепрерывное снизу компактное отображение $F$ реализуемо; в) для любого банахова пространства со счетной базой всякое полунепрерывное снизу отображение $F$ реализуемо; г) для любого банахова пространства всякое компактное полунепрерывное снизу отображение $F$ реализуемо. Условия а) и б) ранее найдены Майклом (Michael E. A., Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, 180).

Ю. М. Смирнов

**1169. О пространствах равномерной сходимости. Кришнан** (On uniconvergence spaces. Krishnan V. S.), J. Madras Univ., 1953, **B23**, № 2, 174—181 (англ.)

Дается, по существу, другое определение равномерных пространств в смысле А. Вейля посредством абстрактного задания сходимости обобщенных последовательностей. Пусть $X$ — абстрактное множество, $A$ — частично упорядоченное множество; пространством равномерной сходимости автор называет всякую удовлетворяющую некоторым аксиомам совокупность пар $(\{x_\alpha\}, x)$, каждая из которых состоит из элемента $x$ множества $X$ и обобщенной последовательности $\{x_\alpha\}$, т. е. некоторого подмножества множества $X$, занумерованного всеми элементами $\alpha$ из $A$. Между пространствами, удовлетворяющими всем указанным автором аксиомам, и равномерными пространствами А. Вейля устанавливается естественное взаимно однозначное соответствие.

Ю. М. Смирнов

**1170. Точечно-конечные и локально-конечные покрытия. Майкл** (Point-finite and locally finite coverings. Michael Ernest), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 2, 275—279 (англ.)

Автор доказывает, что в любое счетное точечно-конечное открытое покрытие нормального пространства можно вписать локально-конечное открытое покрытие (Morita K., Math. Japan, 1948, **1**, 60—68) и что в любое точечно-конечное открытое покрытие коллективно-нормального пространства можно вписать локально-конечное открытое покрытие (топологическое пространство называется коллективно-нормальным, если к любой системе попарно непересекающихся замкнутых множеств можно подобрать попарно не пересекающиеся окрестности). Используя построения Бинга, автор приводит пример нормального, но не коллективно-нормального

пространства, в каждое точечно-конечное открытое покрытие которого можно вписать локально-конечное открытое покрытие, а также пример нормального пространства, не обладающего этим последним свойством.
Ю. М. Смирнов

**1171. К теории пространств подмножеств. Иванова В. М.,** Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 4, 601—603

Излагается теорема из кандидатской диссертации автора, относящаяся к вопросу о нормальности пространства $\mathcal{E}(R)$ всех непустых замкнутых множеств какого-либо топологического пространства $R$. При этом пространство $\mathcal{E}(R)$ автор рассматривает в следующей топологизации. Пусть $\mathfrak{U}_1(G)$ — совокупность всех непустых замкнутых множеств пространства $R$, содержащихся в некотором открытом множестве $G \subseteq R$, а $\mathfrak{U}_2(G)$ — совокупность всех непустых замкнутых множеств пространства $R$, пересекающихся с $G$; за базу открытых множеств пространства $\mathcal{E}(R)$ принимается система всевозможных конечных пересечений множеств вида $\mathfrak{U}_1(G)$ и $\mathfrak{U}_2(G)$. Теорема: Для любого предельного порядкового числа $\tau$ пространство $\mathcal{E}(I_\tau)$, где $I_\tau$ — пространство всех порядковых чисел, меньших $\tau$,— не нормально. Таким образом, условие нормальности пространства $R$ не является достаточным условием для того, чтобы $\mathcal{E}(R)$ было нормальным. Ю. М. Смирнов

**1172. О коэновской топологической характеристике множеств, состоящих из действительных чисел. Грот** (On Cohen's topological characterization of sets of real numbers. Groot J. de), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, **A58**, № 1, 33—35; Indagationes Math., 1955, **17**, № 1, 33—35 (англ.)

Рассматриваются взаимоотношения между топологическими характеристиками множеств действительных чисел, данными в разное время Коэном и автором (Fundam. math., 1929, **14**, 281—303; Proc. Koninkl Nederl. akad. wetensch., 1947, **50**, 876—884), и дается новая характеристика, несколько отличная от этих. Она заключается в том, что должны одновременно выполняться следующие четыре условия: а) регулярность и наличие счетной базы, б) в каждой точке порядок должен быть $\leqslant 2$, в) в каждой точке порядка 2 рассматриваемое пространство $R$ локально-связно и г) для каждой точки $p$ порядка 2 множество $R \setminus p$ несвязно.
Ю. М. Смирнов

**1173. Типы регулярности. Перейра-Коэлью** (Regularity types. Pereira Coelho R.), Portug. math., 1953, **12**, 87—98 (англ.)

Пусть $X$ — топологическое пространство. Если $A, B \subset X$ и замыкание множества $A$ содержится в открытом ядре множества $B$, то говорят, что $A$ регулярно включено в $B$. Это понятие было введено Стоном и приложено к определению полной регулярности пространства (Trans. Amer. Math. Soc., 1937, **41**, 375—481). Пусть $T$ — частично упорядоченное множество. Говорят, что пространство $X$ имеет в точке $x$ тип регулярности $T$, если для любого открытого множества $V_0$, содержащего $x$, существует такое семейство $\{V_t\}_{t \in T}$ открытых подмножеств множества $V_0$, содержащих $x$, что при $t < t'$ в $T$ множество $V_t$ регулярно включено в $V_{t'}$. Доказаны несколько очень простых теорем, касающихся этого понятия. Для произвольного предельного порядкового числа $\mu$ построен пример хаусдорфова пространства, имеющего тип регулярности $\omega^\mu$ в каждой точке, но не имеющего тип регулярности $\omega^{\mu+1}$ хотя бы в одной точке.
E. Hewitt

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 5, 456.

**1174. Характеризация произвольного равномерного пространства с помощью системы равномерно непрерывных функций. Нагата** (A characterization of a general uniform space by a system of uniformly continuous functions. Nagata Jun-iti), J. Inst. Polytech. Osaka City Univ., 1953, **A 4**, 43—49 (англ.)

Даны условия, при которых два полных равномерных пространства $R_1, R_2$ униформно изоморфны, и аналогичные условия для случая, когда полнота не предполагается. Эти условия даны в терминах некоторых частично упорядоченных множеств равномерно непрерывных отображений пространств $R_1$ и $R_2$ в произведение бесконечного числа положительных полупрямых $[0; \infty)$.
S. B. Myers

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 6, 546.

**1175. Строение систем окрестностей и типы сходимости. Сакакихара** (The structures of neighbourhood systems and the types of convergences. Sakakihara Kanenji), J. Inst. Polytech. Osaka City Univ., 1953, **A4**, 1—7 (англ.)

Отправляясь от сходимости направленных систем как основного, можно определить окрестности, а затем новое понятие сходимости; отправляясь от окрестностей, можно определить сходимость и затем новые окрестности. Заметка содержит некоторые соотношения между этими понятиями и условия (большей частью известные), при которых новые понятия совпадают со старыми. Новым является то, что автор ограничивается сходимостью направленных систем с фиксированным направленным множеством $X$ индексов. Он исследует также вопрос о том, с помощью каких множеств $X$ можно адэкватно описать данную топологию.
A. H. Stone

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 6, 546.

**1176. Заметка об общей метризационной проблеме Исеки** (A note on the general metrization problem. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 9, 855—856 (англ.)

Дается краткое доказательство общей метризационной теоремы, найденной независимо Нагата и референтом (Nagata Guniti, J. Inst. Polytcknics Osaca City University, 1950, **1**, № 2, A, 93—100; Смирнов Ю., Успехи матем. наук, 1951, **6**, № 6 (46), 100—111). Интересно отметить, что во всех трех случаях доказательство одинаково.
Ю. М. Смирнов

**1177. О размерности несепарабельных пространств. I. Катетов М.,** Чехосл. матем. ж., 1952, **2**, № 4, 333—338 (журнал вышел из печати в 1953 г.)

Подробно изложены результаты автора, относящиеся к теории размерности произвольных метрических пространств. В § 1 доказываются вспомогательные предложения весьма общего характера, касающиеся локально-конечных открытых покрытий топологических (чаще всего, нормальных) пространств.

Нульмерные и некоторые близкие к нульмерным отображения рассматриваются в § 2. Отображение $f$ топологического пространства $X$ в метрическое пространство $Y$ автор называет нульмерным относительно покрытия $\gamma$ пространства $X$, если существует такое положительное число $\varepsilon$, что всякое множество $M$ пространства $X$, для которого диаметр образа $f(M)$ не превосходит $\varepsilon$, распадается в сумму попарно не пересекающихся открытых в $M$ множеств, каждое из которых содержится в некотором элементе покрытия $\gamma$. Отображение $f$ метрического пространства $X$ в метрическое пространство $Y$ автор называет равномерно нульмерным, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что всякое множество $M$ пространства $X$, для которого диаметр образа $f(M)$ не превосходит $\varepsilon$, распадается в сумму попарно не пересекающихся открытых в $M$ множеств, каждое из которых имеет диаметр $< \delta$. Множество всех ограниченных нульмерных относительно $\gamma$ непрерывных отображений открыто

в пространстве $C(X, Y)$ всех ограниченных непрерывных отображений пространства $X$ в $Y$; множество всех ограниченных непрерывных равномерно нульмерных отображений является множеством типа $G_\delta$ в $C(X, Y)$. Помимо этого, как первое, так и второе множества отображений оказываются плотными в $C(X, Y)$. Более того (теорема 2.14): Пусть дано нормальное пространство $X$ конечной размерности $n$ и банахово пространство $Y$ размерности $\geqslant n$; пусть, кроме того, дана последовательность локально-конечных открытых покрытый $\gamma_i$ пространства $X$; тогда почти все (т. е. все за исключением множества первой категории) отображения $f \in C(X, Y)$ нульмерны относительно всякого $\gamma_i$. То же верно и для пространства $C'(X, Y)$ всех вполне ограниченных непрерывных отображений пространства $X$ в $Y$. В случае, когда размерность $\dim X$ бесконечна, первая часть утверждения также справедлива, если только $Y$ содержит бесконечную равномерно линейно-независимую систему точек (т. е. такое множество $S$ пространства $Y$, что для некоторого положительного числа и для любых непересекающихся конечных подмножеств $\{y_1, \ldots, y_k\}$ и $\{z_1, \ldots, z_m\}$ множества $S$ выполняется неравенство $|\Sigma_{i\leqslant k}\alpha_i y_i + \Sigma_{i\leqslant m}\beta_i z_i| \geqslant \frac{1}{\varepsilon}|\Sigma_{i\leqslant k}\alpha_i y_i|$ при любых действительных числах $\alpha_i$ и $\beta_i$).

Доказано, что (теорема 2.15) для любого метрического пространства $X$ и любого банахова пространства $Y$ в тех же условиях, что и в теореме 2.14, почти все отображения $f \in C(X, Y)$ равномерно-нульмерны, а в том случае, когда $X$ конечномерно (или же когда $X$ можно равномерно-нульмерно и непрерывно отобразить в некоторое вполне ограниченное пространство) и почти все отображения $f \in C'(X, Y)$ равномерно-нульмерны.

В § 3 доказывается один из основных результатов автора, доказанный им еще в 1950 г. (теорема 3.4): Для любого метризуемого пространства $X$ при каждом данном $n = 0, 1, 2, \ldots$ следующие свойства пространства $X$ эквивалентны: 1) размерность $\dim X$, определенная с помощью покрытий, $\leqslant n$, 2) большая (чеховская) индуктивная размерность $\operatorname{Ind} X \leqslant n$, 3) в любой метрике пространства $X$ существует равномерно-нульмерное непрерывное отображение $X \to E^n$, 4) в некоторой метрике пространства $X$ существует равномерно-нульмерное непрерывное отображение $X \to E^n$, 5) пространство $X$ можно представить в виде суммы не более чем $n+1$ нульмерного множества. Отсюда вытекает равенство размерностей dim и Ind для любого метрического пространства, что является большим шагом вперед к решению известной проблемы П. С. Александрова и П. С. Урысона о равенстве обычной индуктивной (урысоновской) размерности ind и размерности dim для произвольных метрических пространств.

Далее идет теорема 3.6 о гомеоморфном вложении нульмерных метризуемых пространств в обобщенное бэровское пространство соответствующего веса, являющаяся (как по формулировке, так и по доказательству) непосредственным обобщением аналогичного результата для пространств со счетной базой. Отсюда легко следует известный результат о том, что топологическое произведение счетного числа нульмерных метризуемых пространств нульмерно. С помощью одной топологической теоремы М. А. Лаврентьева выводится и следующее обобщение известного результата Л. А. Тумаркина (теорема 3.9): Для любого множества $M$ метризуемого пространства $X$ существует объемлющее его множество типа $G_\delta$ (в $X$) той же размерности, что и $M$. Теорема 3.10: Всякое метризуемое пространство в некоторой метрике обладает пополнением той же размерности. Теорема 3.11: Для любых метризуемых пространств $X$ и $Y$ размерность топологического произведения $X \times Y$ никогда не превосходит суммы $\dim X + \dim Y$.

Работа написана несколько формально как в отношении результатов, так и в отношении методов доказательств. Ю. М. Смирнов

**1178. Нормальные семейства и теория размерности для метрических пространств. Морита** (Normal families and dimension theory for metric spaces. Morita Kiiti), Math. Ann., 1954, **128**, № 4, 350—362 (англ.)

Доказываются интересные предложения о размерности метрических пространств, обобщающие известные теоремы о размерности метрических пространств со счетной базой.

Основным результатом следует считать теорему 8.6 о равенстве размерности dim, определенной с помощью покрытий, и так называемой большой индуктивной размерности Ind (определение которой отличается от определения обычной индуктивной размерности ind лишь тем, что в нем вместо точек следует брать замкнутые множества). Для достижения этого результата автору потребовалось доказать следующие интересные сами по себе утверждения: а) теорема 5.1: для любого множества $A$ метрического пространства $R$ всегда $\operatorname{Ind} A \leqslant \operatorname{Ind} R$; б) теорема 5.2: если метрическое пространство $R$ имеет локально-конечное покрытие, состоящее из замкнутых множеств $A_\lambda$ размерности $\operatorname{Ind} A_\lambda \leqslant n$, то и $\operatorname{Ind} R \leqslant n$; в) теорема 5.4: для того чтобы имело место неравенство $\operatorname{Ind} R \leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы $R$ можно было представить в виде суммы $(n+1)$-го нульмерного множества; г) теорема 5.6 (обобщение известной теоремы Л. А. Тумаркина): для произвольного множества $A$ метрического пространства $R$ существует объемлющее множество $H \subset R$ типа $G_\delta$ той же размерности, что и $A$.

Далее (§ 7) приводятся теорема 7.2: для любых метрических пространств $X$ и $Y$ справедливо неравенство $\operatorname{Ind}(X \times Y) \leqslant \operatorname{Ind} X + \operatorname{Ind} Y$ (как ранее доказано автором, равенство заведомо достигается в том случае, когда одно из пространств является локально конечным полиэдром), и теорема 7.3: топологическое произведение счетного числа нульмерных метрических пространств нульмерно. В следующем параграфе доказывается основной результат (теорема 8.6) и, кроме того, дается новая оригинальная характеристика размерности. Именно, скажем, что для топологического пространства $R$ размерность $D(R)$ по определению не превосходит $n$, если существует такая база $\gamma$ открытых множеств, распадающаяся в сумму счетного (или конечного числа) локально-конечных покрытий, что кратность системы, состоящей из границ элементов базы $\gamma$, не превосходит $n$. Оказывается (теорема 8.7), что для метрических пространств всегда $D(R) = \operatorname{Ind} R$.

В § 9 приводятся теоремы о разложении (decomposition theorems) следующего вида (теорема 9.2): К любой счетной системе замкнутых конечномерных подмножеств $A_i$ метрического пространства $R$ можно подобрать такую базу $\gamma$ открытых множеств, распадающуюся в сумму счетного числа локально-конечных покрытий, что выполняется неравенство

$$\operatorname{Ind}\left(\bigcap_{j=1}^{r} \text{гр.} U_j \cap A_i\right) \leqslant \operatorname{Ind} A_i - r$$

для любого $A_i$ и любых различных $U_j \in \gamma$, $1 \leqslant j \leqslant r \leqslant \operatorname{Ind} A_i + 1$. В § 10 рассматриваются нульмерные метрические пространства и доказывается (теоремы 10.1, 10.2), что каждое метрическое нульмерное пространство веса $\tau$ гомеоморфно вкладывается в обобщенное бэровское пространство $B^\tau$ веса $\tau$, которое также нульмерно.

Доказательство основных фактов проводится по известному методу Гуревича с помощью видоизмененной теории нормальных семейств. Семейство $\mathfrak{R}$ метрических пространств автор называет нормальным, если выполнены условия: а) если $A \subseteq R$ и $R \in \mathfrak{R}$, то и $A \in \mathfrak{R}$, б) если $R$ имеет локально-счетное покрытие, состоящее из замкнутых множеств $A_\lambda \in \mathfrak{R}$, то и $R \in \mathfrak{R}$. Для каждого (нормального) семейства $\mathfrak{R}$ определяется семейство $\mathfrak{R}'$, состоящее из всех метрических пространств $R$, для каждого из которых выполнено условие в) к любому замкнутому множеству $A \subset R$ и к любой его окрестности $OA \subset R$ можно подобрать такую меньшую окрестность $\overline{UA}$, что $[UA[ \subseteq OA$ и что гр. $UA \in \mathfrak{R}$. Таким образом, для каждого нормального семейства $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^0$ можно построить по индукции семейства $\mathfrak{R}^n = (\mathfrak{R}^{n-1})'$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ В §§ 2, 3, 4 приведены вспомогательные результаты, относящиеся к нормальным семействам.

Для того чтобы сформулировать последние два результата автора, введем следующее определение: топологическое пространство $R$ назовем сильно паракомпактным ($S$-пространством), если в любое его открытое покрытие можно вписать звездно-конечное покрытие (открытое покрытие, каждый элемент которого пересекается лишь с конечным числом других элементов покрытия). Оказывается (теорема 10.3), для того чтобы метрическое пространство было сильно паракомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было гомеоморфно некоторому подмножеству произведения $B^\tau \times I^\infty$ обобщенного бэровского пространства $B^\tau$ на гильбертов параллелепипед $I^\infty$. Наконец (теорема 11.1), если метрическое пространство $R$ распадается в сумму счетного или конечного числа замкнутых сильно паракомпактных подпространств, то все размерности этого пространства совпадают: $\operatorname{ind} R = \operatorname{Ind} R = \dim R$.

Примечание референтов. Многие результаты автора не новы. Так, например, теорема 5.1 доказана Э. Чехом в цитируемой автором работе (Čech E., Bull. Acad. Bohême, 1932, **33**, 38—55). Основная теорема 8.6 (о равенстве размерностей Ind и dim) и теорема 5.4 доказана М. Катетовым (Докл. АН СССР, 1951, **79**, № 2, 189—193). Теоремы 5.4, 5.6, 7.2, 7.3, 8.6, 10.1, 10,2 в подробном изложении приводятся у М. Катетова (реф. 1177).

П. С. Александров, Ю. М. Смирнов

**1179. О сепарабельных метрических пространствах, содержащих конечное число предельных точек. Серпинский** (Sur les espaces métriques séparables contenant un nombre fini de points d'accumulation. Sierpinski W.), Matematiche, 1954, **9**, № 2, 122—125 (франц.)

Автор решает задачу топологической классификации сепарабельных (в данном случае то же, что и счетных) метрических пространств, содержащих конечное число предельных точек: для каждого натурального числа $s$ он строит на прямой линии $s+2$ таких топологически различных множеств, что каждое из них содержит ровно $s$ предельных точек и что любое счетное метрическое пространство, обладающее $s$ предельными точками, гомеоморфно одному из них. Ю. М. Смирнов

**1180. Об одном свойстве универсального метрического пространства Урысона. Хухунайшвили Г. Е.**, Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 4, 607—610

Доказывается следующая теорема: Если $A$ и $B$ — вполне ограниченные конгруэнтные подмножества урысоновского универсального метрического пространства $U$ со счетной базой (т. е. пространства, которое для любого метрического пространства со счетной базой содержит подмножество, ему изометричное (Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 2, М. — Л., Гостехиздат, 1951, 747—777)), то существует изометрическое отображение пространства $U$ на себя, переводящее $A$ в $B$.

Строится пример двух конгруэнтных счетных замкнутых множеств, которые не могут быть переведены одно в другое изометрическим отображением пространства $U$ на себя. А. С. Пархоменко

**1181. О критерии компактности Фрейденталя. Грот** (On a compactness criterion of freudenthal. Groot J. de), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, **A58**, № 1, 130—131; Indagationes math., 1955, **17**, № 1, 130—131 (англ.)

Фрейденталем была установлена (Indagationes math,, 1951, **13**, 295) следующая теорема: Для компактности метрического пространства $M$ со счетной базой необходимо и достаточно, чтобы оно обладало следующим свойством: если $F$ — такая система действительных непрерывных функций, определенных на $M$, что 1) при $f_1, f_2 \in F$ функция $\max(f_1, f_2)$ принадлежит $F$, 2) $\inf f = 0$ для всех $f \in F$, то существует последовательность $\{x_i\}$ точек множества $M$, для которой $\lim f(x_i) = 0$ (какова бы ни была функция $f \in F$).

В реферируемой работе приведено упрощенное доказательство достаточности этого условия. Приводимое доказательство справедливо для произвольных нормальных пространств. А. С. Пархоменко

**1182. Замечание об универсальных пространствах. Кралик** (Megjegyzés az univerzàlis terekre vonatkozóan. Králik Dezsö), Magyar tudomán. akad. mat. és fiz. osztályának közlemenyei, 1953, **3**, № 4, 561—562 (венг.)

Ответ на одно замечание П. С. Александрова. Согласно теореме Урысона, каждое сепарабельное метрическое пространство $R$ гомеоморфно подмножеству $R'$ основного параллелепипеда $Q$ гильбертова пространства. При этом отображение $h$ пространства $R$ на $R'$ равномерно непрерывно.

Доказывается, что если $R$ не является вполне ограниченным, то обратное отображение $h^{-1}$ не будет равномерно непрерывным. В доказательстве используется только компактность параллелепипеда $Q$, что позволяет распространить его на другие случаи. Ф. В. Широков

**1183. Об одной теореме Сы Цзянь-Ху. Кордуняну** (Asupra unei teoreme a lui Sze-Tsen Hu. Cordunneanu C.), Studii şi cercetări ştiinţ, 1954, **5**, № 1—2, 45—47 (рум.; резюме франц., русс.)

Топологическое произведение бесконечного множества групп, изоморфных аддитивной группе вещественных чисел, является примером равномерно архимедова пространства, в котором ни одна точка не имеет ограниченных окрестностей (в смысле Сы Цзянь-Ху). Этот пример опровергает теорему IV из работы Сы Цзянь-Ху (Sze Tsen-Hu, Portug. math., 1947, 6, 40).

Н. Я. Виленкин

**1184. Выпуклая метрика с однозначными сегментами. Бинг** (A convex metric with unique segments. Bing R. H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 1, 167—174 (англ.)

Пусть $M$ — непрерывная кривая (локально-связный континуум, для которого существует выпуклая метрика). Тогда для любых двух точек $p \in M$ и $q \in M$ существует простая дуга $\widehat{pq} \subseteq M$ с началом в точке $p$ и концом в точке $q$, изометричная прямолинейному интервалу. Всякая такая дуга называется сегментом. Вообще говоря, при фиксированных точках $p$ и $q$ указанный сегмент не единственен. Доказывается теорема: Для каждой непрерывной кривой $M$ существует такое плотное в ней подмножество $W$ и такая выпук-

лая метрика, что каждая пара точек $p$ и $q$ из $M$ принадлежит единственному сегменту $\widehat{pq}$. Л. Д. Кудрявцев

**1185. Заметка о линейных пространствах и уникогерентности. Грейс** (A note on linear spaces and unicoherence. Grace Edward E.), J. Elisha Mitchel Scient. Soc., 1954, **70**, № 1, 33—34 (англ.)

Эйленберг доказал (Eilenberg, Amer. J. Math., 1941, **63**, 39—45), что связное локально-связное сепарабельное невырожденное топологическое пространство $X$ тогда и только тогда гомеоморфно подмножеству линейного континуума, когда множество $P(x)$ всех недиагональных точек $(x, y) \in X \times X\ (x \neq y)$ несвязно. Автор утверждает, что теорема Эйленберга справедлива без требования сепарабельности, если рассматривать пространства Мура (пространства, удовлетворяющие аксиомам 0 и 1 книги Мура (Moore R. L., Foundations of point set theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Pub., 1932, **13**).

Континуум называется уникогерентным, если его можно представить в виде объединения двух континуумов, пересечение которых связно. Сформулирована теорема: Неуникогерентный континуум в пространстве Мура содержит три точки, любые две из которых можно соединить континуумом в $X$, не содержащим третьей точки. На примере показано, что такой континуум может существовать и в уникогерентных пространствах Мура. А. Д. Тайманов

**1186. О многообразии Прюфера и проблеме Александрова-Хопфа. Ганя** (On the Prüfer manifold and a problem of Alexandroff and Hopf. Ganea Tudor), Acta scient. math., 1954, **15**, № 3—4, 231—235 (англ.)

В 1935 г. П. С. Александров и Г. Хопф поставили проблему о том, существует ли регулярное, но не нормальное пространство разбиения какого-нибудь нормального пространства. Автор решает эту проблему отрицательно.

Рассмотрим топологическое произведение $M$ открытой полуплоскости на пространство, состоящее из континуума изолированных точек, и нетриангулируемое многообразие Прюфера $W$ (Radó T., Acta scient. math., 1925, **2**, 101—121). Пространство $M$ метризуемо и, следовательно, нормально; пространство $W$ связно, регулярно, даже локально-евклидово, но не нормально. Оказывается, что $W$ является пространством разбиения пространства $M$, причем получающееся при этом разбиении отображение $M \to W$ сильно непрерывно, открыто и даже локально-гомеоморфно. Ю. М. Смирнов

**1187. Проекционные спектры и определяемые ими пространства. Шура-Бура М. Р.,** Матем. сб., 1955, **36**, № 1, 93—110

Проекционный спектр в широком смысле слова, по определению, данному референтом, есть направленное множество конечных симплициальных комплексов $\alpha$, $\beta$, ... вместе с «проекциями» (т. е. симплициальными отображениями): если $\beta > \alpha$, то определены одна или несколько проекций $\pi_\alpha^\beta$ комплекса $\beta$ в комплекс $\alpha$, причем для данных $\alpha$ и $\beta$ все эти проекции комбинаторно близки между собою (если $\pi_\alpha^\beta$ и $\pi'^\beta_\alpha$ — две проекции, то они отображают любой симплекс $t_\beta \in \beta$ в симплексы $\pi_\alpha^\beta t_\beta$, $\pi'^\beta_\alpha t_\beta$, являющиеся гранями одного и того же симплекса комплекса $\alpha$). Кроме того, предполагается выполненным условие транзитивности: если $\gamma > \beta > \alpha$ и $\pi_\beta^\gamma$ и $\pi_\alpha^\beta$ суть проекции, то и $\pi_\alpha^\beta \pi_\beta^\gamma$ есть проекция. Если для каждой пары $\beta > \alpha$ определена лишь одна проекция, то спектр называется однозначным.

Примером спектра может служить естественным образом частично упорядоченное множество нервов всех открытых покрытий данного бикомпактного пространства. Задача, поставленная референтом: всякий ли спектр является спектром открытых покрытий некоторого бикомпактного пространства? — остается нерешенной. Автор, однако, строит для всякого спектра некоторое тесно связанное с ним пространство, оказывающееся бикомпактным. При этом для однозначного спектра пространство, им определенное, оказывается тождественным с пространством, ранее определенным для таких спектров А. Г. Курошем. Каждый спектр порождает некоторое семейство замкнутых покрытий определенного этим спектром пространства. При этом спектр оказывается хаусдорфовым тогда и только тогда, когда порожденное им семейство покрытий содержит сколь угодно мелкие покрытия (т. е. вписанные в любое наперед заданное открытое покрытие). Автор устанавливает и дальнейшие связи между спектрами и семействами замкнутых покрытий, а также доказывает следующую теорему: Для того чтобы $T_1$-пространство $Y$ было непрерывным образом данного бикомпактного $T_1$-пространства $X$, необходимо и достаточно, чтобы пространство $Y$ было гомеоморфно пространству спектра направленного полного семейства конечных замкнутых покрытий пространства $X$. При этом семейство $\mathfrak{S}$ покрытий данного пространства $X$ называется полным, если, каковы бы ни были $\alpha \in \mathfrak{S}$ и точка $x \in X$, найдется такое покрытие $\beta \in \mathfrak{S}$, вписанное в $\alpha$, что пересечение всех элементов покрытия $\beta$, содержащих точку $x$, не пересекается ни с одним элементом покрытия $\alpha$, не содержащим точки $x$. Легко доказывается, что всякое направленное семейство покрытий, содержащее сколь угодно мелкие покрытия, всегда является полным. П. С. Александров

**1188. Одно свойство метрики Буземана для подпространства произвольного метрического пространства. Вальс-Флорес** (A property of Busemann's metric for the subspaces of an arbitrary metric space. Valle Flores Enrique), Bol. Soc. mat. mexicana, 1953, **10**, 71—75 (исп.)

Цель заметки состоит в доказательстве того, что последовательность подмножеств метрического пространства, которая является последовательностью Коши в смысле расстояния между множествами, введенного Буземаном (Trans. Amer. Math. Soc., 1944, **56**, 200—274), сходится топологически. L. M. Blumenthal

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 5, 456.

**1189. Заметка о дендритах и деревьях. Уорд** (A note on dendrites and trees. Ward L. E., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 6, 992—994 (англ.)

Деревом автор называет связный бикомпакт, в котором для каждой пары точек имеется отделяющая. Дается описание деревьев на языке частично упорядоченных топологических пространств. Порядок в частично упорядоченном множестве $X$ называется полунепрерывным, если множество $\in L(x)$ всех точек $a \leqslant x$ и множество $M(x)$ всех точек $a \geqslant x$ замкнуты для всякого $x \in X$. Частичный порядок плотен, если для каждых двух точек $x < y$ найдется такая точка $z$, что $x < z < y$.

Теорема 1. Для того чтобы бикомпакт был деревом, необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде частично упорядоченного множества, удовлетворяющего следующим условиям: 1) порядок полунепрерывен; 2) порядок плотен; 3) для каждых двух точек $x \in X$ и $y \in X$ множество $L(x) \cap L(y)$ непусто и упорядочено; 4) $M(x) \setminus x$ открыто для всех $x \in X$.

Необходимые и достаточные условия для того, чтобы компакт $X$ был дендритом (метризуемым деревом) те же, что и в теореме 1. С. С. Рышков

**1190. О метрическом порядке замкнутых множеств евклидова пространства. Шварц А. С.,** Матем. сб., 1955, **36**, № 2, 263—270

Доказаны две теоремы, относящиеся к понятию метрического порядка компактов (РЖМат, 1955, 135).

1. Размерно однородный $(n-1)$-мерный кривой полиэдр, лежащий в $n$-мерном евклидовом пространстве, метрически правилен.

2. Для всякого $n$-мерного компакта Ф, лежащего в евклидовом пространстве $R^s$, $s \geqslant 2n-2$, существует такая топологическая деформация $f_t$ компакта Ф в $R^s$, что при любом $t > 0$ компакт $f_t(\Phi)$ метрически правилен. Такой деформацией можно сколь угодно хорошо аппроксимировать любую деформацию компакта Ф в $R^s$. В. А. Ефремович

**1191. Обобщение теоремы Какутани о непрерывной функции, заданной на сфере. Гордон И. И.,** Успехи метем. наук, 1955, **10**, № 1, 97—99

Известная теорема Какутани (если на сфере $S^2$ определена непрерывная действительная функция $f(x)$, то существуют такие три точки, $x_1, x_2, x_3 \in S^2$, что радиусы, ведущие в них, попарно ортогональны и $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$) породила интересные ее обобщения в различных направлениях (см., например, Livesay, Bull. Amer. Math. Soc., 1952, 58, № 4, 492· Jamabe, Jujobo, Osaka Math. J., 1950, **19**, № 2; РЖМат, 1955, 3122 и др.). Здесь дается обобщение в новом направлении. Как замечает автор, доказательство Какутани приводит к более общему результату: каков бы ни был равносторонний треугольник на сфере $S^2$, существует конгруэнтный ему треугольник, в вершинах которого значения функции $f(x)$ совпадают. Автор дает обобщение последнего результата на случай любого равнобедренного треугольника. Вопрос о доказательстве теоремы для любого (разностороннего) треугольника остается открытым. Для треугольника со сторонами $\pi$, $\alpha$, $\pi - \alpha (0 < \alpha < \pi)$ справедливость последней гипотезы вытекает из теоремы Ливси (РЖМат, 1955, 3122). В. А. Ефремович

**1192. О многогранниках рода нуль. Эррера** (Sur les polyèdres de genre zéro. Errera Alfred), Univ. Roma. Ist. naz. Alta mat. Rend. mat. e appl. 1952, (5) **11**, 315—322 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

Автор предлагает метод классификации сферических многогранников, у которых в каждой вершине встречаются точно три грани. Этот метод основан на теореме Уитнея (Whitney H., Ann. Math (2), 1931, **32**, 378—390), согласно которой на любом таком многограннике, в котором никакие три грани не образуют многосвязной области, можно провести простую замкнутую линию, не проходящую через вершины и точно по одному разу проходящую через любую грань.

W. T. Tutte

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 7, 640

**1193. О теоремах двойственности для произвольных множеств. Берикашвили Н. А.,** Сообщ. АН ГрузССР, 1954, **15**, № 7, 407—414

Рассматриваются различные типы проекционных спектров (в смысле референта), связанных с данным множеством, из которых одни (например, спектр открытых покрытий этого множества) по самому определению инвариантно с ним связаны и потому называются автором внутренними, другие (например, спектр покрытий данного множества множествами, открытыми во всем объемлющем пространстве) определены не инвариантным образом. Автор доказывает, что внешние и внутренние спектры рассматриваемых им типов содержат конфинальные подспектры, являющиеся конфинальными подспектрами одного и того же спектра. Отсюда вытекает, что гомологические построения, сделанные на основе внешних спектров, эквивалентны аналогичным построениям на основе внутренних спектров и потому инвариантны. Автор получает таким образом доказательства топологической инвариантности так называемых внешних групп Бетти произвольного множества, что и прилагается затем по известным образцам к доказательству теорем двойственности. Близкие построения содержатся в работе референта (РЖМат, 1954, 2537) и в работе К. А. Ситникова (РЖМат, 1954, 4769). П. С. Александров

**1194. О некотором типе связности. Уайлдер** (A type of connectivity. Wilder Raymond Louis), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 264—265 (англ.)

Краткое сообщение без доказательств. Рассматривается в данном локально-бикомпактном пространстве пара открытых множеств $P$, $Q$, причем $P \supset Q$ и $Q$ бикомпактно. Множество $M$ данного пространства «связно» по отношению к заданной группе циклов, если при любом выборе пары $P$, $Q$ лишь конечное число циклов данной группы на $M \cap Q$ может быть линейно-независимым по отношению к гомологиям в $M \cap P$. Рассматриваются различные видоизменения и специализации этого понятия. П. С. Александров

**1195. Об обобщениях классификационных теорем Хопфа. Миядзаки** (On generalizations of Hopf's classification theorems. Miyazakai Hiroshi), Tohoku Math. J., 1954, 5, № 3, 284—289 (англ.)

Классификационная теорема Хопфа обобщена на случай любых паракомпактных и нормальных пространств. Рассмотрены как обыкновенные гомотопии, так и равномерные. Доказательство ведется обычным методом: данное непрерывное отображение $f$ аппроксимируется отображением, являющимся суперпозицией некоторого канонического сдвига в нерв (конечного — в случае равномерно-гомотопической теории) покрытия $\alpha$ рассматриваемого пространства $X$ и (симплициального) отображения нерва $\alpha$ в сферу $Y = S^n$ (или более общее пространство $Y$). Это последнее отображение называется мостом для данного отображения $f$. Этот обычный аппарат доказательства расчленяется на ряд лемм, в частности устанавливаются условия существования «мостов».

П. С. Александров, М. М. Постников

**1196. О группе коэффициентов в теории когомологий. Гордон** (On the coefficient group in cohomology. Gordon W. L.), Duke Math. J., 1954, **21**, № 1, 139—153 (англ.)

Изучается зависимость групп когомологий компактных хаусдорфовых пространств от выбора группы коэффициентов. Именно, каждому гомоморфизму $h: G \to H$ групп коэффициентов ставится в соответствие естественный гомоморфизм $h^*: H^p(X, A; G) \to H^p(X, A; H)$ групп когомологий (гомоморфизм, коммутирующий с кограничными гомоморфизмами $\delta$ и с гомоморфизмами, индуцированными непрерывными отображениями).

Одним из основных результатов работы является следующая теорема: Пусть $0 \to K \xrightarrow{k} G \xrightarrow{h} H \to 0$—точная последовательность; тогда существует такой естественный гомоморфизм $\Delta$: $H^p(X, A; H) \to H^{p+1}(X, A; K)$, что последовательность

$$\xrightarrow{\Delta} H^p(X, A; K) \xrightarrow{k^*} H^p(X, A; G) \xrightarrow{h^*} \xrightarrow{h^*} H^p(X, A; H) \xrightarrow{\Delta} H^{p+1}(X, A; K) \to$$

является точной. Далее доказано, что если группа коэффициентов представлена в виде прямой суммы, то и группа когомологий разлагается естественным образом в прямую сумму. Отсюда выводится аналогичный результат для предельных групп прямых спектров. Даны приложения полученных теорем к теории размерности. Р. В. Гамкрелидзе

**1197. Дигомология. Зиман** (Dihomology. Zeeman Erik Christopher), Proc. Internat,

Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 269—270 (англ.)

Дигомологией автор называет гомологическую теорию, основанную на парах симплексов, подобно тому как обычные гомологии и когомологии основываются на рассмотрении одиночных симплексов. Автор утверждает, что с помощью дигомологий можно получить спектральную последовательность Лере, а также, что с каждым симплициальным комплексом $K$ и группой коэффициентов $G$ можно связать топологически инвариантную спектральную последовательность, второй член которой $E_2 = \Sigma E_2^{p,q} = \Sigma H_q(K, H^p(st\sigma, G_n))$ есть группа гомологий комплекса $K$ по системе локальных групп коэффициентов, образованной группами когомологий звезд симплексов $\sigma \in K$, а предельный член $E_\infty$ есть группа, присоединенная к группе-когомологий комплекса $K$ с коэффициентами в $G$, снабженной подходящей фильтрацией (терминологию см. в РЖМат, 1953, 127). А. С. Шварц

**1198. Об одномерной категории. Г а н я** (Asupra categoriei 1-dimensionale. G a n e a T u d o r), Bul. ştiinţ. Acad. R. P., Romîne Sec. mat. şi fiz., 1953, 5, № 1, 127—133 (рум.; резюме русс., франц.)

Одномерной категорией $\mathrm{cat}_1 E$ компакта $E$ называется наименьшее число $k$, для которого существует покрытие компакта $E$, состоящее из $k$ таких связных областей, что замкнутый путь, проходящий в какой-либо из этих областей, гомотопен нулю в $E$. В заметке рассматриваются локально-связные континуумы, имеющие односвязное накрывающее пространство.

Т е о р е м а: Если непрерывное отображение $f: X \to Y$ порождает изоморфное отображение фундаментальной группы $\pi_1(X)$ в группу $\pi_1(Y)$, то $\mathrm{cat}_1 X \leqslant \mathrm{cat}_1 Y$.

Строится пример отображения компакта $X$ на компакт $Y$, при котором фундаментальная группа $\pi_1(X)$ изоморфно отображается на $\pi_1(Y)$, и тем не менее $\mathrm{cat}_1 X < \mathrm{cat}_1 Y$. А. С. Шварц

**1199. Итерированные произведения и группы $\pi_r(S^p \cup S^q)$. Ч ж а н Су-чэн** (叠次乘積與$\pi_r(S^p \cup S^q)$ 張素誠), «數學學報» (Шусюэ сюэбао), 1954, 4, № 4, 483—490 (англ.)

Дано геометрическое описание образующих группы $\pi_r(S^p \cup S^q)$ для $r \leqslant 2(p+q) - 4$ (РЖМат, 1954, 5084). М. М. Постников

**1200. Группы и пространства петель. З а м е л ь с о н** (Groups and spaces of loops. S a m e l s o n H.), Comment. math. helv., 1954, 28, № 4, 278—287 (англ.)

$H$-пространством $(X, \mu)$ называется топологическое пространство $X$, в котором определено умножение $\mu: X \times X \to X$, обладающее гомотопической единицей (т. е. таким элементом $x_0$, что отображения $x \to \mu(x_0, x)$ и $x \to \mu(x, x_0)$ гомотопны тождественному). Пространство топологической группы и пространство петель (замкнутых путей), имеющих общее начало, являются $H$-пространствами. Если $(X, \mu)$ и $(X', \mu')$ — два $H$-пространства, то отображение $f: X \to X'$ называется $H$-гомоморфизмом, если отображения $\varphi_1, \varphi_2: X \times X \to X'$, определяемые формулами $\varphi_1(x, y) = f\mu(x, y)_\mu \varphi_2, (x, y) = \mu'(f(x), f(y))$, гомотопны.

Т е о р е м а 1: Пусть $G$ — топологическая группа, $B$ — база универсального расслоенного пространства группы $G$ (т. е. классифицирующее пространство группы $G$), $\Lambda(B)$ — пространство петель на $B$, начинающихся в одной и той же точке. Существует $H$-гомоморфизм группы $G$ в $\Lambda(B)$, являющийся слабо гомотопической эквивалентностью (т. е. порождающий изоморфизм гомотопических и, следовательно, гомологических групп пространств $C$ и $\Lambda(B)$).

Это предложение применяется для доказательства одного частного факта о понтрягинском умножении в пространствах Эйленберга — Маклейна, а также для доказательства того, что группа $S^3$ кватернионов, по норме равных единице, не является гомотопически абелевой (т. е. отображения $\theta_1, \theta_2: S^3 \times S^3 \to S^3$, определяемые формулами $\theta_1(x, y) = xy$ и $\theta_2(x, y) = yx$, негомотопны). Автор указывает, что последнее утверждение независимо доказал Уайтхед. А. С. Шварц

**1201. О группах $H(\Pi, n)$ II. (Методы вычисления). Э й л е н б е р г, М а к - Л е й н** (On the groups $H(\Pi, n)$. II. (Methods of computation). E i l e n b e r g S a m u e l, M a c - L a n e S a u n d e r s), Ann. Math., 1954, 60, № 1, 49—139 (англ.)

Статья является продолжением работы I (РЖМат, 1954, 2907) и посвящена эффективному вычислению групп $H(\Pi, n)$ в случае, когда группа $\Pi$ имеет конечное число образующих. Доказывается, что комплекс $A(\Pi, n)$ гомологически эквивалентен некоторому комплексу $M(\Pi, n)$, имеющему в каждой размерности конечное число образующих. Для циклических групп комплекс $M(\Pi, n)$ определяется формулами

$$M(Z, n) = B_N^{n-1} M(Z, 1),\ M(Z_h, n) = B_N^{n-1} M(Z_h, 1),$$

где $M(Z, 1)$ — кольцо с базисом $(1, u)$, причем $u^2 = 1$, $du = 1$, $\partial u = 0$, $\alpha(1) = 1$, $\alpha(u) = 0$, а $M(Z_h, 1)$ — кольцо с базисом $(1, v_1, \ldots; w_0, w_1, \ldots)$, причем $dv_k = 2k$, $dw_k = 2k+1$, $\partial v_k = hw_{k-1}$, $\partial w_k = 0$, $v_k v_m = \binom{k+m}{k} v_{k+m}$, $w_k w_m = 0$, $v_k w_m = \binom{k+m}{k} w_{k+m} = w_m v_k$. Для группы $\Pi = \Pi_1 + \ldots + \Pi_t$ комплекс $M(\Pi, n)$ определяется формулой $M(\Pi, n) = M(\Pi_1, n) \otimes \ldots \otimes M(\Pi_t, n)$. Это определение оправдывается гомологической эквивалентностью комплексов $A(\Pi, n)$ и $A(\Pi_1, n) \bigotimes \ldots \ldots \bigotimes A(\Pi_t, n)$, подробно изучаемой в работе как частный случай некоторых общих конструкций, причем (что является наиболее трудным и деликатным) в обоих направлениях в явном виде указываются естественные отображения, осуществляющие эту эквивалентность.

В связи с этим предложением авторы рассматривают так называемые «соотношения Кюннета», связывающие группу $H(K \otimes L)$ с группами $H(K)$ и $H(L)$. Несмотря на то, что эти соотношения весьма часто применяются в современных работах (можно сказать, что они возведены в ранг «общеизвестных фактов»), никакого доказательства этих соотношений до сих пор не было опубликовано. Авторы, повидимому, впервые излагают полное доказательство соотношений Кюннета, пользуясь при этом новым весьма удобным определением произведения кручения. Именно, произведение кручения $\mathrm{Tor}(A, B)$ двух абелевых групп $A$ и $B$ определяется как абелева группа с образующими $\tau_h(a, b)$, где $a \in A$, $b \in B$, $h$ — любое целое число, для которого $ha = hb = 0$, подчиненными соотношениям: $\tau_h(a_1, b_1 + b_2) = \tau_h(a_1, b_1) + \tau_h(a_1 b_2)$; $\tau_h(a_1 + a_2, b) = \tau_h(a_1, b) + \tau_h(a_2, b)$; $\tau_{hk}(a, b) = \tau_h(ka, b) = \tau_h(a, kb)$.

В первую очередь авторы вычисляют группы $H(\Pi, n, R)$ над полем $R$ рациональных чисел. С этой целью они любой абелевой группе $\Pi$ относят два градуированных кольца, коммутативное $\Gamma(\Pi)$ и косокоммутативное $\Lambda(\Pi)$. Кольцо $\Gamma(\Pi)$ порождается элементами вида $\gamma_t(x)$, где $x \in \Pi$, а $t$ — натуральное число, имеющими, по определению, степень $2t$ и подчиненными соотношениям $\gamma_0(x) = 1$, $\gamma_t(rx) = r^t \gamma_t(x)$, $\gamma_t(x+y) = \Sigma_{i+j=t} \gamma_i(x) \gamma_j(y)$, $\gamma_s(x) \gamma_t(x) = \binom{s+t}{s} \gamma_{s+t}(x)$.

Кольцо $\Lambda(\Pi)$ определяется как кольцо с умножением $\wedge$, подчиненным условию $x \wedge x = 0$, порожденное единицей и элементами группы $\Pi$. Если $\Pi$ — векторное пространство, то $\Lambda(\Pi)$ — обычная внешняя алгебра, а $\Gamma(\Pi)$ — алгебра многочленов от переменных второй степени. Естественным образом определяются гомоморфизм $\gamma : \Gamma(\Pi) \to H(\Pi, n)$ при четном $n$ и гомоморфизм $\lambda : \Lambda(\Pi) \to H(\Pi, n)$ при нечетном $n$. Гомоморфизмы $\gamma$, $\lambda$ имеют соответственно степени $n/2$, $n$. Оказывается, что соответствующие гомоморфизмы

$$\Gamma(\Pi \otimes R) \to H(\Pi, n, R), \quad \Lambda(\Pi \otimes R) \to H(\Pi, n, R)$$

являются изоморфизмами. Таким образом, алгебраическое строение (без учета степеней) колец $H(\Pi, n, R)$ зависит только от четности числа $n$.

В заключение работы авторы находят строение колец $H(\Pi, n)$ в малых размерностях для $n \leqslant 6$ и на этой основе вычисляют соответствующие группы когомологий. При этом, кроме изложенных выше понятий и результатов, они пользуются многими другими, весьма интересными фактами, которые не отражены в реферате за недостатком места. Отметим, в частности, развитую в гл. 2 общую теорию отклонений функторов от аддитивности. М. М. Постников

**1202. Послойная гомотопическая эквивалентность косых произведений.** Дольд (Über fasernweise homotopieäquivalenz von Faserräumen. Dold Albrecht), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 210—211 (нем.)

Пусть $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ — косые произведения с одной и той же базой, $B_1$, $B_2$ — пространства этих произведений, а $p_1$, $p_2$ — проекции. Непрерывное отображение $h: B_1 \to B_2$ называется послойным, если $p_2 h = p_1$. Косые произведения $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ называются послойно гомотопически эквивалентными, если существуют такие послойные отображения $h_1 : B_1 \to B_2$, $h_2 : B_2 \to B_1$, что отображения $h_1 \circ h_2$, $h_2 \circ h_1$ послойно гомотопны тождественному отображению.

Сформулирована следующая теорема: Пусть общая база косых произведений $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ является полиэдром, а их слои локально-компактны. Если существует послойное отображение $h : B_1 \to B_2$, которое, рассматриваемое на некотором слое произведения $\mathfrak{B}_1$, является гомотопической эквивалентностью, то произведения $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ послойно гомотопически эквивалентны.

Р. В. Гамкрелидзе

**1203. Об обратных элементах в хаусдорфовых полугруппах, вложенных в евклидово пространство.** Уоллес (Inverses in Euclidean mobs. Wallace A. D.), Math. J. Okayama Univ., 1953, **3**, № 1, 23—28 (англ.)

Статья посвящена изучению хаусдорфовых полугрупп, т. е. хаусдорфовых пространств с непрерывным ассоциативным умножением (автор пользуется термином «mob» — «толпа»). Основной результат статьи: если компактная полугруппа $S$ с единицей $u$ расположена в $R^n$, $n > 2$, то множество всех обратных элементов лежит на границе полугруппы $S$. С. С. Рышков

**1204. Топологическая инвариантность идеалов в хаусдорфовых полугруппах.** Уоллес (Topological invariance of ideals in mobs. Wallace A. D.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 6, 866—868 (англ.)

Левым идеалом в хаусдорфовой полугруппе $S$ (т. е. хаусдорфовом пространстве $S$ с непрерывным ассоциативным умножением) называется такое непустое множество $T$, что $ST \subseteq T$. Соответственно определяются правый и двусторонний идеалы. Доказывается теорема: Пусть $S$ — связная компактная полугруппа размерности $\leqslant n$ и пусть $N \subset S$ — такое замкнутое множество с ненулевой группой когомологий $H^n(N, G)$, что $N \subset t_1 N$ для некоторого элемента $t_1 \in S$. Тогда минимальный двусторонний идеал $K$ полугруппы $S$ есть также минимальный правый идеал, причем в $K$ содержится каждый носитель каждого ненулевого элемента группы $H^n(N, G)$ и каждый такой носитель есть левый идеал в $S$. Если к тому же $N \subset N t_2$ для некоторого $t_2 \in S$, то $K$ является группой и единственным носителем каждого ненулевого элемента из $H^n(N, G)$. Если эта полугруппа обладает еще и двусторонней единицей, то из теоремы следует топологическая инвариантность минимального идеала. С. С. Рышков

**1205. Теорема об отображениях топологической группы в окружность.** Планкетт (A theorem about mappings of a topological group into the circle. Plunkett R. L.), Michigan Math. J., 1953—1954, **2**, № 2, 123—125 (англ.)

Пусть $S$ — единичная окружность комплексной плоскости с обычными топологией и умножением, а $G$ — компактное топологическое пространство. Во множестве $\{f\}$ непрерывных отображений $G \to S$ вводятся компактно-открытая топология и следующая операция умножения: $[f_1 \cdot f_2](x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, $x \in G$. Единица $f_0$ и элемент $f^{-1}$, обратный к $f$, определяются соотношениями: $f_0(x) = 1$, $f^{-1}(x) = [f(x)]^{-1}$, $x \in G$. В результате этого множество $\{f\}$ обратится в коммутативную топологическую группу.

В группе $\{f\}$ выделяется подгруппа $P(G)$ отображений, стягиваемых в точку. Доказывается, что если $G$ — компактная, связная, коммутативная топологическая группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, то фактор-группа $\{f\}/P(G)$ изоморфна группе характеров группы $G$. С. С. Рышков

**1206. Асимптотичность в топологической динамике.** Бом (Asymptoticity in topolcgical dynamics. Baum John D.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **77**, № 3, 506—519 (англ.)

Известные в теории динамических систем понятия асимптотичности двух траекторий и асимптотического приближения траекторий к своему $\alpha$- или $\omega$-предельному множеству переносятся на более общие непрерывные группы («фазовые» группы) гомеоморфных преобразований топологических («фазовых») пространств. В основном автор ограничивается рассмотрением сепарабельных групп, представимых в виде: $C \times I^m \times R^n$, где $C$ — компактная абелева группа, $I$ — аддитивная группа целых чисел, $R$ — аддитивная группа всех действительных чисел, $n$ и $m$ — целые числа.

Определение асимптотичности опирается на понятие полной полугруппы фазовой группы, т. е. такой полугруппы, которая содержит некоторый двусторонний сдвиг любого компактного подмножества фазовой группы. В качестве примера приведем определение асимптотичности двух точек фазового пространства в случае, когда оно является метрическим пространством. Пусть $X$ — метрическое пространство с метрикой $\rho$ и пусть $P$ — полная полугруппа фазовой группы $T$. Точки $x, y \in X$ называются $P$-асимптотическими, если $x \neq y$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое преобразование $q \in P$, что $\rho[qp(x), qp(y)] < \varepsilon$ для любого $p \in P$. Аналогично определяется $P$-асимптотичность точки по отношению к множеству фазового пространства и вводится понятие $P$-предельного множества точки. Показано, что $P$-предельное множество точки есть наименьшее множество, к которому точка может быть $P$-асимптотична; точка в действительности является $P$-асимптотической к своему $P$-предельному множеству в том и только в том случае, когда она не принадлежит ему.

Далее вводится понятие неустойчивой группы преобразований. Показано, что в случае, когда фазовое пространство $X$ есть компакт, а $T$ — неустойчивая группа преобразований, изоморфная $I^n$, $P$-асимптотические точки всегда существуют.

В заключение автор рассматривает символическую группу преобразований, представляющую собой обобщение морсовских минимальных множеств (Morse M., Hedlund G. A., Amer J. Math., 1938, 60, 815—864). Эта группа дает целый ряд примеров асимптотичности.

М. И. Грабарь

**1207. Теорема Римана—Роха и арифметический род Тодда алгебраических многообразий. Хирцебрух** (Der Satz von Riemann—Roch und das Toddsche arithmetische Geschlecht für algebraische Mannigfaltigkeiten. Hirzebruch Friedrich E. P.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 232—234 (нем.)

Пусть $V_n$ — комплексно-аналитическое многообразие комплексной размерности $n$, $W$ — аналитическое косое произведение над $V_n$ с $q$-мерным комплексным векторным пространством $C_q$ в качестве слоя с группой $CL(q, C)$ в качестве структурной группы. Пусть далее $H^i(V_n, W)$ — $i$-мерная группа когомологий многообразия $V_n$ с коэффициентами в пучке локальных секущих поверхностей косого произведения $W$. Все $H^i(V_n, W)$ являются конечномерными векторными пространствами, исчезающими при $i > n$.

Сформулирована следующая теорема. «Характеристика Эйлера—Пуанкаре» $\chi(V_n, W) = \Sigma_{i=0}^{n}(-1)^i \dim H^i(V_n, W)$ представляется в виде полинома от одномерного целочисленного класса Черна $c_1 \in H^2(V_n, Z)$, от понтрягинских классов многообразия $V_n$ и от классов Черна косого произведения $W$.

Р. В. Гамкрелидзе

**1208 К. Введение в комбинаторную топологию. Понтрягин** (Introducere în topologia combinatorie. Pontreaghin L. S. București, 1955, 166 p., 12 lei, Litografiat), Bul. bibliogr., 1955, А4, № 9, 7 (рум.)

Перевод с русского языка.

---

См. также: 918, 1057, 1090, 1091, 1092, 1103, 1105, 1135, 1288, 1297, 1421 Д, 1583, 1603.

## ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

**1209. О множествах значений аддитивных вектор-функций. Гливенко Е. В.**, Матем. сб., 1954, 34(76), № 3, 407—416

Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — система $k$ векторов в $n$-мерном евклидовом пространстве $E^n$. Параллелоэдром называется совокупность всех векторов из $E^n$, представимых в виде $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k$, где $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Вершинами данного параллелоэдра называются векторы вида $\delta_1 e_1 + \ldots + \delta_k e_k$, где $\delta_i = 0$ или 1. Параллелоэдр $A$ называется продолжающим параллелоэдр $B$, если все вершины параллелоэдра $B$ служат вершинами параллелоэдра $A$.

Доказывается теорема: Пусть множество $M$ пространства $E^n$ является топологическим пределом последовательности параллелоэдров (топологический предел понимается в смысле отклонения по Хаусдорфу между множествами). Тогда можно найти последовательность продолжающих друг друга параллелоэдров, имеющую тот же топологический предел $M$. Эта теорема позволяет уточнить теорему К. И. Чуйкиной (Докл. АН СССР, 1951, 76, № 6, 801—804) о множестве значений аддитивной вектор-функции, заданной на $B$-теле.

Л. Д. Кудрявцев

**1210. Определение значения меры для области $n$-мерного евклидова пространства по ее значениям для всех полупространств. Хачатуров А. А.**, Успехи матем. наук, 1954, 9, № 3, 205—212

Дается решение задачи, поставленной А. Н. Колмогоровым (РЖМат, 1955, 2613). Пусть мера гиперполосы, заключенной между двумя гиперплоскостями, перпендикулярными к единичному вектору $O\omega$ и отстоящими от фиксированной точки $O$ на $t$, равна $\Phi_n(t, \omega)$. Тогда мера сферы с центром в точке $O$ радиуса $r$ определится формулами

$$S(r) = \frac{\pi^{2k} k!}{(2k)!\, r} \frac{d^k}{(dr^{-2})^k} \frac{\Phi_{2k+1}(r)}{r^{2k-1}},$$

$$S(r) = \frac{2}{(k-1)!\, r} \frac{d^k}{(dr^{-2})^k} \int_r^\infty \frac{r}{t^{2k}\sqrt{t^2 - r^2}} \Phi_{2k}(t)\, dt$$

соответственно при нечетном и четном $n$.

Здесь $\Phi_n(t) = c_n^{-1} \int_{\Omega_n} \Phi_n(t, \omega)\, d\omega$, где интегрирование проводится по поверхности $\Omega_n$ единичной сферы с центром в точке $O$ ($d\omega$ — элемент площади, $c_n$ — площадь поверхности $\Omega_n$). Таким образом, мера оказывается определенной для любой сферы с центром в произвольной точке $O$. Далее определяется плотность меры в точке $O$: $\gamma_n(O) = \lim_{r \to 0} \frac{S(r)}{V_n(r)}$, где $V_n(r)$ — объем $n$-мерной сферы радиуса $r$, и выводятся формулы, выражающие $\gamma_n(O)$ через значения меры для полупространств. Тогда мера любого борелевского множества $B$ определяется равенством $m(B) = \int_B \gamma_n(P)\, dV$

В заключение автор показывает, что выведенные формулы позволяют (при $n = 2k + 1$) положительно решить задачу о разложении функции точки по функциям, каждая из которых постоянна в гиперплоскостях, перпендикулярных к некоторому направлению в пространстве. Указывается, что это разложение при решении уравнений в частных производных может играть роль, аналогичную роли интеграла Фурье.

Ю. С. Очан

**1211. Линейное усиление теоремы Брунна—Минковского для замкнутых множеств. Оман** (Eine lineare Verschärfung des Brunn — Minkowskischen Satzes für abgeschlossene Mengen. Ohmann D.), Arch. Math., 1954, 6, № 1, 33—35 (нем.)

Пусть $\xi$ — некоторое направление в евклидовом пространстве $R_n$, $A$ — замкнутое ограниченное множество. $S(A, \xi)$ — максимум $(n-1)$-мерной меры сечения $A$ $(n-1)$-мерными плоскостями, перпендикулярными к $\xi$. Доказывается теорема: Если замкнутые ограниченные множества $A_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ хотя бы для одного направления $\xi$ имеют одинаковые значения функции $S(A_\varkappa, \xi)$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$, то справедливо неравенство

$$M\left(\sum_1^k \lambda_\varkappa A_\varkappa\right) \geqslant \sum_1^k \lambda_\varkappa M(A_\varkappa),$$

где $M$ — лебегова мера, $\Sigma_1^k \lambda_\varkappa A_\varkappa$ — сумма в смысле Минковского, т. е. совокупность точек $\Sigma \lambda_\varkappa x_\varkappa$, $x_\varkappa \in A_\varkappa$, $\lambda_\varkappa \geqslant 0$, $\Sigma \lambda_\varkappa = 1$. Доказательство проводится по индук-

ции относительно $n$ с использованием интегрального представления $M(A)$ через меру сечений. М. К. Фаге

**1212. Дифференцирование относительно системы окрестностей в торовидном пространстве. Эномото** (Dérivation par rapport à un système de voisinages dans l'espace de tore. Enomoto Shizu), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 8, 721—725 (франц.)

Торовидным пространством $I^N$ называется декартово произведение $\Pi_{i\in N} I_i$, где $N=\{1,2,\ldots\}$ и все $I_i$ тождественны окружности. Если $N$ разбито на две взаимно дополнительные части $J$ и $J'$, то $I^N$ можно отождествить с декартовым произведением $I^J \times I^{J'}$. Для каждого $x \in I^N$ через $x_J$ и $x_{J'}$ обозначаются проекции $x$ в $I^J$ и $I^{J'}$ такие, что $x=(x_J, x_{J'})$. Через $V_{n,J}(x)$ обозначается декартово произведение куба в $I^J$ с центром $x_J$ и ребром $1/n$ на $I^{J'}$.

В пространстве $I^N$ вводится система окрестностей следующим образом. Пусть $\lambda \equiv \{\varepsilon_i\}$ — последовательность действительных чисел, для которых существует такой индекс $i(\lambda)$, что $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\ldots=\varepsilon_{i(\lambda)}=0$ и $\varepsilon_{i(\lambda)+1}, \varepsilon_{i(\lambda)+2}\ldots$, монотонно убывая, стремятся к нулю и пусть $\Lambda$ — множество всех таких $\lambda$. Если $W_\lambda(x)$ означает семейство таких $V_{n,J_i}(x)$, что $1/n \leqslant \varepsilon_i$ для всех натуральных $n$ и всех $i=i(\lambda)+1,\ldots$, то $W_x = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda(x)$ и есть система окрестностей точки $x$ в $I^N$. Семейство окрестностей $W$ из системы $W_x$ обладает свойством (L), если для всех $\lambda \in \Lambda$ имеем $W_\lambda(x) \cap W \neq 0$.

Для функции множества $\Psi(V(x))$, определенной на $W_x$, положим $\overline{D}\Psi(x)$ равной верхней грани таких чисел $\nu$, для которых подсемейство $E\{V(x);\ V(x)\in W_x,\ \Psi(V(x))/\mu(V(x))>\nu\}$ из $W_x$ обладает свойством (L), где $\mu$ означает меру Лебега в $I^N$. Аналогично определяется $\underline{D}\Psi(x)$. Если $\underline{D}\Psi(x)=\overline{D}\Psi(x)$, то их общее значение называется производной функции $\Psi(x)$ в точке $x$ относительно системы окрестностей $W_x$ и меры $\mu$ и обозначается $D\Psi(x)$.

Доказывается теорема: Пусть $\Phi(A)$ — функция множества, принимающая числовые значения, для которой существует функция $f(x)$ такая, что $\Phi(A)=\int_A f(x)\,d\mu(x)$ для всех $\mu$-измеримых множеств $A$. Тогда $D\Phi(x)=f(x)$ для почти всех $x \in I^N$, где $D\Phi(x)$ означает производную функции $\Phi(A)$ в точке $x$ относительно системы окрестностей $W_x$ и меры $\mu$. Р. С. Гутер

**1213. Площади $k$-мерных непараметрических поверхностей в $(k+1)$-мерном пространстве. Томпсон** (Areas of $k$-dimensional nonparametric surfaces in $k+1$ space. Tompson Robert N.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **77**, № 3, 374—407 (англ.)

Изучается класс $\Omega_k$ отображений евклидова пространства $E_k$ ($k\geqslant 2$) в себя, определяющихся следующим образом: если $x \in E_k$, $x\equiv(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $j\leqslant k$ и $g(x)$ — действительная функция, определенная в $E_k$, то $f\in\Omega_k$, если

$$f(x)=(x_1,\ldots,x_{j-1},\ g(x),\ x_{j+1},\ldots,x_k).$$

Пусть $X\subset E_k$ — $k$-мерный куб, $L(f\,|\,X)$ — лебегова площадь поверхности $f\,|\,X$, $D_j g$ — частная производная от $g$ по направлению $j$-й оси. Для множества $A$ и элемента $x$ определяется функция кратности $N(f, A, x)$ так число элементов (может быть, $\infty$) множества $A\cap\{z\,|\,f(z)=x\}$. Устойчивой кратностью $S(f, A, x)$ называется $\varliminf_{g\to f} N(g, A, x)$, где $g\to f$ в смысле равномерной сходимости. Для отображений класса $\Omega_k$ имеют место равенства

$$\int_X |D_j g(x)|\,dL_k(x)=L(f\,|\,X)=\int_{E_k} S(f, X, y)\,dL_k y=$$

$$=\int_{E_k} N(f, X, y)\,dL_k y,$$

где $L_k$ означает лебегову меру размерности $k$.

Свойства отображений класса $\Omega_k$ прилагаются к изучению площади $k$-мерных поверхностей. Если $\pi$ означает ортогональную проекцию пространства $E_{k+1}$ в $E_k$ и для двух функций (или отображений) знак $\circ$ означает суперпозицию $(f\circ g)(x)=f(g(x))$, то для функции $\bar{g}(x)=(x_1, x_2, \ldots, x_k,\ g(x))$, $x\in E_k$, $\bar{g}\,|\,X$ есть $k$-мерная непараметрическая поверхность в $E_{k+1}$, а $\pi\circ\bar{g}\in\Omega_k$.

Пусть $G_n$ — группа всех линейных преобразований $R$ пространства $E_n$ в себя, для которых $|R(x)|=|x|$ при $x\in E_n$, и $\varphi_n$ — мера Хара в $G_n$ с $\varphi_n(G_n)=1$. Для $m\leqslant n$ и $x\in E_n$ определяется проектирующая функция $p_n^m(x)=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Определяются еще две числовые функции

$$\alpha(n)=L_n(E_n\cap\{x\,|\,|x|<1\}),$$

$$\beta(n, m)=\alpha(m)\,\alpha(n-m)\Big/\left[\alpha(n)\binom{n}{m}\right].$$

Если $\bar{g}$ означает функцию, определенную выше, а $J\bar{g}(x)$—асимптотический якобиан отображения, то имеют место равенства

$$\int_X J\bar{g}(x)\,dL_k(x)=L(\bar{g}\,|\,X)=\beta(k+1, k)^{-1}\times$$

$$\times\int_{G_{k+1}}\int_{E_k} S(p_{k+1}^k\circ R\circ\bar{g},\ X, y)\,dL_k y\,d\varphi_{k+1}R=$$

$$=\beta(k+1, k)^{-1}\int_{G_{k+1}}\int_{E_k} N(p_{k+1}^k\circ R\circ\bar{g},\ X, y)\,dL_k y\,d\varphi_{k+1}R.$$

Рассмотренным автором вопросам посвящен ряд работ, им не указанных (см., например, РЖМат, 1953, 152; 1955, 149). Обзор этих работ и подробное изучение функции кратности имеются в монографии А. Г. Витушкина «О многомерных вариациях» (М., Гостехиздат, 1955). Р. С. Гутер

**1214. О приближении интеграла Лебега при помощи римановых сумм. Дарбо** (Sull'approssimazione dell' integrale di Lebesgue mediante somme di Riemann. Darbo Gabriele), Ann. Univ. Ferrara, 1953, sez. VII, **2**, 13—16 (итал.)

Доказывается теорема: Если $f(x)$ интегрируема по Лебегу на $(a, b)$, то существует функция $\theta(\delta)$ сегментов $\delta\subset(a, b)$ такая, что каждому $\delta$ соответствует точка из $\delta$ и $\Sigma_n f[\theta(\delta_r)]\,m(\delta_r)$ стремится к интегралу Лебега от $f(x)$, когда максимальная длина $\delta_r$ стремится к нулю. [По существу эта теорема имеется у Хана (Hahn H., Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien. Abt. IIa, 1914, **123**, 713—743); см. также Denjoy A., C. r. Acad. sci., 1919, **169**, 219—221]. T. H. Hildebrandt

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 6, 514.

**1215. К теории интеграла. Шмидов Ф. И.**, Докл. АН СССР, 1954, **101**, № 1, 31—34

Доказываются теоремы:

1. Пусть $F(x)$ — конечная функция, определенная на ограниченном множестве $E$, для которой в каждой точке $x \in E$, исключая, быть может, точки счетного подмножества, имеется по крайней мере одно конечное асимптотическое производное число. Тогда $F(x)$ есть функция обобщенной ограниченной вариации в широком смысле на $E$.

2. Пусть $f(x)$ — конечная функция, равная в каждой точке сегмента $[a, b]$ за исключением, быть может, точек счетного множества, одному из четырех асимптотических производных чисел непрерывной на $[a, b]$ функции $F(x)$. Тогда $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ в смысле Данжуа — Хинчина и $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

А. Г. Джваршейшвили

**1216. Интеграл Перрона — Стильтьеса. Николеску** (Integrale Perron-Stieltjès. Nicolescu Lilly-Jeanne), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Pomîne. Sec. mat. şi fiz., 1954, **6**, № 4, 755—770 (рум.; резюме русс., франц.)

Изучается одна из разновидностей определения интеграла Перрона — Стильтьеса, основанная на использовании производных чисел относительно возрастающей функции. П. И. Романовский

**1217. О продолжении функций, удовлетворяющих условию Липшица. Ципсер, Гехер** (Extension of functions satisfying a Lipschitz condition. Czipszer J., Geher L.), Acta math. Acad. sci. hung., 1955, **6**, № 1—2, 213—220 (англ.; резюме русс.)

Пусть $X$ — метрическое пространство и $S$ — его подмножество. Зададим на $[0, \infty)$ функцию $\omega(t)$, непрерывную, монотонно не убывающую и такую, что $\omega(0) = 0$, $\omega(t) > 0$ для $t > 0$, $\omega(t_1 + t_2) \leqslant \omega(t_1) + \omega(t_2)$.

Теорема 1. Если на $S$ определена функция $f(x)$, удовлетворяющая неравенству

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K\omega(\overline{xy}), \qquad (1)$$

где $K$ — постоянная, $x, y \in S$ и $\overline{xy}$ — расстояние между $x$ и $y$, то определенная для $x \in X$ функция $F(x) = \inf_{y \in S} \{f(y) + K\omega(\overline{xy})\}$ является продолжением $f$ на $X$ и удовлетворяет тому же неравенству (1).

Теорема 2. Если определенная на замкнутом подмножестве $S$ функция $f$ удовлетворяет (1), где $K = K(x) \geqslant 0$ для $\omega(\overline{xy}) < \delta(x) > 0$, то ее возможно продолжить на $X$ так, чтобы удовлетворялось неравенство (1) с $K = K_1(x)$.

Отмечается, что теорема 1 в случае, когда $\omega(t) = t^\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, была доказана Банахом (Banach S., Wstep do teorii funkcji rzeczywistych, Warszawa—Wrocław, 1951). Указывается также, что Киршбраун (Kirszbraun M. D., Fundam. math., 1934, **22**, 77—108) доказал аналог теоремы 1 в случае, когда функция $f$ отображает подмножество $S$ евклидова пространства $R_n$ в $R_n$.

С. М. Никольский

**1218. Дифференцируемость однородных функций и геометрические свойства индикатрисы Каратеодори. Кухажевский** (Die Differenzierbarkeit der homogenen Funktionen und die geometrischen Eigenschaften der Indicatrix von Carathéodory. Kucharzewski M.), Ann. polon. math., 1955, **1**, № 2, 222—252 (нем.)

Рассматривается неотрицательная положительно однородная функция нескольких переменных $(f(\vartheta x) = \vartheta^\mu f(x),\ \vartheta > 0,\ \mu \neq 0,\ x \in E_n,\ n \geqslant 2)$. Изучается структура множеств уровня, например множества $E\{x \mid f(x) = 1\}$, называемого индикатрисой Каратеодори, в случае дифференцируемости функции. Доказывается теорема: Если индикатриса Каратеодори имеет в регулярной точке $x_0$ касательную гиперплоскость размерности $n - 1$, не проходящую через $O$, то $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$. Устанавливаются также некоторые другие геометрические свойства индикатрисы. Р. С. Гутер

**1219. О дифференцировании сложных функций. Самбо** (Sulla derivazione delle funzioni composte. Sambo Alberto), Rend. Accad. sci. fis. e mat. Napoli, 1952, **19**, 153—156 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Автор обобщает результаты Скорца-Драгони (Scorza Dragoni G., Rend. Sem. mat. Univ. Padova, 1951, **20**, 462—467) на функции более чем двух переменных, доказывая следующую теорему:

Пусть в $(n+1)$-мерном промежутке $R(a \leqslant x \leqslant b,\ a_k \leqslant y_k \leqslant b_k;\ k = 1, \ldots, n)$ определена функция $f(x, y_1, \ldots, y_n)$, измеримая относительно $x$ и непрерывная относительно $(y_1, \ldots, y_n)$. Кроме того, в промежутке $I(a \leqslant x \leqslant b)$ определены $n$ непрерывных и почти всюду дифференцируемых функций $\alpha_k(x)$ с $a_k \leqslant \alpha_k(x) \leqslant b_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Предполагается, что для почти каждого $x \in I$ функция $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ имеет частную производную по $x$ и дифференцируема относительно $(y_1, \ldots, y_n)$ в $(x, \alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x))$. Тогда сложная функция $F(x) = f(x, \alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x))$ имеет почти всюду в $I$ асимптотическую производную, равную

$$f_x(x, \alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)) + \sum_{k=1}^n f_{y_k}(x, \alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x))\,\alpha_k'(x).$$

Другое обобщение результата Скорца-Драгони для функций вида $f(x(t), y(t))$ дано Скорца-Тозо (Scorza Toso A., Rend. Sem. mat. Univ. Padova, 1952, **21**, 198—201). A. Rosenthal

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 6, 514.

**1220. О полной вариации разрывных функций. Гонсальвиш** (Sobre a variação total das funções descontinuas. Gonçalves Vicente), Ciência (Lisboa), 1954, **4**, № 9—10, 9—12 (порт.)

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и в каждой внутренней точке $c$ этого отрезка удовлетворяет условию: каково бы ни было $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что

$$\Delta(x', x, x'') \equiv |f(x) - f(x')| + |f(x'') - f(x) - f(x'')| < \varepsilon \qquad (1)$$

для любых трех точек $x' < x < x''$, лежащих в окрестности $(c - \delta, c + \delta)$ указанной точки. Тогда, если обозначить через $V$ полную вариацию функции на отрезке $[a, b]$, то, каково бы ни было разбиение этого отрезка точками $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_\mu = b$, с диаметром $d$, сумма $v = \sum_{i=0}^{\mu-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$ равномерно стремится к $V$ при $d \to 0$.

Для выполнения условия (1) необходимы и достаточны существование (конечных) пределов $l = f(c - 0)$ и $r = f(c + 0)$ и справедливость неравенства

$$\min(l, r) \leqslant f(c) \leqslant \max(l, r).$$

Э. Апарисио

**1221. О выпуклых функциях. Фукухара** (Sur la fonction convexe. Hukuhara Masuo), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 8, 683—685 (франц.)

Пусть $f(x)$ — выпуклая в интервале $(\alpha, \beta)$ функция, т. е. удовлетворяет в нем неравенству

$$f[(x + y)/2] \leqslant [f(x) + f(y)]/2.$$

Островским (Ostrowski A., Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1929, **38**, 56—62) было показано, что если $f(x)$ ограничена сверху на множестве положительной меры,

то она непрерывна на $(\alpha, \beta)$. Автор приводит пример разрывной выпуклой функции, ограниченной снизу. Доказывается теорема: Если выпуклая функция ограничена снизу на множестве положительной меры, то она ограничена снизу на всем интервале $(\alpha, \beta)$.

Если ввести функцию $\underline{f}(x) = \varliminf_{h \to 0} f(x+h)$, то график разрывной выпуклой функции $y = f(x)$ есть плотное множество в области $\alpha < x < \beta$, $\underline{f}(x) < y < \infty$.

И. Г. Соколов

**1222. О сходимости сингулярных интегралов.** Тандори (Szinguláris integrálok konverg nciájáról. Tandori Károly), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1955, 5, № 1, 61—68 (венг.)

Статья автора (РЖМат, 1955, 5715) на венгерском языке.

**1223. Один частный случай суммирования двойных интегралов.** Осидзе (ორჯერადი ინტეგრალის შეჯამებადობის ერთი კერძო შემთხვევა. ოსიძე გ.), საქ. პოლიტექნ. ინ-ტის შრომები, Гр. Груз. политехн. ин-та, 1954, № 50, 83—88 (груз.; резюме русс.)

Пусть функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ определены на интервале $R_0 = (0 \leqslant t < \infty;\ 0 \leqslant \tau < \infty)$,

$$\Phi(x, y) = \int_0^x \int_0^y \varphi(t, \tau)\, dt d\tau,$$

$$\Psi(x, y) = \int_0^x \int_0^y \psi(t, \tau)\, dt d\tau$$

существуют для любой точки $(x, y) \in R_0$ и $\Psi(x, y) \to \infty$ при $x + y \to \infty$. По определению, интеграл

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(t, \tau)\, dt d\tau \qquad (1)$$

суммируем методом $C_\psi^\lambda$ к числу $S$, если

$$\lim_{(x,y)_\lambda \to \infty} \Phi(x, y) / \Psi(x, y) = S, \qquad (2)$$

причем $\lambda^{-1} \leqslant x / y \leqslant \lambda$. В частности, если $\psi(x, y) = 1$, то получаем $C_{1,1}^\lambda$-суммируемость интеграла (1). Вообще, из условия $\lim_{(x,y) \to \infty} \varphi(x, y) / \psi(x, y) = S$ не вытекает равенство (2). При довольно жестких ограничениях на функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ устанавливается равенство (2).

А. Г. Джваршейшвили

**1224. Один признак сходимости рядов Уолша—Фурье.** Яно (A convergence test for Walsh–Fourier series. Yano Shigeki), Tôhoku Math. J., 1954, **6**, № 2—3, 226—230 (англ.)

Пусть функция $f(x)$ с периодом 1 интегрируема на $(0,1)$. Обозначим через

$$\sum_0^\infty c_n \psi_n(x) \qquad (1)$$

ее ряд Фурье по функциям Уолша. Доказывается следующая теорема (аналогичная признаку Харди — Литлвуда для тригонометрических рядов Фурье): Если $c_n = O(n^{-\delta})$ $(\delta > 0)$ и

$$\int_0^h |f(x_0 + t) - f(x_0)|\, dt = o(|h| / |\log|h||^{-1}),\ h \to 0,$$

то ряд (1) сходится в точке $x_0$ к $f(x_0)$.

А. А. Шнейдер

## ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

**1225. О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций в пространстве $L$.** Туреций А. Х., Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 6, 1001—1004

Статья относится к поставленной А. Н. Колмогоровым задаче о наилучшем приближении функций $f(x)$ данного класса $F$ некоторыми $n$-членными полиномами $\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)$ ($c_i$ — постоянные, функции $\varphi_i(x)$ принадлежат некоторому классу $\Phi$), а именно, об исследовании величины

$$D_n(F) = \inf_{\varphi_i} \sup_{f \in F} \inf_{c_i} \rho(f, \varphi),$$

где $\rho(f, \varphi)$ есть отклонение $\varphi$ от $f$.

Рассматривается случай, когда $F$ есть класс $2\pi$-периодических функций $f(x)$, имеющих измеримые $r$-е производные и удовлетворяющих, кроме того, условиям: $\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0$, $|f^{(r)}(x)| \leqslant 1$ при $x \in [0, 2\pi]$. Функции $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, берутся среди систем Чебышева, т. е. таких систем непрерывных функций, что любой $n$-членный полином $\varphi(x)$ имеет на $[0, 2\pi)$ не более $n-1$ нулей; при этом $n$ предполагается нечетным. Отклонение $\rho(f, \varphi)$ понимается в смысле метрики пространства $L$. При этих предположениях доказывается, что

$$D_n(F) = \frac{16}{\pi} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{-r} \sum_{q=0}^\infty \frac{(-1)^{qr}}{(2q+1)^{r+2}},$$

причем эта величина достигается для следующей системы функций $\varphi_i(x)$: $1, \cos \nu x, \sin \nu x$ $(\nu = 1, 2, \ldots, (n-1)/2)$. Указываются работы Колмогорова, Рудина и Стечкина, относящиеся к задаче об изучении величины $D_n(F)$.

В. Ф. Николаев

**1226. О рядах Фурье функций, тождественно равных нулю в некотором подинтервале периода разложения.** Эккарт (Über Fourierreihen, die in einem Teilintervall der Entwicklungsperiode identisch verschwinden. Eckart Gottfried), Sitzungsber. math. nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1953, 169—190 (нем.)

Получаются тождества для коэффициентов Фурье периодической функции, обращающейся в нуль в подинтервале. Предполагается, что рассматриваемые функции имеют кусочнонепрерывную производную.

P. Civin

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 952.

**1227. О суммировании рядов Фурье.** Карамата, Томич (О збирљивости Fourier-ових редова. Карамата Ј., Томић М.), Глас Српске акад. наука, 1953, **206**. Од. прир.-матем. наука, **5**, 89—126 (серб.; резюме франц.)

Обобщаются некоторые результаты Надя (Sz.-Nagy B., Acta scient. math. Szeged, 1950, **12** pars B, 204—210) и С. М. Никольского (Изв. АН СССР, сер. матем., 1948, **12**, 259—278) по суммированию рядов Фурье непрерывных функций.

Пусть $\{\lambda_k^{(n)}\}$ $(n, k = 0, 1, 2, \ldots)$ — числовая матрица, определяющая метод суммирования, и

$$f(t) \sim a_0/2 + \sum_1^\infty (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

— ряд Фурье — Лебега функции $f(t)$. Если $\lambda_k^{(n)} \underset{n \to \infty}{\to} 1$ при любом фиксированном $k$, $\lambda_k^{(n)} \underset{k \to \infty}{\to} 0$ при любом фик-

сированном $n$ и

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m+k+2}{m+1}\,|m-k|\ln\frac{m+k+2}{|m-k|}\,|\,\Delta^2\lambda_k^{(n)}\,|=O(1)$$

равномерно относительно всех $n, m=0,1,2,\ldots$, то для всякого $n$ и любого $x$, в окрестности которого $f(t)$ ограничена, ряд

$$a_0\lambda_0^{(n)}/2+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{(n)}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

сходится, и его сумма $U_n(f;x;\lambda)$ при $n\to\infty$ стремится к $[f(x+0)+f(x-0)]/2$ всюду, где $f(x)$ непрерывна, либо имеет разрыв первого рода (метод суммирования является $F$-перманентным).

Для случая треугольной матрицы $\{\lambda_k^{(n)}\}$ ($\lambda_k^{(n)}=0$, когда $k>n$) эту теорему при $m=n$ доказал Надь. Если матрица $\{\lambda_k^{(n)}\}$ является треугольной, то соответствующий метод суммирования будет $F$-перманентным при выполнении следующих условий: 1) $\lambda_k^{(n)}\underset{n\to\infty}{\to}1$, каково бы ни было значение $k$, 2) $|\lambda_k^{(n)}|\leqslant C$, 3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k+1}=O(1)$, 4) $\sum_{k=0}^{n-2}Q_{n,k}\,|\,\Delta^2\lambda_k^{(n)}\,|\leqslant O(1)$, где

$$Q_{n,k}=\begin{cases}(n-k)\ln\dfrac{n}{n-k}, & 0\leqslant k\leqslant n-\sqrt{n},\\ (n-k)\ln(n-k), & n-\sqrt{n}\leqslant k\leqslant n-2.\end{cases}$$

Для матриц, у которых все строки таковы, что системы чисел $\lambda_0^{(n)},\lambda_1^{(n)},\ldots,\lambda_n^{(n)},0$ удовлетворяют условию выпуклости либо вогнутости, это доказал С. М. Никольский. В этом случае условие 4) является следствием первых трех условий.

Из приведенной теоремы вытекает, что если для каждого $n$ система чисел $\lambda_0^{(n)},\lambda_1^{(n)},\ldots,\lambda_n^{(n)}$ выпукла либо вогнута, то соответствующий метод суммирования будет $F$-перманентным при выполнении условия 1), условия 2) при $k=n$, условия 3) и если, кроме того, либо $\lambda_{n-1}^{(n)}-2\lambda_n^{(n)}=O(1/\ln n)$, либо $\lambda_N^{(n)}=O(1)$,

$$\sqrt{N}\Delta\lambda_N^{(n)}=O(1)\ \text{ и }\ \sum_{\nu=N+1}^{n}\frac{\lambda_\nu^{(n)}}{n+1-\nu}=O(1).$$

А. Ф. Тиман

**1228. О суммируемости методами положительного порядка рядов Фурье функций с бесконечным пределом.** Чжоу Хуай-хэн (關於有一無限極限的一個函數的福里哀級數對於正指數總和性. 周懷衡), 數學學報 (Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica), 1955, 5, № 1, 81—89 (кит.; резюме англ.)

Пусть

$$a_0/2+\sum_1^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)\qquad(1)$$

— ряд Фурье суммируемой функции $f(\theta)$; $\varphi(t)=|f(\theta+t)+f(\theta-t)|/2$ и $\sigma_n^r(\theta)$ — чезаровские средние порядка $r$ ряда (1) в точке $\theta$. Приводится следующая теорема, в которой $t\to0$, а $n\to\infty$.

Теорема. 1) если $r\geqslant1$ и $\lim\varphi(t)=+\infty$, то $\lim\sigma_n^r(\theta)=+\infty$; 2) если $0<r<1$; $\varphi(r)$ монотонна и $\lim\varphi(t)=+\infty$, то $\lim\sigma_n^r(\theta)=+\infty$; 3) если $0<r\leqslant1-\delta$, где $0<\delta<1$, то существует немонотонная функция $\varphi(t)$ с $\lim\varphi(t)=+\infty$, для которой $\underline{\lim}\,\sigma_n^r(\theta)=-\infty$

М. Ф. Тиман

**1229. Равномерная сходимость рядов Фурье. II.** Сато (Uniform convergence of Fourier series. II. Satô Masako), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 8, 698—701 (англ.)

Обобщается теорема Зигмунда, в силу которой ряд Фурье $2\pi$-периодической функции с модулем непрерывности $\omega(\delta)=o(\delta^\alpha)$ равномерно суммируем $(C,-\alpha)$ на отрезке $[0,2\pi]$ при $0<\alpha<1$. Именно доказывается

Теорема 2. Если $2\pi$-периодическая функция $f(x)$ с модулем непрерывности $\omega(\delta)$ принадлежит классу $\varphi(n)=O(n)$ (РЖМат, 1955, 4340), то для всех $x$

$$|\,\sigma_n^{-\alpha}(x)-f(x)\,|\leqslant$$

$$\leqslant C\left[\omega^{1-\alpha}(n^{-1})\left(\frac{n}{\varphi(n)}\right)^{\alpha}+n^{-1}\int_{\pi/n}^{\pi}\omega(t)\,t^{-2}dt\right],$$

где $0<\alpha<1$, $\sigma_n^{-\alpha}(x)$ — чезаровские средние порядка $-\alpha$ ряда Фурье функции $f(x)$ и $C$ — некоторая постоянная.

Теорема Зигмунда следует из теоремы 2, если положить $\varphi(n)=\omega^{-1}(n^{-1})$ при $\omega(n^{-1})=o(n^{-\alpha})$ и $0<\alpha<1$. Как следствия из теоремы 2 автор получает еще несколько других достаточных критериев равномерной суммируемости отрицательного порядка рядов Фурье.

В статье имеются опечатки. Например, на стр. 699, строка 6 сверху, написано, что $an\theta(n)/[\pi\varphi(n)]$ выбирается четным числом, тогда как оно должно быть нечетным числом; строка 13 снизу, напечатано $\sum_{k=1}^{M}$, а должно быть $\sum_{k=0}^{M-2}$; строка 12 снизу, напечатано $\sum_{k=1}^{M/2}$, а должно $\sum_{k=0}^{(M-3)/2}$.

П. Л. Ульянов

**1230. О сильной суммируемости степенных рядов и рядов Фурье.** Суноути (On the strong summability of power series and Fourier series. Sunouchi Gen-ichirô), Tôhoku Math. J., 1954, **6**, № 2—3, 220—225 (англ.)

Обобщается теорема Чжоу (Chow H. C., Proc. London Math. Soc., 1951, **1**, 206—216). Именно, доказывается теорема:

Если функция комплексного переменного $f(z)\in H^\lambda$ $(1\leqslant\lambda<2)$, то при $n\to\infty$

$$\sum_{\nu=0}^{n}|\,\sigma_\nu^{\alpha-1}(\theta)-f(e^{i\theta})\,|^q=o(n)$$

для почти всех $\theta\in[0,2\pi[$, где $\alpha=1/\lambda$, $0<q<\lambda/(\lambda-1)$ и $\sigma_\nu^{\alpha-1}(\theta)$ — чезаровские средние порядка $\alpha-1$ ряда $\sum_{n=0}^{\infty}c_nr^ne^{in\theta}=f(z)$ $(z=re^{i\theta},\ 0\leqslant r<1)$ в точке $\{r=1,\theta\}$.

П. Л. Ульянов

**1231. О сильной суммируемости продифференцированных рядов Фурье.** Кинукава (On the strong summability of the derived Fourier series. Kinukawa Masakichi), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 9, 801—804 (англ.)

Пусть $f(t)$ — непрерывная функция с периодом $2\pi$ и с ограниченной вариацией, дифференцируемая в точке $t=x$, и пусть $a_0/2+\sum_1^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$ — ее ряд Фурье. Через $\tau_n(t)$ и $\overline{\tau}_n(t)$ обозначим частные суммы продифференцированного ряда и сопряженного к нему ряда, а через $\tau_n^*(t)$ и $\overline{\tau}_n^*(t)$ — модифицированные частные суммы

$$\tau_n^*(t)=\tau_n(t)-n(b_n\cos nt-a_n\sin nt)/2,$$
$$\overline{\tau}_n^*(t)=\overline{\tau}_n(t)-n(a_n\cos nt+b_n\sin nt)/2.$$

Положим

$$g(u) = g_x(u) = f(x+u) - f(x-u) - 2uf'(x),$$

$$G(t) = \int_0^t |\,dg(u)\,|,$$

$$h(u) = h_x(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2f(x),$$

$$H(t) = \int_0^t |\,dh(u)\,|,$$

$$H_n(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{1/n}^{\pi} h(t)\,\operatorname{cosec}^2\frac{t}{2}\,dt.$$

Прасад и Сингх (Prasad B. N., Singh U. N., Math. Z., 1952, 56, 280—288) доказали следующие теоремы, в которых $\varepsilon > 0$, $t \to 0$ и $n \to \infty$:

A. Если $G(t) = o\{t\,|\log t|^{-1-\varepsilon}\}$, то

$$\sum_{m=1}^{n} |\,\tau_m(x) - f'(x)\,| = o(n).$$

B. Если $H(t) = o\{t\,|\log t|^{-1-\varepsilon}\}$, то

$$\sum_{m=1}^{n} |\,\overline{\tau}_m(x) - H_m(x)\,| = o(n).$$

В реферируемой статье автор пытается доказать теоремы:

1. Если выполняются условия теоремы A, то для всякого $k > 0$

$$\sum_{m=1}^{n} |\,\tau_m^*(x) - f'(x)\,|^k = o(n).$$

2. Если выполняются условия теоремы B, то для всякого $k > 0$

$$\sum_{m=1}^{n} |\,\overline{\tau}_m^*(x) - H_m(x)\,|^k = o(n).$$

Автор указывает также (не приводя доказательств), что:

3. Если выполняются условия теоремы A, то для всякого $k > 0$

$$\sum_{m=1}^{n} |\,\tau_m(x) - f'(x)\,|^k = O(n).$$

4. Если выполняются условия теоремы B, то для всякого $k > 0$

$$\sum_{m=1}^{n} |\,\overline{\tau}_m(x) - H_m(x)\,|^k = O(n).$$

В доказательствах теорем 1 и 2 автор допустил ошибки. Именно, в доказательстве теоремы 1 при выводе соотношения $S_n^k = o(\Gamma_n)$ (которое, вообще говоря, неверно) автор выносит символ «$o$» за знак сходящегося интеграла. Аналогичная ошибка имеется и в доказательстве теоремы 2. А. А. Шнейдер

**1232. О множителях абсолютной суммируемости.** Суноути (On the absolute summability factors. Sunouchi Gen-ichirô), Kodai Math. Sem. Repts, 1954, № 2, 59—62 (англ.)

Пусть $\varphi_\alpha(t)$ является $\alpha$-средним от интегрируемой функции $\varphi(t) \sim \sum_1^\infty a_k \cos kt$, т. е. $\varphi_0(t) = \varphi(t)$, $\varphi_\alpha(t) = \alpha t^{-\alpha}\int_0^t (t-u)^{\alpha-1}\varphi(u)\,du$, $\alpha > 0$.

Чжен доказал (Cheng M. T., Duke Math. J., 1948, 15, 29—36), что если функция $\varphi_\alpha(t)$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ имеет ограниченное изменение на $(0, \pi)$, то ряд Фурье функции $\varphi$ в точке $t = 0$ абсолютно суммируем $|C, \alpha|$ с множителем $\{\ln(k+1)\}^{-(1+\varepsilon)}$, где $\varepsilon > 0$, т. е. ряд $\sum_{k=1}^\infty a_k \{\ln(k+1)\}^{-1-\varepsilon}$ суммируем $|C, \alpha|$.

Автор доказывает теорему, из которой следует, что теорема Чжэна остается справедливой и для $\alpha > 1$.

Теорема 2. Если для $(C, \alpha)$-средних $\sigma_n^\alpha$ ряда $\sum_1^\infty a_k$

$$\sum_{k=1}^{N} |\,\sigma_k^\alpha - \sigma_{k-1}^\alpha\,| = O(\ln N),$$

то исходный ряд $|C, \alpha|$-суммируем с множителем $\{\ln(k+1)\}^{-(1+\varepsilon)}$, где $\alpha \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$. П. Л. Ульянов

**1233. Абсолютная суммируемость по Чезаро ортогональных рядов. II (Исправление и замечание к предыдущей статье).** Цутикура (Absolute Cesàro summability of orthogonal series. II (Correction and remark to the previous paper). Tsuchikura Tamotsu), Tôhoku Math. J., 1954, 5, № 3, 302—312 (англ.)

Автор в предыдущей статье (РЖМат, 1954, 5522) дал достаточное условие, при котором абсолютная суммируемость ряда Фурье функции $f(x) \in L^p$ $(p > 1)$ в точке является локальным свойством. В реферируемой статье автор показывает, что его теорема справедлива лишь при $1 < p \leqslant 2$. Кроме того, дается более общее достаточное условие, при котором абсолютная суммируемость является локальным свойством.

Теорема 1. Пусть $1 < p \leqslant 2$ и $f(t) \in L^p(0, 2\pi)$. Если интеграл

$$\int_0^\pi t^{-1}\,|\varphi_x(t)|^p\,|\log t|^\varkappa\,dt < \infty$$

для некоторого $\alpha > p - 1$, где $\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$, то ряд Фурье функции $f$ суммируем $|C, \delta|$ для каждого $\delta > 1/p$ в точке $x$.

Теорема 2. Существует непрерывная функция периода $2\pi$, равная 0 на $[-\pi/4, \pi/4]$, ряд Фурье которой не суммируем $|C, 1/2|$ в точке $x = 0$.

Известно также, что для функций $f \in L^p(0, 2\pi)$ $(1 \leqslant p < 2)$ абсолютная суммируемость $|C, 1/p|$ в точке не является локальным свойством. Автор еще раз подтверждает это на простом конкретном примере.

Примечание референта. Доказательство теоремы 2 довольно сложно. Более того, ее утверждение противоречит результатам Фоа (Foà A., Boll. Unione mat. ital., 1940, 2, 325—332), где утверждается, что суммируемость $(C, \alpha)$ ряда Фурье функции $f(x) \in L^p$ $(p > 1)$ является локальным свойством при $\alpha > 1/p$. По мнению референта, доказательство Фоа более убедительно и просто. П. Л. Ульянов

**1234. О сходимости по мере тригонометрических рядов.** Меньшов (On convergence in measure of trigonometric series. Men'šov D. E.), Amer. Math. Soc. Translation № 105, 1954, 76 pp. (англ.)

Перевод работы автора (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1950, 32).

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 10, 866.

**1235. К вопросу об оценке приближения дифференцируемых функций полиномами Бернштейна — Рогозинского.** Давидовский Н. А., Сб. науч. тр. Белорус. политехн. ин-та, 1954, № 44(6), 484—486

Пусть $B_n(f; x)$ — суммы Бернштейна — Рогозинского функции $f$

$$B_n(f; x) = \frac{1}{2}\left[S_n\left(x + \frac{\pi}{2n+1}\right) + S_n\left(x - \frac{\pi}{2n+1}\right)\right],$$

где $S_n(x)$ — сумма Фурье $n$-го порядка функции $f$

в точке $x$. Рассматривается величина

$$E_n(x) = \sup |f(x) - B_n(f; x)|,$$

где верхняя грань берется по классу $KW^{(r)}$ $2\pi$-периодических функций, имеющих $r$-ю производную с $|f^{(r)}(x)| \leqslant K$. Приводятся (без доказательства) формулы:

$$E_n(x) = \frac{2K\pi}{(2n+1)^2} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-r+1} + O(n^{-3}) =$$

$$= \frac{2K}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\sin^2 i\pi}{4n+2} \frac{\sin ix}{i^r} \right| dx + O(n^{-r+1})$$

$$(r = 5,7,9, \ldots),$$

$$E_n(x) \leqslant 2K\pi^2 (2n+1)^{-2} + O(n^{-4}) \quad (r = 4,6,8, \ldots).$$

В статье имеются неточные выражения и пропуски. Не вполне точно определен класс $KW^{(r)}$: приводится утверждение: существуют непрерывные функции, вовсе не имеющие рядов Фурье; в формуле, следующей за (2), пропущен множитель $K$ и т. д. И. Г. Соколов

**1236. Явление Гиббса при суммировании ряда Фурье методами Бернштейна — Рогозинского. Харшиладзе Ф. И.**, Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 3, 425—428

Для ряда

$$a_0/2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \qquad (1)$$

рассматриваются суммы Бернштейна — Рогозинского $k$-го порядка

$$B_n^{(k)}(x) = a_0/2 + \sum_{\nu=1}^{n} \cos^k \frac{\nu\pi}{2n+1} A_\nu(x), \qquad (2)$$

где $A_\nu(x) = a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x$. Показывается, что в окрестности точки разрыва функции $f(x)$, для которой (1) есть ряд Фурье, при его суммировании методом (2) наблюдается явление Гиббса. Из этого, в частности, вытекает, что кривые $y = B_n^{(k)}(x)$ отклоняются от графика функции $y = f(x)$ больше, чем кривые, соответствующие методу $(C, k)$.

Кроме того, устанавливается, что при суммировании обобщенных рядов Фурье методом (2) при $k = 1$ также имеет место явление Гиббса. (Ряд (1) называется обобщенным рядом Фурье для функции, имеющей особенности в интервале $(-\pi, \pi)$, если в формулах для коэффициентов Фурье $a_\nu$ и $b_\nu$ соответствующие интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши). Этот вопрос для методов Чезаро и Гёльдера изучался ранее Уолмсли (РЖМат, 1953, 658).

Опечатка: на стр. 426, в формуле для $B_n^{(k)}(x)$ вместо $\pi/(2n+1)$ должно быть $n\pi/(2n+1)$. И. М. Ганзбург

**1237. О суммировании двойных рядов Фурье-Лебега методом Бернштейна. Бендукидзе А. Л.**, (ბერნშტეინის მეთოდით ფურიე-ლებეგის ორმაგი რიგების შეჯამების შესახებ. ბენდუკიძე ა. დ.), Сооб. Политехн. ин-та, 1954, № 15, 67—82 (резюме груз.)

Рассматривается вопрос о суммировании методом Бернштейна — Рогозинского двойных рядов Фурье $2\pi$-периодических как по $x$, так и по $y$ функций $f(x, y)$ определенного класса в точках Лебега в сильном смысле. Точка $(x, y)$ называется точкой Лебега в сильном смысле (или $L^*$-точкой) функции $f(x, y)$, если выполняются условия:

$$\lim_{t,\tau \to 0} (t\tau)^{-1} \int_0^t \int_0^\tau |f(x \pm \alpha, y \pm \beta) - f(x, y)| \, d\alpha \, d\beta = 0,$$

$$\sup_{0<t\leqslant\pi} t^{-1} \int_0^t \int_0^\pi |f(x \pm \alpha, y \pm \beta) - f(x, y)| \, d\alpha \, d\beta < +\infty,$$

$$\sup_{0<\tau\leqslant\pi} \tau^{-1} \int_0^\pi \int_0^\tau |f(x \pm \alpha, y \pm \beta) - f(x, y)| \, d\alpha \, d\beta < +\infty.$$

Доказывается следующая основная теорема работы: Если функция $f \ln^+ |f|$ суммируема в квадрате $R_0 = [0,2\pi;\ 0,2\pi]$, то в $L^*$-точке квадрата справедливо равенство

$$\lim_{m,n\to\infty} B_{m,n}(f; x, y) = f(x, y).$$

Здесь

$$B_{m,n}(f; x, y) = \frac{1}{4}\left[S_{m,n}(x, y) + S_{m,n}\left(x + \frac{2\pi}{2m+1}, y\right) + \right.$$

$$\left. + S_{m,n}\left(x, y + \frac{2\pi}{2n+1}\right) + S_{m,n}\left(x + \frac{2\pi}{2m+1}, y + \frac{2\pi}{2n+1}\right)\right],$$

где $S_{m,n}(x, y)$ — частная сумма двойного ряда Фурье.

Из доказанных лемм отметим следующую: если функция $f \ln^+ |f|$ суммируема в $R_0$, то почти все точки квадрата $R_0$ суть $L^*$-точки функции $f(x, y)$.

И. В. Матвеев

**1238. Сингулярные интегралы и периодические функции. Кальдерон, Зигмунд** (Singular integrals and periodic functions. Calderón A. P., Zygmund A.), Studia math., 1954, **14**, № 2, 249—271 (англ.)

Пусть $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ — точки $n$-мерного евклидова пространства $E_n$, для которого $e_1, e_2, \ldots, e_n$ есть система единичных взаимно ортогональных векторов, и пусть при $\|x\| \neq 0$, $x' = x/\|x\|$. Рассматриваются в $E_n$ ядра вида $K(x) = \Omega(x')/\|x\|^n$, где $\Omega(x')$ — непрерывная функция, определенная на единичной сфере $\Sigma$ из $E_n$ такая, что 1) $\int_0^1 \delta^{-1} \omega(\delta) \, d\delta < \infty$ ($\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $\Omega$), 2) $\int_\Sigma \Omega(x') \, dx' = 0$ ($dx' = d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n$), и $K^*(x) = K(x) + \sum_1^\infty \{K(x - p_\nu) - K(-p_\nu)\}$, где $\{p_\nu\}$ — последовательность, членами которой являются суммы $p_\nu = \sum_1^n k_i e_i$, распространенные на всевозможные системы из $n$ целых чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Для всякой функции $f(x)$ периода 1 по всем координатам $\xi_i$, суммируемой на произвольном ограниченном множестве из $E_n$, рассматривается свертка $f^*(x) = \int_R f(y) K^*(x - y) \, dy$, где $R$ — фундаментальный куб: $|\xi_i| \leqslant 1/2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Устанавливаются, в частности, следующие соотношения между $f$ и $f^*$:

1. $f^*(x)$ существует почти для всех $x \in E_n$.

2. Если $f \in L_p$, $1 < p < \infty$, то и $f^* \in L_p$, причем

$$\|f^*\|_p \leqslant A_p \|f\|_p \quad (A_p \text{ — константа}). \qquad (1)$$

3. Если $|f| \ln^+ |f|$ суммируема в $R$, то тогда и $f^*$ суммируема в $R$, причем

$$\int_R |f^*| \, dx \leqslant A \int_R |f| \ln^+ |f| \, dx + B. \qquad (2)$$

4. Если $f$ суммируема в $R$, то при $0 < \alpha < 1$ и всяком $S \subset R$

$$\int_S |f^*|^\alpha dx \leqslant |S|^{1-\alpha} \frac{A}{1-\alpha} \left(\int_R |f| \, dx\right)^\alpha$$

Пусть $f(x)=f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — периодическая функция с рядом Фурье

$$f(x)\sim\sum c_{\mu_1,\ldots,\mu_n}e^{2\pi i(\mu_1\xi_1+\ldots+\mu_n\xi_n)}=\sum c_m e^{2\pi i(m,x)} \quad (3)$$

и пусть

$$f^*(x)\sim\sum c_m^* e^{2\pi i(m,x)}, \quad (4)$$

где ряд (4) называется сопряженным для ряда (3). Показывается, что если $f^*$ суммируема, то $c_m^*=c_m\gamma_m$, где $\gamma_m=\int_R K^*(y)\,e^{-2\pi i(m,y)}dy$. Отсюда как следствие выводится, что если $P_k(x)$ — однородный многочлен степени $k$, удовлетворяющий по переменным $\xi_1, \xi_2, \ldots, \ldots, \xi_n$ уравнению Лапласа $\Delta P_k=0$, $K(x)=P_k(x)/\|x\|^{n+k}$ и $f(x)$ — суммируемая функция с рядом Фурье $f(x)\sim\sum c_m e^{2\pi i(m,x)}$, то тогда

1) если $f\in L_p$, $p>1$, то

$$f^*\sim\sum_{m\neq 0} c_m\|m\|^{-k}P_k(m)\,e^{2\pi i(m,x)}, \quad (5)$$

причем $f^*\in L_p$ и удовлетворяет неравенству (1);

2) если $|f|\ln^+|f|$ суммируема, то имеет место (5), $f^*\in L$ и для $f^*$ имеет место неравенство (2) и т. д.

Если $f(x)$ — периодическая функция и $f\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha<1$, а $\Omega(x')\in\mathrm{Lip}\,\beta$, $\beta>\alpha$ (при $x'\in\Sigma$), то тогда $f^*\in\mathrm{Lip}\,\alpha$. Если же $f\in\mathrm{Lip}\,1$ и $K(x)$ удовлетворяет условию $|K(t+h)+K(t-h)-2K(t)|\leqslant A|h|^\gamma|t|^{-(n+\gamma)}$ где $\gamma$ — произвольное число $>1$, то тогда $f^*$ удовлетворяет условию $|f^*(x+h)+f^*(x-h)-2f^*(x)|\leqslant C|h|$ и т. д.

По определению, $X=\{\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}\in l_p$, если $\|X\|_p=\left(\sum_{-\infty}^{\infty}\|x_\nu\|^p\right)^{1/p}<\infty$. Пусть $\tilde{X}=\{\ldots, \ldots, \tilde{x}_{-1}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \ldots\}$, где

$$\tilde{x}_\mu=\sum_{\nu\neq\mu}x_\nu K(p_\mu-p_\nu),\ p_\nu=\sum_1^n k_i e_i. \quad (6)$$

Тогда, если $X\in l_p$, $p>1$, то и $\tilde{X}\in l^p$, причем $\|\tilde{X}\|_p\leqslant A_p\|X\|_p$, где $A_p$ зависит только от $p$ и ядра $K$. Ряд $\sum_{m\neq 0}K(m)\,e^{2\pi i(m,x)}$ есть ряд Фурье ограниченной функции $\chi(x)$, причем число $M=\mathrm{vrai}\max|\chi(x)|$ служит нормой линейного преобразования (6), рассматриваемого как преобразование $l_2$ в $l_2$. Дается определение гладких функций в $E_n$ и указываются простейшие свойства таких функций. В. К. Дзядык

**1239. О рядах Фурье почти периодических функций Степанова.** Торнехаве (Tornehave Hans), Math. scand., 1954, **2**, № 2, 237—242 (англ.)

С помощью метода В. В. Степанова (Докл. АН СССР, 1949, **64**, 297—300) доказывается следующая теорема Винера:

Если

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m\leqslant\lambda_n<m+1}|a_n|\right)^2<\infty, \quad (1)$$

то ряд $\sum_1^\infty a_n e^{i\lambda_n t}$ есть ряд Фурье $S^2$-почти периодической функции (п. п. ф.).

В работе Степанова изучался случай, когда в каждом интервале длины единица число показателей Фурье равномерно ограничено. Далее показывается, что если $S^2$-п. п. ф. имеет все положительные коэффициенты Фурье, то выполняется условие (1). Эта теорема переносится на $W^2$-п. п. ф.

В конце работы утверждается без доказательства следующее: 1) если коэффициенты Фурье $S^2$- или $W^2$-п. п. ф. положительны, то ряд Фурье $S^2$- или $W^2$-сходится; 2) каждой $W^2$-п. п. ф. с положительными коэффициентами Фурье соответствует $S^2$-п. п. ф. с тем же рядом Фурье. Б. М. Левитан

**1240. О линейных процессах приближения алгебраическими многочленами, функциях Лебега и некоторых приложениях к рядам Фурье.** Тиман А. Ф., Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 2, 221—224

Рассматриваются линейные методы суммирования ряда Фурье — Чебышева:

$$U_n(f;\ x;\ l)=\sum_{k=0}^n l_k^{(n)}c_k\hat{T}_k(x)\quad(n=0,1,\ldots),$$

где $\{l_k^{(n)}\}$ — некоторая треугольная матрица чисел, $\{\hat{T}_n(x)\}$ — ортонормированная система полиномов Чебышева на $[-1.1]$, $c_k$ — коэффициенты Фурье $f(x)$ по этой системе. Для нормы $M_n(x)$ функционала $U_n(f;x;l)$ в пространстве ограниченных измеримых функций даются следующие оценки:

1. Если строки матрицы $\{l_k^{(n)}\}$ имеют равномерно ограниченное изменение: $\sum_{k=0}^n|\Delta l_k^{(n)}|=O(1)$, то

$$M_n(x)\geqslant\frac{4}{\pi^2}|L_n(1)-\{1-T_n(|x|)\}\,L_n(|x|)|+O(1),$$

где

$$L_n(x)=\sum_{k=1}^n\frac{l_{n-k}^{(n)}}{k}T_k(x),\ T_k(x)=\cos k\arccos x.$$

Величина $O(1)$ равномерно ограничена относительно $x\in[-1,1]$ и $n=1,2\ldots$ Если рассматривать матрицы с неотрицательными коэффициентами, то для слабой сходимости $U_n(f;x;l)$ в пространстве $C$ необходимо существование такой последовательности нечетных чисел $p=p(n)$, для которой $x_n=\cos\left\{\frac{p\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{nL_n(1)}\right)\right\}$, $L_n(|x_n|)=L_n(1)+O(1)$. Эта теорема обобщает результат автора (Изв. АН СССР, сер. матем., 1950, **14**, № 1, 85), где рассматривался случай $l_k^{(n)}=1$ для всех $n$ и $0\leqslant k\leqslant n$. Там было показано, что вышеприведенные условия оказываются в этом случае также и достаточными.

2. Если $l_k^{(n)}=O(1)$ и каждая строка матрицы $\{l_k^{(n)}\}$ выпукла либо вогнута, то при $n\to\infty$ имеет место равенство

$$M_n(x)=\frac{4}{\pi^2}|L_n(1)-\{1-T_n(|x|)\}\,L_n(|x|)|+O(1),$$

где $O(1)$ равномерно ограничена относительно $x$ и $n$. Указываются приложения полученных теорем к рядам Фурье. Рассматривается метод суммирования ряда Фурье

$$\tilde{U}_n(f;x;l)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^n\lambda_k^{(n)}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

где $a_k$ и $b_k$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$; $\lambda_k^{(n)}=l_k^{(n)}\cos k\alpha_n$ и при фиксированном $n$ $l_k^{(n)}$ ($l_0^{(n)}=1$, $l_{n+1}^{(n)}=0$) образуют выпуклую или вогнутую систему чисел; $\lambda_k^{(n)}=O(1)$. Тогда, какова бы ни была последовательность $\{\alpha_n\}$ ($|\alpha_n|\leqslant\pi/2$), при $n\to\infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\cos kt\right|dt=$$
$$=\frac{4}{\pi^2}\left|L_n(1)-(1-|\cos n\alpha_n|)L_n(\cos\alpha_n)\right|+O(1),$$

где $L_n(\cos\alpha_n)=\sum_{k=1}^{n}k^{-1}l_{n-k}^{(n)}\cos k\alpha_n$, а $O(1)$ равномерно ограничена относительно всех $n$ и всех последовательностей $\{\alpha_n\}$. Отсюда получается обобщение теоремы С. М. Никольского (случай $\alpha_n=0$) (Изв. АН СССР, сер. матем., 1948, **12**, 259—278): Если $\alpha_n$ и $l_k^{(n)}$ удовлетворяют вышеуказанным условиям, то для того чтобы $\lim_{n\to\infty}\tilde{U}_n(f;x;\lambda)=f(x)$ в каждой точке $x$ (или равномерно относительно $x$) для всех непрерывных $2\pi$-периодических функций, необходимо и достаточно: 1) $\lambda_k^{(n)}\to 1$ при $n\to\infty$, 2) $\lambda_k^{(n)}=O(1)$, 3) $(1-|\cos n\alpha_n|)\times$ $\times L_n(\cos\alpha_n)=L_n(1)+O(1)$. Если строки матрицы $\{l_k^{(n)}\}$ составляют систему чисел, выпуклую кверху, то условие 3) можно заменить условием: Существует последовательность нечетных чисел $p=p(n)$ $(n=1,2,\ldots)$, для которой $\alpha_n=\frac{\pi p}{2n}+O\left(\frac{1}{nL_n(1)}\right)$, $L_n(\cos\alpha_n)=$ $=L_n(1)+O(1$. И. Г. Соколов

**1241. Об абсолютной сходимости рядов по ортогональным многочленам. Фрёйд** (Ortogonális polinomsorok abszolút konvergenciájáról. Freud Géza), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1955, **5**, № 1, 49—56 (венг.)

Статья автора (РЖМат, 1954, 3986) на венгерском языке.

**1242. Об ортогональных многочленах. Фрёйд** (Über orthogonale Polynome. Freud G.), Acta math. Acad. sci. hung., 1954, **5**, № 3—4, 291—298 (нем.; резюме русс.)

**Об ортогональных многочленах. Фрёйд** (Ortogonális polinomokról. Freud Géza) Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1955, **5**, № 1, 21—27 (венг.)

Пусть $w(x)$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ — весовая функция и $\{p_k(x)\}$ $(k=0,1,2,\ldots)$ — соответствующая ортонормальная система многочленов.

Теорема 1. Если $W(\theta)=w(\cos\theta)\sin\theta$ и при $h\to 0$

$$\int_0^{\pi}\frac{|W(\theta+h)-W(\theta)|}{W(\theta)}d\theta=O(|\ln^{-\alpha}|h^{-1}|),$$

где $\alpha>1$, то почти везде на $[-1,1]$ $\Sigma_0^n p_k^2(x)=O(n)$.

Теорема 2. Если $N$ — множество нулей $w(x)$, то почти везде на $N$ будет

$$\lim_{n\to\infty}n^{-1}\sum_0^n p_k^2(x)=\infty.$$

Доказательство теоремы 2 лишь намечено. Имеются опечатки: стр. 293, строка 1 сверху, вместо «rechten» надо «linken»; стр. 293, пропущен квадрат в знаменателе формулы (7); стр. 295, строка 7 сверху, вместо = надо $\leqslant$; стр. 296, строки 1 и 5 снизу, вместо (15) надо (16). И. П. Натансон

**1243. О суммируемости методом Чезаро рядов по ортогональным полиномам. II. Тандори** (Über die Cesàrosche Summierbarkeit der orthogonalen Polynomreihen. II. Tandori Károly), Acta math. Acad. sci. hung., 1954, **5**, № 3—4, 237—253 (нем.; резюме русс.)

Часть I см. Acta math. Acad. sci. hung., 1952, **3**, 73—82.

Рассматривается система алгебраических полиномов $\{p_n(x)\}$, $n=0,1,2,\ldots$ (индекс $n$ указывает степень полинома), ортонормированных на конечном промежутке $[a,b]$ относительно интегрального веса $\alpha(x)$ ($\alpha(x)$ — ограниченная на $[a,b]$ монотонно возрастающая функция с бесконечным множеством точек роста). Для функции $f(x)\in L_\alpha^p[a,b]$ $(p\geqslant 1)$, т. е. такой, что $\int_a^b|f(x)|^p\,d\alpha(x)<\infty$, строится ряд Фурье по системе $\{p_n(x)\}$; $n$-я частная сумма этого ряда обозначается $s_n(f,x)$. Пусть $E$ — множество точек промежутка $[a,b]$, в которых $\alpha(x)$ имеет конечную производную $\alpha'(x)$. Основные результаты статьи:

1 (Аналог теоремы Харди — Литлвуда о сильной суммируемости обыкновенного ряда Фурье). Пусть система $\{p_n(x)\}$ равномерно ограничена на промежутке $[c,d]\subseteq[a,b]$ и пусть $f(x)\in L_\alpha^2[a,c_1]$, $f(x)\in L_\alpha^p[c_1,d_1]$ $(1<p\leqslant 2)$, $f(x)\in L_\alpha^2[d_1,b]$ $(c\leqslant c_1<d_1\leqslant d)$. Тогда для каждого числа $\sigma>0$ выполняется «$\alpha$-почти везде» на множестве $E\cap[c,d]$ соотношение

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)^{-1}\sum_0^n\left|s_\nu(f,x)-f(x)\right|^\sigma=0. \quad (1)$$

2. При тех же условиях, для любых чисел $r>0$, $s>0$ выполняется «$\alpha$-почти везде» на множестве $E\cap[c,d]$ соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\left(A_n^r\right)^{-1}\sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{r-1}\left|s_\nu(f,x)-f(x)\right|^s=0, \quad (2)$$

где $A_n^\nu$ означает $\binom{n+\nu}{n}$; в частности,

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n^r(f,x)=f(x), \quad (3)$$

где $\sigma_n^r(f,x)$ есть $n$-е $(C,r)$-среднее разложения $f(x)$ по системе $\{p_n(x)\}$.

3. Соотношения (1) — (3) выполняются во всех точках $x\in(c,d)$, в которых $\int_0^h|f(x\pm v)-f(x)|^p\,d\alpha(x\pm v)=$ $=o(h)$.

4. Если (при выполнении условий теоремы 1) функция $\alpha(x)$ удовлетворяет на промежутке $[c_1,d_1]$ условию Липшица первого порядка, то соотношения (1) — (3) выполняются во всякой точке $x\in(c_1,d_1)$, в которой $f(x)$ непрерывна; если же $f(x)$ непрерывна на всем интервале $(c_1,d_1)$, то (1) — (3) выполняются равномерно на всяком промежутке $[c_1+\delta,\ d_1-\delta]$ $(\delta>0)$.

5. Для выполнения соотношения (3) в каждой точке $x\in(c,d)$, в которой $f(x)$ непрерывна, достаточны и следующие условия: система $\{p_n(x)\}$ равномерно ограничена на $[c,d]$, функция $\alpha(x)$ удовлетворяет на $[c,d]$ условию Липшица первого порядка, $f(x)\in L_\alpha^2[a,c]$, $f(x)\in L_\alpha[c,d]$, $f(x)\in L_\alpha^2[d,b]$; если же $f(x)$ непрерывна на всем промежутке $[c_1,d_1]\subseteq[c,d]$, то (3) выполняется равномерно на любом промежутке $[c_1+\delta,\ d_1-\delta]$ $(\delta>0)$.

Приводится замечание Алексича о том, что все результаты статьи остаются в силе для любой ортонормированной системы функций $\{\varphi_n(x)\}$, для которой ядро $n$-й частной суммы соответствующего ряда Фурье представимо в виде

$$K_n(x,t)=[\varphi(t)-\varphi(x)]^{-1}\sum_{i,j=n-k}^{n+k}a_{ij}^{(n)}\varphi_i(x)\varphi_j(t),$$

где $k$ есть фиксированное натуральное число, коэффициенты $a_{ij}^{(n)}$ ограничены в совокупности по абсолютной величине и $|\varphi(t)-\varphi(x)|>m(x)|t-x|$, $m(x)>0$.

В. Ф. Николаев

**1244. О наилучших приближениях гармонических функций гармоническими полиномами. Гольштейн Е. Г.,** Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 1, 5—8

Пусть $F$ — замкнутое множество в пространстве, $f(p)$ — функция, непрерывная на $F$ и гармоническая во внутренних точках $F$, $E_n(f,F)=\inf \max_F |f(p)-Q_n(p)|$, где inf берется по всем гармоническим полиномам степени $n$.

Теорема. Пусть $F \subset G$, где $G$ — область со связным дополнением, лежащая внутри единичного шара. Пусть $\rho(s) \in \mathrm{Lip}\,1$ на $[0, l_0]$, $\rho(s) \geqslant \rho(0) = \rho(\overline{G} \setminus G, F)$ и предположим, что любую точку $p \in \overline{G} \setminus G$ можно соединить простой спрямляемой кривой $L$ длины $\leqslant l_0$ с фиксированной сферой радиуса $>1$ так, чтобы для любой точки $q \in L$ шар с центром в $q$ радиуса $\rho(s)$ ($s$ — длина части $L$ между $p$ и $q$) лежал вне $F$. Тогда, если $f(p)$ гармонична в $G$ и непрерывна в $\overline{G}$ и $M = \max_{\overline{G}} |f(p)|$, то

$$E_n(f, F) \leqslant M \exp\left[ -n \exp\left( -c \int_0^{l_0} \frac{ds}{\rho(s)} \right) \right].$$

В случае, когда $F$ есть область $D$, автор при некоторых предположениях о границе $D$ оценивает $E_n(f, \overline{D})$ через модуль непрерывности $\omega(\delta)$ функции $f(p)$ в $\overline{D}$ (или в некоторой области $G \supset \overline{D}$). Так, например, если граница $D$ есть гладкая поверхность, то

$$E_n(f, \overline{D}) \leqslant c(\varepsilon)\, \omega(n^{-1+\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0.$$

Результаты автора являются аналогами некоторых теорем С. Н. Мергеляна (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, **37**, 17—19, 43—49; РЖМат, 1954, 3293), относящихся к наилучшей аппроксимации аналитических функций.

Н. С. Ландкоф

**1245. Одно применение предельного закона теории наилучших приближений. Бернштейн С. Н.,** Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 3, 435—436

Автором было доказано (Докл. АН СССР, 1946, **54**, 479), что если $H(x)$, $H(0) > 0$, — четная целая трансцендентная функция нулевого рода, монотонно возрастающая при возрастании $|x|$, то для всякой функции $f(x)$ ($-\infty < x < \infty$) с $|f(x)| \leqslant H(x)$ ($-\infty < x < \infty$)

$$A_q f(x) = \lim_{m \to \infty} E_m[f(x);\ m/q] \quad (q > 0)$$

за исключением не более счетного множества значений $q$.

При помощи этого равенства в реферируемой статье доказывается, что если существует бесконечная последовательность значений $n$, для которых

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant p^n H(x) \quad (-\infty < x < \infty),$$

где $p$ фиксировано, то $f(x)$ есть целая функция степени $\leqslant p$.

И. И. Ибрагимов

**1246. О сходимости интерполяционного процесса Эрмита — Фейера. Фрёйд** (Az Hermite — Fejérféle interpolációs eljárás konvergenciájáról. Freud Géza), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1955, **5**, № 1, 29—47 (венг.)

Статья автора (РЖМат, 1955, 5728) на венгерском языке.

**1247. Исследование сходимости интерполяционных процессов. Берман Д. Л.,** Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 5, 867—869

Рассматриваются частные случаи (получающиеся при $p=1$, $p=2$) процессов приближений, введенных С. Н. Бернштейном (Собр. соч., т. 2, 1954, 130—140). Первый процесс при $p=1$ задается (для каждой непрерывной на промежутке $[-1,1]$ функции $f(x)$) последовательностью полиномов:

$$U_n^{(1)}(f; x) = [l_{n1}(x) + l_{n2}(x)]\, f(x_{n1}) + [l_{n3}(x) + l_{n4}(x)]\, f(x_{n3}) + \ldots,$$

$n = n_0, n_0+1, \ldots$ Здесь $l_{nk}(x)$ — основные полиномы формулы Лагранжа, составленной для узлов $x_{nk}$ из промежутка $[-1,1]$. Второй процесс (при $p=1$) определяется последовательностью полиномов:

$$\widetilde{U}_n^{(1)}(f; x) = \sum_{k=1}^{n} l_{nk}(x) \frac{f(x_{n,k-1}) + f(x_{n,k+1})}{2}$$

$(x_{n,0} = x_{n,1},\ x_{n,n+1} = x_{n,n})$, $n = n_0, n_0+1, \ldots$

В работе С. Н. Бернштейна было доказано, что в случае, когда узлы $x_{nk}$ являются чебышевскими, оба процесса $U_n^{(p)}(f; x)$, $\widetilde{U}_n^{(p)}(f; x)$ равномерно сходятся (при $n \to \infty$) к $f(x)$ для каждой непрерывной функции. Там же отмечено (стр. 134), что $\widetilde{U}_n^{(p)}(f; x)$ не будет, вообще говоря, равномерно сходиться к $f(x)$, если узлы $x_{nk}$ из $[-1,1]$ взяты равноотстоящими.

В реферируемой статье приводятся (без доказательства) следующие результаты для случая равноотстоящих узлов.

Для функции $f(x) = x$ процесс $U_n^{(1)}(f; x)$ расходится при любом $x \neq 0$ из $(-1,1)$, а процесс $\widetilde{U}_n^{(1)}(f; x)$ сходится к $f(x) = x$ при любом $x$ из $[-1,1]$. (Этим решается вопрос А. О. Гельфонда: всегда ли процессы $U_n^{(p)}$ и $\widetilde{U}_n^{(p)}$ одновременно сходятся.) Процесс $\widetilde{U}_n^{(1)}(f; x)$, построенный для функции $f(x) = |x|$, расходится при любом $x$ из $(-1, 1)$. Для процесса $\widetilde{U}_n^{(2)}(f; x)$ с узлами Чебышева приводится оценка вида $|\widetilde{U}_n^{(2)}(f; x) - f(x)| \leqslant M\omega(1/n)$ при любом $x$ из $[-1,1]$, где $M$ — константа, $\omega(h)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$.

В. Ф. Николаев

**1248. К теории интерполирования действительных функций. Квade** (Zur Interpolationstheorie der reellen Funktionen. Quade W.), Z. angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 8/9, 301 (нем.)

Краткое предварительное сообщение о результатах работы автора (см. реф. 1249).

**1249. К теории интерполирования действительных функций. Квade** (Zur Interpolationstheorie der reellen Funktionen. Quade W.), Z. angew. Math. und Mech., 1955, **35**, № 4, 144—156 (нем.; резюме англ., франц., русс.)

Пусть $f(x)$ — функция, заданная на $[0, \pi]$ и имеющая непрерывную производную порядка $2r$. Вводится рациональный многочлен $P(x)$ степени не выше $2r$, определяемый соотношениями: $P(0) = 0$, $P^{(2\rho+1)}(0) = f^{(2\rho+1)}(0)$, $P^{(2\rho+1)}(\pi) = f^{(2\rho+1)}(\pi)$ ($\rho = 0, 1, \ldots, r-1$). Полагая $F(x) = f(x) - P(x)$ и распространяя $F(x)$ как четную $2\pi$-периодическую функцию, автор строит четный тригонометрический многочлен $T(x)$ порядка не выше $2r$, совпадающий с $F(x)$ в узлах $k\pi/n$. Из известной оценки отклонения тригонометрического интерполяционного многочлена от интерполируемой функции следует, что сумма $V(x) = P(x) + T(x)$, совпадая с $f(x)$ в узлах $k\pi/n$, отклоняется от $f(x)$ не больше чем на

$$A_r n^{-2r} \ln n\, \omega_{2r}\left(\frac{\pi}{n}\right), \qquad (1)$$

где $\omega_{2r}(\delta)$ — модуль непрерывности $f^{(2r)}(x)$, а $A_r$ — постоянная.

Сходное интерполяционное выражение $V(x)$, являющееся суммой алгебраического и тригонометрического многочленов, строится и для $f(x)$, имеющей на $[0, \pi]$ непрерывную производную порядка $2r+1$. В этом случае многочлен $P(x)$ определяется несколько иначе, а функция $F(x) = f(x) - P(x)$ распространяется как $2\pi$-периодическая и нечетная.

В обоих случаях интегрирование приближенного равенства $f(x) = V(x)$ приводит к квадратурным формулам, первая из которых (построенная для $2r$-кратно дифференцируемой функции) совпадает с формулой Эйлера — Маклорена, а вторая имеет сходную структуру. Попутно получаются оценки остаточных членов этих формул. Для первой из них остаток не больше величины типа (1). Изучаются коэффициенты обеих квадратурных формул и находятся их асимптотические (при больших $n$) выражения. И. П. Натансон

**1250. О системе уравнений чебышевской аппроксимации. Венцль** (Über Gleichungssysteme der Tschebyscheffschen Approximation. Wenzl F.), Z. angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 10/11, 385—391 (нем.; резюме англ., франц., русс.)

Рассматривается задача отыскания параметров $a_1, \ldots, a_n$ так, чтобы функция

$$f(x;\ a_1, \ldots, a_n) = \frac{\sum_{\mu=0}^{M} R_\mu(a_1, \ldots, a_n)\, x^\mu}{\sum_{\mu=0}^{M} S_\mu(a_1, \ldots, a_n)\, x^\mu},$$

где $R_\mu(a_1, \ldots, a_n)$, $S_\mu(a_1, \ldots, a_n)$ — целые линейные функции от параметров, наименее уклонялась от нуля на $[A, B]$.

Вместо обычной системы уравнений (Чебышев П. Л., Полное собрание сочинений, т. 2, Изд-во АН СССР, 1947, 203), связывающей искомые значения параметров, величину $L$ наименьшего уклонения и $n+1$ последовательных точек $\xi_k$ сегмента $[A, B]$, в которых достигается это уклонение, автор получает другую. Он разбивает точки $\xi_k$ на два класса и для каждого класса вводит многочлены $\Pi_k(x - \xi_k)$. Указанная выше система уравнений преобразовывается в другую, содержащую большее число уравнений, но более низких степеней (не выше четвертой). Метод иллюстрируется двумя простыми числовыми примерами. С. И. Зуховицкий

**1251. Оптимальное приближение функций полиномами. Гарвик** (The optimal approximation of functions by polynomials. Garwick Jan V.), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 340 (англ.)

**1252. Оценки, касающиеся произведений показательной и периодической функций. Хейл** (Evaluations concerning products of exponential and periodic functions. Hale Jack K.), Rev. mat. Univ. Parma, 1954, **5**, № 1—3, 63—81 (англ.)

Функция $f(x)$ принадлежит классу $C_\omega$, если

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} e^{\alpha_i x} \varphi_i(x),$$

где $\alpha_i$ — комплексные числа, а $\varphi_i(x)$ — однозначные периодические функции с периодом $T = 2\pi/\omega$, интегрируемые в смысле Лебега на отрезке $[0, T]$. Для каждой функции $f(x) = e^{\alpha x}\varphi(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{(in\omega+\alpha)x}$ определяется величина $m[f]$,

$$m[f] = \begin{cases} 0, & \text{если } in\omega + \alpha \neq 0 \text{ для всех } n, \\ c_n, & \text{если } in\omega + \alpha = 0 \text{ для некоторого } n. \end{cases}$$

Доказываются теоремы:

1. Для функции $f(x) \in C_\omega$ примитивная $F(x) \in C_\omega$ тогда и только тогда, когда $m[f] = 0$.

2. Пусть $f(x) = \sum_1^n e^{\alpha_i x}\varphi_i(x) \in C_\omega$, $m[\varphi_i] = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $m[f] = 0$. Существует конечное разложение $f = \sum_1^m f_i$ в $C_\omega$ такое, что

$$\int f(x)\,dx = \sum_1^m \int_{\delta_i}^{x} f_i(t)\,dt,$$

где $0 < \delta_i < T$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

3. Для каждой функции $f(x) = \sum_1^n e^{\alpha_i x}\varphi_i(x) \in C_\omega$ с $m[f] = 0$ существуют константы $N(\alpha_i, T)$, зависящие только от $\alpha_i$, $T$ такие, что

$$\left|\int f(x)\,dx\right| \leqslant \sum_1^n N(\alpha_i, T) \int_0^T |\varphi_i(x)|\,dx$$

для всех $0 \leqslant x \leqslant T$. И. Е. Жак

**1253. Оценка функций с помощью интегралов Лебега. Коксма** (Estimations de fonctions à l'aide d'intégrales de Lebesgue. Koksma J. F.), Bull. Soc. math. Belgique, 1953 (1954), **6**, 4—13 (франц.)

Пусть $g(t) \in L^2$ — периодическая функция действительной переменной $t$ с периодом 1 и рядом Фурье $g(t) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{2\pi ikt}$. Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \sum_{d|k} d^{-1} < \infty, \tag{1}$$

то почти всюду

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} g(kx) = \int_0^1 g(t)\,dt. \tag{2}$$

Этот результат является следствием сложно формулируемой теоремы, позволяющей в некоторых случаях устанавливать предельные оценки функций данной последовательности с помощью соответствующих оценок интегралов этих функций. Простейшим прототипом этого рода предложений может служить следующая теорема Лебега: из $\sum_1^\infty \int_a^b |f_n(x)|\,dx < \infty$ следует $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ почти всюду в $a \leqslant x \leqslant b$. Предположительно, соотношение (2) имеет место и без дополнительного условия (1). В своей прежней работе (J. Indian Math. Soc., 1951, **15**, 87—96) автор доказал соотношение (2) при более узком предположении: $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \sum_{d|k} d^{-1} \ln^2 d < \infty$. А. Я. Хинчин

**1254. Об одной задаче для полиномов, монотонных в промежутке $(-a, +a)$, аналогичной задаче Е. И. Золотарева. Григорьева И. А.**, Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1954 (1955), **16**, 210—215

Рассматривается многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами $f(x) = x^n + \sigma x^{n-1} + \ldots + p_n$ (где $\sigma$ — данное число), монотонно возрастающий на отрезке $[-a, a]$, где $a \geqslant 1$; найден минимум его полной вариации на отрезке $[-1, 1]$.

Автор говорит о полной вариации многочлена на отрезке $[-a, a]$, но, как видно из дальнейших вычислений, речь идет о вариации на отрезке $[-1, 1]$. Я. Л. Геронимус

**1255. Общие квадратурные формулы типа Гаусса. Чакалов** (Общи квадратурни формули от Гаусов тип. Чакалов Любомир), Изв. на Матем. ин-т Българ. АН, 1954, **1**, № 2, 67—84 (болг.; резюме русс.)

Изучается квадратурная формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k} A_{k\lambda} f^{(\lambda)}(a_k)\quad(-\infty < a < b < \infty),\ (1)$$

где $m > 0$ и $r_k \geqslant 0$ — данные целые числа. Основные результаты:

1. Если на $(a, b)$ заданы различные узлы $a_k$ $(k=1,\ldots,m)$, то формула (1) точна для всякого многочлена $f(x)$ степени ниже $M = \sum_1^m (r_k+1)$ тогда и только тогда, когда $\lambda!\, A_{k\lambda} = B_{k\lambda}$, где $B_{k\lambda}$ — коэффициенты разложения

$$R(z) = \frac{1}{P(z)}\int_a^b \frac{P(z)-P(x)}{z-x}\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k} B_{k\lambda}\,(z-a_k)^{-(\lambda+1)},$$

$$P(x) = \prod_1^m (x-a_k)^{r_k+1}$$

(Докл. АН СССР, 1949, 68, 233—236).

2. Узлы $a_k$ на $(a, b)$ и действительные коэффициенты $A_{k\lambda}$ можно выбрать так, что формула (1) точна для всякого многочлена $f(x)$ степени, меньшей $N = \sum_1^m (2[r_k/2]+2)$; это число $N$—наибольшее возможное. Если все $r_k$ четны, то узлы $a_k$ определяются из условия, что многочлен $P(x)$ ортогонален на $(a, b)$ всякому многочлену степени, меньшей $m$; в точке $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ области $-\infty < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < \infty$ $m$-мерного пространства функция $F(x_1, \ldots, x_m) = \int_a^b \prod_{k=1}^m (x-x_k)^{r_k+2}dx$ имеет локальный минимум. Коэффициенты $A_{k\lambda}$ определяются, как и выше. Случай, когда среди чисел $r_k$ есть нечетные, сводится к случаю четных $r_k$.

3. Если $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную порядка $N$, то остаточный член формулы (1) имеет вид $\int_a^b v(x)\,f^{(N)}(x)\,dx$, где $v(x)$ — функция, не зависящая от $f(x)$, непрерывная на $[a, b]$ и положительная на $(a, b)$.

А. Х. Турецкий

**1256. Развитие теории Чебышева — Маркова предельных величин интегралов в одном новом направлении. Крейн М. Г., Рехтман П. Г.,** Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 1, 67—78

В классической постановке проблемы моментов носителем искомого распределения неотрицательных масс является некоторый континуум. Авторы развивают проблему моментов и, в частности теорию Чебышева — Маркова предельных величин интегралов, в новом направлении, требуя, чтобы носителем распределения масс была некоторая дискретная последовательность точек с единственной предельной точкой. Выясняется роль новой проблемы моментов для теории абсолютно монотонных функций и получаются основные результаты С. Н. Бернштейна, касающиеся интерполирования и экстраполирования абсолютно монотонных функций в конечном интервале. Кроме того, получены новые факты, относящиеся к абсолютно монотонным функциям в конечном интервале.

Статья состоит из четырех параграфов: Основной критерий разрешимости проблемы моментов на компакте; Случай целочисленного компакта $E$; Канонические представления; Применение предыдущих положений в теории абсолютно монотонных функций в конечном интервале. Библ. 5 назв.

Н. И. Ахиезер

**1257. Геометрия пространств моментов. Карлин, Шапли** (Geometry of moment spaces. Karlin S., Shapley L. S.), Mem. Amer. Math. Soc., 1953, № 12, 1—93 (англ.)

Рассматривается степенная проблема моментов Хаусдорфа. Последовательно геометрическое изложение основано на рассмотрении выпуклых множеств $D^n$, образованных точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_k = \int_0^1 t^k\,d\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — функция распределения, и «сопряженных» в известном смысле выпуклых множеств $P^n$, образованных неотрицательными на $[0,1]$ полиномами степени $\leqslant n$. Существенную роль при этом играют точки границы $D^n$, каждой из которых соответствует единственная функция распределения с конечным числом точек роста, и точки границы $P^n$, отвечающие полиномам, имеющим корни в $[0,1]$.

Приводим содержание работы: I. Выпуклые множества; II. Пространство моментов $D^n$ и его сопряженное $P^n$; III. Симплексы $S^n$ и $B^n$; IV. Алгебраическая характеристика пространств моментов; V. Распределения, имеющие заданные моменты; VI. Приложение к ортогональным полиномам; VII. Свойства симметрии пространств моментов. Библ. 18 назв.

Отсутствуют ссылки на работы М. Г. Крейна, в частности на статью «Общие теоремы о позитивных функционалах» (в сб.: Ахиезер Н. И., Крейн М. Г. «О некоторых вопросах теории моментов», Харьков, 1938), в которой на стр. 126 и далее содержится доказательство основных свойств $D^n$, и на его другую статью (Успехи матем. наук, 1951, 6, № 4, 3—120).

Н. С. Ландкоф

**1258 К. Конструктивная теория функций. Натансон** (Konstruktive Funktionentheorie. Natanson J. P. Berlin, Akad.-Verl., 1955, XIV + 515 S.) (нем.)

Перевод книги «Конструктивная теория функций» (М.—Л., 1949) с добавлением списка новых работ.

---

**См. также**: 918, 981, 982, 986, 1179, 1180, 1184, 1188, 1191, 1284, 1305, **1446**, 1476, 1486, 1502.

## ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

**1259. Множества сходимости обыкновенных рядов Дирихле. Брауэр** (Sets of convergence of ordinary Dirichlet series. Brauer George), Duke Math. J., 1954, **21**, № 4, 593—594 (англ.)

Обобщается на ряды Дирихле следующий результат (Herzog F., Piranian G., Duke Math. J., 1949, **16**, 529—534): если $M$ множество типа $F_\sigma$ на границе $C$ единичного круга, то существует ряд Тейлора, который сходится на $M$ и расходится на $C \setminus M$. Доказывается теорема: Если $\alpha$ — действительное число и $M$— множество типа $F_\sigma$ на прямой $L: \sigma = \alpha\ (s = \sigma + i\tau)$, то

имеется обыкновенный ряд Дирихле $\sum_1^\infty a_n n^{-s}$, который сходится на $M$ и расходится на $L \setminus M$.

А. Ф. Леонтьев

1260. **Об аналитическом продолжении рядов Тейлора и рядов Дирихле. Островский** (Über die analytische Fortsetzung von Taylorschen und Dirichletschen Reihen. Ostrowski Alexander), Math. Ann., 1955, 129, № 1, 1—43 (нем.)

Рассматривается ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_0^\infty c_\nu e^{-\lambda_\nu s}, \quad \lambda_\nu \uparrow \infty \tag{1}$$

с конечной абсциссой сходимости и ставится (не впервые) вопрос о том, куда может быть аналитически продолжена функция

$$F(s) = \sum_0^\infty \varphi(\lambda_\nu) c_\nu e^{-\lambda_\nu s} \tag{2}$$

при тех или иных условиях, наложенных на $\varphi(z)$, если известно, куда аналитически продолжается функция $f(s)$ из полуплоскости сходимости ряда (1). Крамер показал, что если $\varphi(z)$—целая функция, не выше первого порядка нормального типа, т. е. при любом $\varepsilon > 0$

$$\varphi(z) = O\left(e^{(k+\varepsilon)|z|}\right) \quad (|z| \to \infty), \tag{3}$$

то тогда $F(s)$ продолжима аналитически из полуплоскости $\operatorname{Re} s > \sigma + k$ ($\sigma$ — абсцисса абсолютной сходимости ряда (1)) вдоль каждого пути, вдоль которого продолжима $f(s)$ с радиусом сходимости $> k$ (в процессе продолжения вдоль пути расстояние до особых точек рассматриваемого элемента $f(s)$ постоянно остается $> k$). Этот результат остается верным, как отметил ранее автор, если под $\sigma$ понимать абсциссу простой сходимости ряда (1). Сула (Soula) и В. Бернштейн (см., например, Bernstein V. Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933) обобщили определенным образом результат Крамера на случай, когда $\varphi(z)$ является регулярной в области $|z| \geqslant R$, $\alpha_1 < \arg z < \alpha_2$, где $-\pi/2 < \alpha_1 < 0 < \alpha_2 < \pi/2$, и в любом угле $\alpha_1 + \varepsilon < \arg z < \alpha_2 - \varepsilon$ удовлетворяет условию (3) (у Сулы $k = 0$, у Бернштейна $k$ — произвольное).

В реферируемой статье рассматривается случай, когда $\varphi(z)$ регулярна в области $|z| \geqslant R$, $\alpha_1 < \arg z < \alpha_2$, причем предполагается только, что $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$. В зависимости от того, будет ли $\alpha_2 - \alpha_1 \leqslant \pi$ или $\alpha_2 - \alpha_1 > \pi$, получаются разные теоремы, причем они формулируются и доказываются для функций $f(s)$ и $F(s)$ несколько более общей природы, именно для функций

$$f(s) = \int_a^\infty e^{-\lambda s} dA(\lambda), \tag{4}$$

$$F(s) = \int_a^\infty e^{-\lambda s} \varphi(\lambda)\, dA(\lambda). \tag{5}$$

Здесь $A(\lambda)$ — некоторая функция, определенная на луче $[a, \infty)$ и обладающая на любом конечном отрезке этого луча ограниченной вариацией (при определенном выборе $A(\lambda)$ функции (4) и (5) будут представляться формулами (1) и (2)).

I. Если $\alpha_2 - \alpha_1 \leqslant \pi$, интеграл (4) имеет конечную абсциссу сходимости $\sigma$, функция $f(s)$ продолжима с радиусом сходимости $> k$ из полуплоскости $\operatorname{Re} s > \sigma$ в точку $s_0$ по всем прямолинейным путям, углы наклона которых заключены между $\pi/2 - \alpha_1$ и $3\pi/2 - \alpha_2$, то тогда по этим путям в точку $s_0$ продолжима и функция $F(s)$ из полуплоскости $\operatorname{Re} s > \sigma + k$ (если здесь считать $\alpha_1 > -\pi/2$, $\alpha_2 < \pi/2$ и под $f(s)$ и $F(s)$ понимать функции (1) и (2), то получим для $k = 0$ и $k > 0$ соответственно теоремы Сулы и Бернштейна). В частности, при $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi$ получаем, что если $f(s)$ в точку $s_0$ продолжима с радиусом сходимости $> k$ вдоль луча $\arg(s - s_0) = -(\alpha_1 + \alpha_2)/2$, то тогда вдоль этого луча продолжима в точку $s_0$ и $F(s)$.

II. Если $\alpha_2 - \alpha_1 > \pi$, функция $f(s)$ продолжима с радиусом сходимости $> k$ из полуплоскости $\operatorname{Re} s > \sigma$ в точку $s_0$ по ломаной $L$, наклоны звеньев которой удовлетворяют некоторым определенным условиям в зависимости от $\alpha_1$ и $\alpha_2$, то тогда в точку $s_0$ по $L$ продолжима и $F(s)$. Доказательство основано на представлении $F(s) = (2\pi i)^{-1} \int_C \Phi(u) f(s-u)\, du$, где $\Phi(u) = \int_R^\infty \varphi(z) e^{-uz} dz$ и $C$ — некоторый контур.

А. Ф. Леонтьев

1261. **Некоторые теоремы типа Фабера относительно проблемы Адамара-Мандельбройта. Бламбер** (Quelques théorèmes Faberiens relatifs au problème Hadamard-Mandelbrojt. Blambert Maurice), Rend. Circolo mat. Palermo, 1954, 3, № 2, 214—243 (франц.)

Продолжение статьи автора (РЖМат, 1954, 3991). Изучаются функции $f(s)$, $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ (реф. 3991). Теорема Мандельбройта в существенных чертах состоит в том, что особые точки $\psi(s)$ содержатся в множестве точек вида $\omega + \beta$, где $\omega$ и $\beta$ — особые точки соответственно $f(s)$ и $\varphi(s)$. Рассматривается вопрос о том (проблема Адамара — Мандельбройта), при каких условиях точка $\gamma = \omega + \beta$ действительно будет особой для $\psi(s)$. В предыдущей статье был изучен случай, когда одна из точек $\omega$, $\beta$ является для соответствующей функции полюсом. В этом случае вывод, что $\gamma$ будет особой точкой для $\psi(s)$, основывался при подходящих условиях в конечном счете на том, что любая особая точка некоторой функции $y(s)$ непременно будет особой для функции вида $F(s) = \sum_0^n c_k y^{(k)}(s)$.

В реферируемой статье предполагается, что одна из точек $\omega$, $\beta$ является существенно особой для соответствующей функции. В этом случае вывод, что $\gamma$ будет особой точкой для $\psi(s)$ основывается при определенных условиях в конечном счете на том, что если $\alpha$ — особая точка для $y(s)$, то тогда она—особая для $F(s) = \sum_0^\infty c_k y^{ks}$, где коэффициенты $c_k$ таковы, что функция $\Phi(s) = \sum_0^\infty c_k s^k$ —целая, не выше первого порядка минимального типа. Точка $\alpha$, будучи особой для $y(s)$, не всегда будет особой для $F(s)$; $\alpha$ будет особой для $F(s)$, например тогда, когда она для $y(s)$ — достижимая (accessible) особая точка (Pólya G., Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1927, 187—195): существуют круг с центром в $\alpha$ и его диаметр, такие, что $y(s)$ регулярна в одном из полукругов, на которые диаметр делит круг, и на одном из радиусов, составляющих диаметр.

В соответствии с этим формулировки некоторых теорем получаются из формулировок соответствующих теорем предыдущей статьи путем простого добавления, что та или иная точка является для соответствующей функции достижимой в указанном смысле. Именно, теоремы 1 и 2 получаются формально соответственно из теорем 1 и 2 предыдущей статьи (см. указанный реф.), если при всех других условиях в теореме 1 считать, что $\omega$ — достижимая особая точка для $f(s)$, $\beta$ — существенно особая точка для $\varphi(s)$, а в теореме 2: $\omega$—существенно особая для $f(s)$, $\beta$—достижимая для $\varphi(s)$. Отметим, что условие г) в этих теоремах исключает возможность равенства $\omega + \beta = \omega_1 + \beta_1$, где (как $\omega$ и $\beta$) точки $\omega_1$ и $\beta_1$ являются особыми соответственно для $f(s)$ и $\varphi(s)$. По этой причине указанные теоремы

не применимы к рядам $f(s)=\sum a_n e^{-ns}$, $\varphi(s)=\sum b_n e^{-ns}$ (их будем называть рядами Тейлора-Д), ибо для них отмеченные равенства всегда имеют место. В связи с этим проблема Адамара — Мандельбройта отдельно рассматривается для рядов Тейлора-Д. Соответствующий результат (теорема 3) ввиду сложности формулировки не приводим. Теорема 4 касается случая, когда $f(s)$ и $\varphi(s)$ не суммы рядов Тейлора-Д, однако для них $\omega+\beta=\omega_1+\beta_1=\ldots$ А. Ф. Леонтьев

**1262. О рядах Фабера. I. Проблема переноса. Алман** (On Faber series. 1. Problem of transfer. Ullman J. L.), Michigan Math. J., 1953—1954, 2, № 2, 109—114 (англ.)

Ставится задача перенесения теорем о степенных рядях на ряды Фабера. Пусть функция $w=f(z)$ отображает внешность аналитической кривой $C$ на дополнение единичного круга, $z=g(w)$ — обратная функция и $F_n(z)$ — многочлены Фабера.

Рассматриваются функции

$$F(z)=\sum_0^\infty a_n F_n(z), \quad G(t)=\sum_0^\infty a_n t^n$$

при условии $\overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}=1$. С помощью формул

$$F(z)=(2\pi i)^{-1}\int_{|w|=r} G(w)\,g'(w)\,[g(w)-z]^{-1}\,dw,$$

$$G(t)=(2\pi i)^{-1}\int_{C_r} F(\zeta)\,f'(\zeta)\,[f(\zeta)-t]^{-1}\,d\zeta,$$

где $C_r$ — линия, на которой $|f(z)|=r<1$, доказывается, что $F(z)$ есть рациональная функция тогда и только тогда, когда $G(t)$ — рациональная функция. На ряды Фабера переносится теорема: Если все коэффициенты степенного ряда есть целые числа, то или сумма ряда есть рациональная функция или каждая точка окружности круга сходимости есть особая точка. П. К. Суетин

**1263. Порожденные базисные множества полиномов. Вермс, Михаил** (Generated basic sets of polynomials. Vermes P., Mikhail M. N.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, A57, № 5, 556—559; Indagationes math., 1954, 16, № 5, 556—559 (англ.)

Относительно основных обозначений и понятий, а также некоторые предшествующие результаты см. РЖМат, 1954, 1628, 1994, 2091, 3671; 1955, 623, 1721, 1722.

Множество $\{q_n(z)=q_n z^n\}$ называется диагональным базисным множеством. Пусть $\{p_n(z)\}$ — какое-то базисное множество и пусть $\{u_n(z)\}=\{p_n(z)\}\{q_n(z)\}$ и $\{u_n^*(z)\}=\{q_n(z)\}\{p_n(z)\}$ — множества-произведения ($\{q_n(z)\}$ — диагональное множество). При условии, что для $\{p_n(z)\}$ $\overline{\lim}(D_n/n)\geqslant 1$ доказываются теоремы 1,2: Множество $\{u_n^*(z)\}$ и обратное множество для множества $\{u_n(z)\}$ при любых $q_n$ имеют те же порядок, величину Г и область эффективности, что и $\{p_n(z)\}$.

Теорема 3. Пусть для $\{q_n(z)\}$ $Kn^{-h}\leqslant q_n\leqslant k'n^{h'}$ ($h$ и $h'$ положительны). Тогда $\{u_n(z)\}$ имеет те же порядок, величину Г и область эффективности, что и $\{p_n(z)\}$.

Из этих теорем вытекает (часто с усилением) целый ряд результатов, например результаты о производном и интегральном множествах данного базисного множества полиномов. С. Я. Хавинсон

**1264. Комплексная биортогональность некоторых систем многочленов. Дейвис, Поллак** (Complex biorthogonality for certain sets of polynomials. Davis Philip, Pollak Henry), Duke Math. J., 1954, 21, № 4, 653—667 (англ.)

Приводятся усиление и примеры приложения следующей теоремы Уолша и Дейвиса (Walsh J. L., Davis P., J. analyse math., 1952, 2, 1—28).

На множестве $L^2(B)$ функций, аналитических и суммируемых с квадратом по площади области $B$, ограниченной конечным числом аналитических кривых, определены линейные функционалы $L_n$; если последовательность $\{L_n\}$ ограничена, независима и полна в $L^2(B)$, то существуют такие системы функционалов $\{L_n^*\}$ и функций $\{\varphi_n^*(z)\}$, что: а) $\varphi_n^*(z)\in L^2(B)$, б) система $\{\varphi_n^*(z)\}$ полна и ортонормальна, в) $L_n^*=\sum_{k=1}^n a_{n,k}L_k$, г) системы $\{L_n^*\}$ и $\{\varphi_n^*(z)\}$ биортогональны.

Если $z\notin B$, то ядро Коши имеет разложение

$$(z-w)^{-1}=\sum_{n=0}^\infty L_{n,\,w}^*\,[(z-w)^{-1}]\,\varphi_n^*(w).$$

Доказывается, что если функции $h_n(z)=L_{n,\,w}^*\,[(z-w)^{-1}]$ являются аналитическими в $\overline{B}$, то системы $\{h_n(z)\}$ и $\{\varphi_n^*(z)\}$ биортогональны на границе области $B$. В качестве приложения рассматриваются три частные системы линейных функционалов. Теорема Уолша и Дейвиса обобщается на случай неограниченной области при частном виде функционалов $L_n$, причем в этом случае функционалы $L_n^*$ выражаются через многочлены Фабера дополнения $B$. П. К. Суетин

**1265. О замкнутости одной системы функций. Мопперт** (Über die Abgeschlossenheit eines Funktionensystems. Moppert Karl-Felix), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 140 (нем.)

Как известно, система $\{x^{p_k}\}$, $p_0=0$, является замкнутой на [0,1] в классе $L^2$, если ряд $\sum_1^\infty p_k^{-1}$ расходится. В порядке обобщения этого результата рассматривается система $\{f(z_k,\,x)\}$ и сообщается, что при некоторых условиях (точно не указано, каких) она будет замкнута, если будет расходиться некоторый ряд (не указано, какой именно). А. Ф. Леонтьев

**1266. Теория преобразований и интерполяционный ряд Ньютона. Макинтайр** (Transform theory and Newton's interpolation series. Macintyre Sheila Scott), Proc. London Math. Soc., 1954, 4, № 16, 385—401 (англ.)

Получен результат, усиливающий теоремы Карлсона, Нёрлунда и Бака: Пусть $F(z)$ регулярна в полуплоскости $\mathrm{Re}\,z\geqslant\alpha$ и удовлетворяет неравенству

$$|F(\alpha+re^{i\varphi})|\leqslant K(1+r)^\beta e^{\tau h(\varphi)},$$

где $h(\varphi)=\cos\varphi\ln(2\cos\varphi)+\varphi\sin\varphi$, $|\varphi|\leqslant\pi/2$. Если $\alpha<\mu$ и $\beta<\mu\leqslant 0$, то ряд

$$F(0)+\frac{\Delta F(0)}{1!}z+\frac{\Delta^2F(0)}{2!}z(z-1)+\ldots$$

сходится к $F(z)$ в полуплоскости $\mathrm{Re}\,z\geqslant\mu$. Аналогичный результат имеет место и для $\mu>0$ с точностью до возникающих в этом случае разложений нуля. М. А. Евграфов

**1267. Об однолистных функциях. Линис** (Note on univalent functions. Linis Viktors), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 2, 109—110 (англ.)

Дается упрощенное доказательство теоремы Фридмана (Friedman B., Duke Math. J., 1946, **13**, 74—75): Если $f(z)=z+\sum_2^\infty a_n z^n$ — аналитическая и однолистная в круге $|z|<1$ функция и все $a_n$ — целые рациональные числа, то $f(z)$—одна из следующих функций: $z, z(1\pm z)^{-1}$, $z(1\pm z^2)^{-1}$, $z(1\pm z)^{-2}$, $z(1\pm z+z^2)^{-1}$.

Доказывается также, что теорема остается верной, если $a_n$ — целые гауссовы числа и к упомянутым девяти функциям добавить еще функции $z(1\pm iz)^{-1}$, $z(1\pm iz)^{-2}$, $z(1\pm iz-z^2)^{-1}$. Доказательство основано на одном неравенстве Правица. Г. В. Корицкий

**1268. Об одном классе однолистных функций. Рид** (Sur une classe de fonctions univalentes. Reade Maxwell), C. r. Acad sci., 1954, **239**, № 25, 1758—1759 (франц.)

Рассматривается класс функций $f(z)=\sum_1^\infty a_n z^n$, регулярных и однолистных в круге $|z|<1$, для которых можно указать такую регулярную, однолистную и выпуклую в $|z|<1$ функцию $\Phi(z)$, что в $|z|<1$ выполняется неравенство

$$\mathrm{Re}\,[f'(z)/\Phi'(z)]\geqslant 0.$$

Этот класс функций, впервые рассмотренный Капланом (Kaplan W., Michigan Math. J., 1952, **1**, 169—185) и названный им классом «почти выпуклых» функций, шире классов функций выпуклых, звездных и некоторых других.

Доказывается, что $|a_n|\leqslant n|a_1|$ $(n\geqslant 1)$. Отмечается, что с помощью почти выпуклых функций просто доказывается оценка $|a_n|\leqslant n^2$ $(n\geqslant 1)$ для функций, звездных в данном направлении (Robertson M. S., Amer. J. Math., 1936, 58, 465—472); приводятся также некоторые достаточные условия однолистности регулярных функций. С. А. Гельфер

**1269. Об областях, не покрытых значениями однолистных функций. II. Гудман, Рейк** (On regions omitted by univalent functions. II. Goodman A. W., Reich E.), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 1, 83—88 (англ.)

Пусть $S$ — семейство регулярных однолистных функций $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ в круге $|z|<1$, $D_f$ — образ этого круга, $A_f$ — площадь общей части $D_f$ и круга $|w|<1$ и $A=\inf_{f\in S}A_f$. Гудманом (Goodman A. W., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, 363—369) были доказаны неравенства $0{,}5\pi\leqslant A<0{,}7728\pi$, улучшенные $(0{,}5387\pi<A)$ Дженкинсом (РЖМат, 1954, 2920).

Доказывается неравенство $0{,}62\pi<A$, основанное на следующей теореме: Пусть $S(s)$ — подкласс функций $f(z)\in S$, для которых расстояние от начала до границы $D_f$ равно $s$, и $L(r,s)$ — мера множества точек окружности $|w|=r$, не покрытых областью $D_f$. Если $s\leqslant r\leqslant s(2s^{1/2}-1)^{-1}$, то справедливо точное неравенство $L(r,s)\leqslant 2r\arccos(4s^{1/2}-1-r(8-4s^{-1/2}))$.

И. Е. Базилевич

**1270. О конформных отображениях бесконечносвязных областей. Браун** (On conformal mappings of domains of infinite connectivity. Brown L. J. M.), Proc.Cambridge Philos. Soc., 1955, **51**, № 1, 56—64 (англ.)

Одноточечная неизолированная компонента связности границы плоской (однолистной) области называется совершенной, если при любом конформном отображении данной области эта компонента переходит в единственную точку. Опираясь на критерии совершенности, данные Грецшем (Grötzsch H., Ber. sächs. Ges. (Akad.) Wiss., 1929, **81**, 51—86; 1935, **87**, 319—324), автор выводит новые признаки совершенности, которые затем применяет к областям специального вида. Вывод основан на неравенствах, часть которых получена Мешковским (Meschkowski H., Math. Ann., 1951, **123**, 392—405), связывающих геометрические характеристики и конформные инварианты двусвязных областей. Далее, обобщая конструкцию Мешковского (Math. Ann., 1952, **124**, 178—181), автор строит широкий класс примеров областей, для которых континуальная компонента связности границы может быть при конформном отображении области переведена в одноточечную. А. Д. Мышкис

**1271. Обобщенная краевая задача Гильберта. Погожельский В.,** Бюл. Польск. АН, Отд. 3, 1954, **2**, № 8, 373—376

**Обобщенная краевая задача Гильберта. Погожельский** (Problème aux limites d'Hilbert généralisé. Pogorzelski W.), Bull. Acad. polon. sci., Cl. 3, 1954, **2**, № 8, 367—370 (франц.)

Пусть $L_0, L_1, \ldots, L_p$ — плоские замкнутые гладкие взаимно не пересекающиеся кривые Жордана, из которых первая содержит внутри себя все остальные. Предположим, кроме того, что линия $L=L_0+L_1+\ldots+L_p$ есть граница связной области. Рассматривается задача: найти кусочно-голоморфные функции $\Phi_\alpha(z)$, $\alpha=1,\ldots,m$, с линией скачков $L$, которые удовлетворяют на $L$ граничным условиям

$$\Phi_\alpha^+(t)=G_\alpha(t)\Phi_\alpha^-(t)+\lambda F_\alpha[t,\Phi_1^+(t),\ldots,\Phi_m^+(t),\Phi_1^-(t),\ldots,\Phi_m^-(t)],$$

где $G_\alpha(t)$ — функции, заданные на $L$; $F_\alpha(t,u_1,\ldots,u_{2m})$ — функции, определенные для $t\in L$, $|u_\nu|\leqslant R$, $\nu=1,\ldots,2m$; $\lambda$ — параметр. Эта задача изучалась в предыдущей работе автора (РЖМат, 1955, 2639) в предположении, что $G_\alpha$ и $F_\alpha$ — голоморфные функции в некоторых областях и модуль $\lambda$ достаточно мал. В реферируемой работе для малого $|\lambda|$ задача изучена в предположении, что функции $G_\alpha(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера, а функции $F_\alpha(t,u_1,\ldots,u_{2m})$ — условию Гёльдера относительно $t$ и условию Липшица относительно $u_1,\ldots,u_{2m}$. Б. В. Хведелидзе

**1272. Интегральные уравнения, связанные с теоретико-функциональными экстремальными проблемами. Нехари** (An integral equation associated with a function-theoretic extremal problem. Nehari Zeev), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 145—146 (англ.)

Пусть $D$ — конечносвязная ограниченная область с жордановой границей $C$. Приводятся без доказательств результаты исследования двух экстремальных проблем:

$$A)\quad \int_{C_1}|f(z)|^2\,ds=1,\quad \int_C|f(z)|^2\,ds=\min;$$

$$B)\quad \iint_{D_1}|f(z)|^2\,dxdy=1;\quad \iint_D|f(z)|^2\,dxdy=\min.$$

Здесь $C_1\subset D$ состоит из конечного числа спрямляемых дуг, а $D_1\subset D$ — из конечного числа областей. Утверждается, что решением или решениями проблемы A) являются решения интегрального уравнения $f(k)=\lambda\int_{C_1}K(z,x)f(z)\,ds$, соответствующие наименьшему собственному значению, и при этом искомый min равен наименьшему собственному числу. Здесь $K(z,x)$ — ядро Сегё. Аналогичный результат имеет место и для задачи B) (в уравнении появляется ядро Бергмана). Упоминается о наличии характеристических тождеств, связывающих граничные значения решений проблем A) и B)

с некоторыми «сопряженными» функциями, и об исследовании других свойств экстремальных функций.

С. Я. Хавинсон

**1273. Заметка о рядах $\sum a_n f(nz)$. Уиттекер** (A note on the series $\Sigma a_n f(nz)$. Whittaker J. M.), Duke Math. J., 1954, **21**, № 4, 571—573 (англ.)

Построен пример ряда $F(z)=\Sigma a_n f(nz)$, в котором $f(z)$ и $g(z)=\Sigma a_n{}^n$ — целые функции первого порядка, а $F(z)$ — целая функция нулевого порядка.

М. А. Евграфов

**1274. Об асимптотическом поведении функции типа Миттаг-Лефлера. Джрбашян М. М.** *Հայկական ՍՍՌ գիտությունների ակադեմիայի զեկույցներ* Докл. АН Армсср, 1954, **19**, № 3, 65—72 (резюме арм.)

Ранее (Fry C. G., Hughes H. K., Duke Math. J., 1942, **9**, 791—802; РЖМат, 1955, 3261) было указано асимптотическое поведение в разных углах при $|z|\to\infty$ целой функции типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z,\mu)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n/\Gamma(\mu+n\rho^{-1})$$

(функция Миттаг-Леффлера соответствует $\mu=1$) в случае $\rho>1/2$, $-\infty<\mu<\infty$. При $\rho=1/2$ о поведении функции известно только то, что при $|\arg z|<\pi$ $E_{1/2}(z,\mu)\sim\frac{1}{2}z^{(1-\mu)/2}e^{z^{1/2}}$ без указания степени точности. В реферируемой заметке устанавливается асимптотическое поведение функции в случае $\rho=1/2$ для любых направлений, причем указывается также порядок дополнительного члена.

Теорема. Если $\mu>0$, то: а) при $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$ и $|z|\to\infty$

$$E_{1/2}(z,\mu)=\frac{1}{2}z^{(1-\mu)/2}\left\{e^{z^{1/2}}+e^{-i\pi(1-\mu)}e^{-z^{1/2}}\right\}+O(z^{-1}),$$

б) при $-\pi\leqslant\arg z\leqslant 0$ $E_{1/2}(z,\mu)$ выражается аналогично с заменой $-i\pi(1-\mu)$ на $i\pi(1-\mu)$ в) при $x\to+\infty$

$$E_{1/2}(-x,\mu)=x^{(1-\mu)/2}\cos\left[x^{\frac{1}{2}}+\pi(1-\mu)/2\right]+O(x^{-1}).$$

А. Ф. Леонтьев

**1275. Асимптотические направления целых функций бесконечного порядка. Клуни** (The asymptotic paths of integral functions of infinite order. Clunie James), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 1, 80—83 (англ.)

Известно, что целая функция порядка $\rho$ не может иметь более $2\rho$ асимптотических направлений. Мию, опираясь на методы, развитые Альфорсом для доказательства этой теоремы, распространил результат на целые функции бесконечного порядка. В реферируемой заметке получен результат в том же направлении.

Доказывается, что если $f(z)$ — целая функция бесконечного порядка, то для всех достаточно больших значений $R$ в кольце $R^{\eta/(1+\eta)}=r\leqslant|z|\leqslant R$ $(\eta>0)$ имеется самое большее $2(1+\eta)(\ln R)^{-1}\ln_2 M(R,f)$ линий $L$, соединяющих граничные окружности кольца и соответствующих им чисел $a_i$ таких, что $|f(z)|-a_i|<\varepsilon$ на $L_i$ и $|a_i-a_j|>\varepsilon^{1/5}$ $(i\neq j)$. Здесь $M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|$ и $\varepsilon<K\{M(r,f)\}^{-15-\delta}$ ($K$ — абсолютная постоянная, $\delta>0$). Доказательство основывается на некоторых свойствах конформных отображений, указанных Грёцшем и Макинтайром. А. В. Батырев

**1276. Об одном методе в теории распределения значений мероморфных функций. Лехто** (A method in the value distribution theory of meromorphic functions. Lehto Olli), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 131—132 (англ.)

Автор подчеркивает важность изучения неванлинновой характеристики $N(r,a)$ не только как функции от $r$, но и как функции от $a$ и указывает на полученные им в этом направлении результаты (РЖМат, 1953, 702; 1954, 2103; 1955, 181, 2175). А. А. Гольдберг

**1277. О второй теореме Неванлинна и обобщениях. Хейман** (On Nevanlinna's second theorem and extensions. Hayman W. K.), Rend. Circolo mat. Palermo, 1954, **2**, № 3, 346—392 (англ.)

Используя методы, развитые им ранее (Acta math., 1951, 86, 89—257), автор получает разнообразные результаты, относящиеся к вопросам распределения значений мероморфных функций гиперболического типа. Часть результатов связана со следующей задачей.

Положим $m(r_n,f(z_n+z))=m(z_n,r_n,f)$ и аналогично определим $N(z_n,r_n,f)$, $T(z_n,r_n,f)$, $S(z_n,r_n,f)$, где $m$, $N$ и $T$—функции Неванлинна (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941). Пусть $f(z)$ мероморфна в $|z|<1$, $|z_n+z|=r_n$ лежит в $|z|<1$ и $T(z_n,r_n,f)\to\infty$. При каких условиях выполняется соотношение

$$S(z_n,r_n,f)/T(z_n,r_n,f)\to 0? \qquad (1)$$

Доказывается ряд достаточных признаков для того, чтобы имело место (1), например, достаточно (теорема VII), чтобы функция $f(z)$ в $|z|<1$ имела конечный порядок, $r_n\to 1$ и $T(z_n,r_n,f)/\ln(1-r_n)\to\infty$. Для того чтобы риманова поверхность, на которую $f(z)$ отображает $|z|<1$, была регулярно исчерпаема в смысле Альфорса (Неванлинна Р., цит. выше), достаточно (теорема VIII), чтобы $r_n\to 1$ и $\sqrt{(1-r_n)^2-|z_n|^2}\times A(z_n,r_n,f)\to\infty$. Некоторые теоремы представляют новые результаты и в случае обычного исчерпания по кругам $|z|\leqslant r$ (т. е. $z_n=0$), например (теорема II): Пусть ограниченная область $D$ содержит круг $|z|<1$ и дуги $z=e^{i\theta}$, $\alpha_\nu<\theta<\beta_\nu$, такие, что $\Sigma(\beta_\nu-\alpha_\nu)=2\pi$, $\Sigma(\beta_\nu-\alpha_\nu)\ln(\beta_\nu-\alpha_\nu)^{-1}<\infty$. Тогда, если $f(z)$ — мероморфная функция конечного порядка в $D$ (т. е. число $a$-точек $f(z)$, удаленных от границы $D$ более чем на $d$, равно $O(d^{-C})$, где $C$ — некоторая постоянная), то $S(r,f)=O[\ln T(r,f)]$. Известно, что производная ограниченной функции может не быть функцией ограниченного вида (Frostman O., Kgl. fysiograf. sällskapets i Lund förhandl., 1942, **12**, № 15, 169—182, а также Littlewood J. E., Lectures on the theory of functions. Oxford, 1944). Показывается, что производная мероморфной функции ограниченного вида, удовлетворяющей условиям теоремы II, также является мероморфной функцией ограниченного вида.

Уточняется и обобщается ряд теорем автора (Acta math., 1951, **86**, 89—257), в том числе доказывается следующая теорема (теорема X), которая была ранее доказана при дополнительных предположениях: Пусть $f(z)$ и $\Phi(z)$ регулярны в $|z|<1$, $f(z)$ и $f(z)-\Phi(z)$ не имеют нулей в $|z|<1$. Тогда, если $\ln M(r,\Phi)=O[(1-r)^{-1}]$, то и $\ln M(r,f)=O[(1-r)^{-1}]$.

Значительное место отводится теоремам о функциях, мероморфных в угле. Например, доказывается (теорема III), что если $f(z)$—мероморфная функция конечного порядка $\rho$, $1/2\leqslant\rho<\infty$, в $|z|<\infty$ и $r_n e^{i\theta_n}$ суть $a$-точки $f(z)$, лежащие в $|\arg z|<\pi/(2\rho)$, то или 1) $f(z)$ имеет ограниченную характеристику и ряд

$$\sum r_n^{-\rho}\cos\rho\theta_n \qquad (2)$$

сходится для каждого $a$ или 2) $f(z)$ имеет неограниченную характеристику и ряд (2) сходится самое большее для двух значений $a$. Эта теорема и все другие теоремы автора о функциях, мероморфных в угле, содержатся в статье Неванлинна (Nevanlinna R., Acta soc. scient. fennicae, 1925, 50, № 12, 1—45) (или являются тривиальными следствиями из нее). У автора отсутствуют ссылки на эту статью. А. А. Гольдберг

**1278. О принципе симметрии Шварца. Ловатер** (On the Schwarz reflection principle. Lohwater A. J.), Michigan Math. J., 1953—1954, 2, № 2, 151—156 (англ.)

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в круге $|z|<1$, имеющая почти всюду на дуге $A: 0\leqslant\theta_1<\theta<\theta_2<2\pi$ окружности $|z|=1$ радиальные граничные значения $f(e^{i\theta})=\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$, по модулю равные 1. Исследуются условия, при выполнении которых $f(z)$ может быть продолжена аналитически через дугу $A$ посредством соотношения $f(1/\bar{z})=1/\overline{f(z)}$. Приводится доказательство основного результата автора в этой проблеме (теорема 2), ранее опубликованного без доказательства (РЖМат, 1954, 2568). По этой теореме функция $f(z)$, удовлетворяющая приведенным выше условиям и имеющая, кроме того, в области $0<1-\varepsilon<|z|<1$ лишь конечное число нулей и полюсов, может быть продолжена по принципу Шварца через дугу $A$ тогда и только тогда, когда $f(z)$ не имеет 0 и $\infty$ асимптотическими значениями ни в одной точке дуги $A$. При доказательстве используется следующее предложение, обобщающее на случай мероморфных функций ограниченного вида результат, полученный Зейделем для ограниченных функций.

Теорема 1. Если функция $f(z)$ ограниченного вида удовлетворяет всем ранее указанным условиям, то множество особенностей $f(z)$ на $A$ (т. е. тех точек $P$, для каждой из которых не существует дуги окружности $|z|=1$, содержащей $P$, через которую $f|z|$ могла бы быть продолжена аналитически) является замыканием на $A$ множества тех точек, где радиальные граничные значения $f(e^{i\theta})$ равны 0 или $\infty$. В качестве приложения теоремы 2 дается обобщение на случай мероморфных функций ограниченного вида результатов, полученных Неванлинна и Зейделем для ограниченных функций.

Теорема 3. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция ограниченного вида в $|z|<1$ с $|f(e^{i\theta})|=1$ почти всюду на дуге $A$ и пусть $P$ — особая точка $f(z)$ на дуге $A$. Тогда всякое значение $\zeta$, $|\zeta|=1$, для которого существует окрестность точки $P$, в которой $f(z)\neq\zeta$, будет асимптотическим значением функции $f(z)$ в некоторой точке дуги $A$, находящейся как угодно близко от $P$.

В заключение рассматриваются некоторые вопросы, связанные с возможностью распространения теоремы 3 на мероморфные в круге $|z|<1$ функции неограниченного вида. В связи с этим приводятся соображения, показывающие, что использованный метод доказательства вообще не применим к функциям неограниченного вида. Г. Ц. Тумаркин

**1279. О поведении на границе мероморфной в единичном круге функции. Коллингвуд** (Sur le comportement à la frontière, d'une fonction méromorphe dans le cercle unité. Collingwood Edward F.), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 14, 1502—1504 (франц.)

Пусть $\lambda_0$ — фиксированная дуга в $|z|<1$, ведущая к $z=1$ и пересекающая каждую окружность $|z|=r<1$ не более одного раза; $\lambda_\theta$ — дуга, полученная из $\lambda_0$ преобразованием $z_1=ze^{i\theta}$; $\Delta$ — угол в $|z|<1$ с вершиной в $e^{i\theta}$, образованный двумя хордами. Пусть функция $f(z)$ мероморфна в $|z|<1$. По определению, $a\in C(f,e^{i\theta})$ ($a\in C_{\lambda_\theta}(f,e^{i\theta})$; $a\in C_\Delta(f,e^{i\theta})$), если существует последовательность $z_n\to e^{i\theta}$, $|z_n|<1$ (и $z_n\in\lambda_\theta$; и $z_n\in\Delta$), такая, что $f(z_n)\to a$. Доказывается, что $C_{\lambda_\theta}(f,e^{i\theta})=C(f,e^{i\theta})$ для всех $\theta$ из некоторого множества второй категории на $0\leqslant\theta<2\pi$. Пусть $K(f)$ и $J(f)$ — множество точек $z=e^{i\theta}$, для которых соответственно $C_{\Delta_1}(f,e^{i\theta})=C_{\Delta_2}(f,e^{i\theta})$ для всех пар $\Delta_1$ и $\Delta_2$ и $C(f,e^{i\theta})=C_\Delta(f,e^{i\theta})$ для всех $\Delta$. Из предыдущего результата выводится, что $J(f)$ и $K(f)$ — множества второй категории на $|z|=1$.

Доказанные теоремы обобщают некоторые результаты автора (РЖМат, 1955, 5738) и Эглстона (Eggleston E. G., должно появиться в Comment. math. helv.). На стр. 1503, строка 8 сверху, вместо $E_{N,M}=\bigcup\mathcal{E}_p$ должно быть $E_{N,M}\subseteq\bigcup\mathcal{E}_p$. А. А. Гольдберг

**1280. О значениях, опускаемых мероморфной функцией. Эрве** (Sur les valeurs omises par une fonction méromorphe. Hervé Michel), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 7, 718—720 (франц.)

Пусть функция $f(z)$ мероморфна в плоской области $D$ с границей $C$. Значение, которого $f(z)$ не принимает в достаточно малой окрестности точки $\zeta_0\in C$, называется исключительным значением $f(z)$ в $\zeta_0$. Пусть $E$ — замкнутое множество емкости нуль, лежащее на $C$. Обозначим через $\Delta(\zeta)$, $\zeta\in C$, множество предельных точек $f(z)$, когда $z\to\zeta$, $z\in D$, и через $\Gamma_E(\zeta_0)$, $\zeta_0\in E$, предельное множество для $\Delta(\zeta)$, когда $\zeta\to\zeta_0$, $\zeta\in C\setminus E$.

Доказывается теорема: Если каждая точка $E$ принадлежит некоторому континууму $K$ такому, что $K\setminus D$ связно, то каждая связная компонента множества $\Delta(\zeta_0)\setminus\Gamma_E(\zeta_0)$, $\zeta_0\in E$, содержит не более двух исключительных значений $f(z)$ в $\zeta_0$.

Эта теорема является обобщением теоремы Носиро (Noshiro K., J. Math. Soc. Japan, 1950, 1, 275—281), где рассматривались односвязные области $D$ (для которых условие теоремы автора выполняется тривиальным образом). А. А. Гольдберг

**1281. О некоторых свойствах функций, непрерывных в замкнутом круге. Геронимус Я. Л.,** Докл. АН СССР, 1954, 98, № 6, 889—891

Устанавливается связь между модулем непрерывности граничных значений аналитической в круге $|z|<1$ функции $f(z)$ и асимптотическим поведением модуля ее производной при $|z|\to 1$. Из доказанных теорем непосредственно следуют ранее установленные предложения, принадлежащие Келлогу (Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, М. — Л., 1952), Харди и Литтльвуду (Hardy G. H., Littlewood J. F., Math. Z., 1932, 34, 403), а также референту (Сообщ. АН ГрузССР, 1947, 10, № 8, 451). М. Б. Гагуа

**1282. Проблема, касающаяся множеств предельных значений аналитических функций. Багемил, Зейдель** (A problem concerning cluster sets of analytic functions. Bagemihl F., Seidel W.), Math. Z., 1955, 62, № 1, 99—110 (англ.)

Пусть $f(z)$ — функция, регулярная в круге $|z|<1$, и пусть ее предельные значения на радиусе $\arg z=\vartheta$ образуют континуум $C(\vartheta)$. Континуумы $C(\vartheta)$ рассматриваются как точки подпространства $\mathfrak{L}$ компактного метрического пространства замкнутых множеств расширенной комплексной плоскости. Пусть $\vartheta\in M$, где $M\subseteq[0\ 2\pi]$. Изучаются множества континуумов $C(\vartheta)$, $\vartheta\in M$, в пространстве $\mathfrak{L}$, соответствующие конкретным классам множеств $M$. Доказывается, что если $M$ —

аналитическое множество, то множество континуумов $C(\vartheta)$, $\vartheta \in M$ есть аналитическое множество пространства $\mathfrak{L}$; оно не обязательно борелевское, даже в случае, когда $M$ — борелевское множество.

Построен пример функции $f(z)$, регулярной в круге $|z|<1$, обладающей следующими свойствами: а) для всякого $\vartheta \in [0, 2\pi]$ континуум $C(\vartheta)$ локально связан; б) каков бы ни был локально связный континуум $L$ расширенной комплексной плоскости, существует множество значений $\vartheta$ мощности континуума, для которых соответствующий континуум $C(\vartheta)$ совпадает с $L$. В примере вместо $[0, 2\pi]$ можно рассматривать частный класс множеств 1-й категории. Существенно используются результаты предыдущей статьи авторов (РЖМат, 1955, 5737), а также результат Л. В. Канторовича (Fundam. math., 1932, 18, 178 — 181).

И. Н. Песин

1283. **Замечания о треугольной функции Шварца. Ленер** (Note on the Schwarz triangle functions. Lehner Joseph), Pacif. J. Math., 1954, 4, № 2, 243—249 (англ.)

В исследованиях по теории гипергеометрических рядов Шварц изучал функцию, отображающую верхнюю полуплоскость на криволинейный треугольник с углами $\delta\pi$, $\varepsilon\pi$, $\eta\pi$ $(\delta+\varepsilon+\eta<1)$. Обратная функция является автоморфной относительно группы, получающейся при замощении плоскости этим треугольником. Для того чтобы это замещение было без перекрытий, т. е. чтобы группа была дискретна, необходимо и достаточно, чтобы числа $\delta^{-1}$, $\varepsilon^{-1}$, $\eta^{-1}$ были целыми положительными или $\infty$. В статье рассматривается частный случай, когда $\delta = q^{-1}$, $\varepsilon = 2^{-1}$, $\eta = 0$. Соответствующая группа $\Gamma(\lambda)$ порождается преобразованиями $S: z \to z+\lambda$, $T: z \to z^{-1}$, $\lambda = 2\cos\pi/q$. Исследуется автоморфная функция $\varphi_\lambda(z)$, имеющая при $z = i\infty$ простой полюс. Рассматривается разложение $\varphi_\lambda(z)$ в ряд Фурье

$$\varphi_\lambda(z) = x^{-1} + \sum_0^\infty c_n(\lambda)\, x^n, \quad x = \exp 2\pi i \lambda^{-1} z.$$

Доказывается: I. Все коэффициенты Фурье $c_n(\lambda)$ любой треугольной функции $\varphi_\lambda(z)$ рациональны. II. Для $c_n(\lambda)$ справедлива асимптотическая формула $c_n(\lambda) \sim (2\lambda)^{-1/2} e^{4\pi\sqrt{n}/\lambda} n^{-3/4}$. Указывается, что эти результаты могут быть обобщены на более широкие классы фуксовых групп.

И. И. Пятецкий-Шапиро

1284. **Замечание о множествах логарифмической емкости нуль. Курамоти, Курода** (A note on the set of logarithmic capacity zero. Kuramochi Zenjiro, Kuroda Tadashi), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 7, 566—569 (англ.)

Пусть $F$ — открытая риманова поверхность и $G$ — область на ней, граница которой состоит из части $C$ — счетного множества аналитических дуг на поверхности $F$, не имеющего предельных точек внутри $F$, и части $\Gamma$, возникающей из идеальной границы $F$. Риманова поверхность $\hat{G}$ получается, если у двух экземпляров $G$ отождествить $C$ (так называемая операция симметризации). Доказывается следующая теорема:

Пусть существует функция $u(p)$ $(\not\equiv \text{const})$, гармоническая в $G$ и удовлетворяющая условиям: 1) $u(p)$ непрерывна в $\overline{G} = G \cup C$ и $u(p) \to +\infty$ при $\overline{G} \ni p \to \Gamma$, 2) для функции $v(p)$, сопряженной с $u(p)$, существует конечная постоянная $M$ такая, что $\theta(r) = \int_{\Gamma_r} dv \leqslant M$, где $\Gamma_r$ — линия уровня $u(p) = r$. Тогда $\hat{G}$ имеет нулевую границу. В частности, если $G = \{|z|<1\}$ (причем $\Gamma$ — некоторое замкнутое множество $E$ на $|z|=1$), то $\hat{G} = \{|z| \leqslant \infty\} \setminus E$ и теорема дает признак того, что $E$ является множеством логарифмической емкости нуль, который в этом частном случае является не только достаточным, но и необходимым. А. А. Гольдберг

1285. **Об одной гипотезе в проблеме типа для односвязных римановых поверхностей. Осс ерман** (On a conjecture in the problem of type for simply-connected Riemann surfaces. Osserman Robert), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 153 (англ.)

Рассматривается проблема типа для римановой поверхности, определенной евклидовой угловой метрикой на поверхности в трехмерном пространстве (Курант Р., Геометрическая теория функций комплексной переменной, Л. — М., 1934, гл. IX, § 7). Указывается, что автором построен пример поверхности $z = f(x, y)$ $(f(x, y)$ — функция, однозначная во всей конечной $(x, y)$-плоскости), конформно эквивалентной единичному кругу. Тем самым показана несправедливость гипотезы, высказанной Л. Берсом в 1951 г.

А. А. Гольдберг

1286. **О влиянии граничных элементов римановых поверхностей на распределение значений. Хукемая** (Über den Einfluss von Randstellen Riemannscher Flächen auf die Wertverteilung. Huckemann Friedrich), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 123—124 (нем.)

Указывается, что для некоторых классов римановых поверхностей (точного описания которых не дается) автор уточнил теорему Данжуа — Карлемана — Альфорса (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941, гл. XI, § 4) в следующем направлении. Каждой критической точке римановой поверхности ставится в соответствие определенное число («степень роста»), которое находится по комплексу отрезков. Порядок роста отображающей мероморфной функции оказывается равным полусумме «степеней роста» всех критических точек. Дефекты этой мероморфной функции также оказываются связанными со «степенями роста» критических точек, что позволяет строить мероморфные функции с произвольным по существу распределением дефектов. Точные формулировки не приводятся.

А. А. Гольдберг

1287. **Принцип максимума для аналитических функций на открытых римановых поверхностях. Кусуноки** (Maximum principle for analytic functions on open Riemann surfaces. Kusunoki Yukio), Mem. College Sci. Univ. Kyoto, 1953, **A28**, № 1, 61—66 (англ.)

Доказывается следующее обобщение принципа максимума модуля для плоских областей. Пусть $F$ — открытая риманова поверхность с границей, состоящей из взаимно изолированных частей $\Gamma_0$ и $\mathfrak{J}$, причем граница $\mathfrak{J}$ имеет гармоническую меру нуль, т. е. существует конечное число замкнутых аналитических дуг $\Gamma'$ на $F$, отделяющих $\Gamma_0$ от $\mathfrak{J}$, таких, что гармоническая мера $\mathfrak{J}$ относительно области, ограниченной $\mathfrak{J}$ и $\Gamma'$, равна 0. Пусть аналитические дуги $\Gamma$ отделяют $\Gamma'$ от $\mathfrak{J}$ и ограничивают вместе с $\Gamma'$ область $G$. Постоянная $\mu_G$ означает гармонический модуль $G$, т. е. для гармонической функции $u$ в $G$ с граничными значениями 0 на $\Gamma$ и $\ln \mu_G$ на $\Gamma'$ $\int_\Gamma (\partial u/\partial n)\, ds = 2\pi$ (Sario L., Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1948, sar. AI, № 50). Пусть $w(P)$, $P \in F$ — однозначная аналитическая функция на $F$ такая, что при $P \to \Gamma_0$ $\overline{\lim}\, |w(P)| \leqslant m$ и $\overline{\lim}_{\Gamma \to \mathfrak{J}} \ln^+ M(\Gamma) / \ln \mu_G = 0$, где $M(\Gamma) = \max_{P \in \Gamma} |w(P)|$. Тогда всюду на $F$ $|w(P)| \leqslant m$.

А. А. Гольдберг

1288. **О слабейшей униформизирующей. Грёйб** (Über die schwächste Uniformisierende. Graeub W.), Math. Z., 1954, **60**, № 1, 66—78 (нем.)

Доказывается, что на произвольной римановой поверхности $R$ всегда можно определить две принадлежащие ей аналитические функции $x = f(z)$, $x' = g(z)$ ($z$ — локальный параметр) такие, что аналитический образ функциональной зависимости между $x$ и $x'$, устанавливаемой при этом посредством $R$, конформно эквивалентен самой поверхности $R$. Это равносильно тому, что $R$ — слабейшая униформизирующая для соответствия $x \leftrightarrow x'$, т. е. что всякая униформизирующая для $x \leftrightarrow x'$ является наложением $R$. Для этого достаточно (и необходимо) $f$ и $g$ построить так, чтобы отображение $R$ в топологическое произведение $(x, x')$, определяемое функциями $x = f(z)$, $x' = g(z)$, с точностью до изолированных точек было всюду взаимно однозначным. Проводимое автором исследование и построение примыкает к книге Неванлинна «Униформизация» (РЖМат, 1954, 2571). Л. И. Волковыский

**1289. Об интегрировании дифференциального уравнения $\Delta u = c(P)\,u$ на открытых римановых поверхностях. Мюрберг** (Über die Integration der Differentialgleichung $\Delta u = c(P)\,u$ auf offenen Riemannschen Flächen. Myrberg Lauri), Math. scand., 1954, **2**, № 1, 142—152 (нем.)

Доказывается теорема: Пусть на произвольной открытой римановой поверхности $F$ с локальными параметрами $z_n = x_n + iy_n$ задана действительная функция $c(P) \geqslant 0$ ($\not\equiv 0$), непрерывная вместе со своими первыми производными и изменяющаяся по формуле $c(z_h) = c(z_k)\,|\operatorname{grad} x_k(x_h, y_h)|^2$ при замене $z_h$ на $z_k$. Тогда на $F$ всегда существует неотрицательное и $\not\equiv 0$ решение уравнения

$$\Delta u = c(R)\,u, \qquad (1)$$

имеющее непрерывные первые и вторые производные.

Сначала для компактной части $A \subset F$ доказываются некоторые леммы о неотрицательных решениях уравнения (1) и о функции Грина, которая строится при помощи универсального наложения $A$, как в гармоническом случае. Аналогично строится решение первой краевой задачи; используя выражение этого решения через функцию Грина, автор устанавливает принцип Гарнака, и решение (1) на $F$ получается из решений $u_n$ уравнения (1) на поверхностях $F_n \nearrow F$, причем $u_n = k_n$ на границе $F_n$ и постоянные $k_n$ выбираются так, что $u_n(P_0) = 1$ ($P_0$ — фиксированная точка).

Л. И. Волковыский

**1290. Геометрический смысл аргумента якобиана псевдоконформного отображения в пространстве $n$ комплексных переменных. Фукс Б. А.,** Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 1, 179—182

Обобщается результат автора о геометрическом смысле якобиана псевдоконформного отображения на случай $n > 2$ комплексных переменных (РЖМат, 1955, 4391).

Основной результат: Пусть дано отображение

$$w_k = w_k(z_1, \ldots, z_n) \quad (k = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где $w_k$ — функции, регулярные в некоторой точке $P$ (точка $P$ может быть помещена в начале координат), и пусть $J$ — якобиан отображения, отличный от нуля в точке $P$. Если все корни уравнения $\operatorname{Det}(a_{kr} - \lambda\bar{a}_{rk}) = 0$ по модулю равны единице, то имеет место соотношение

$$\varphi_1 + \cdots + \varphi_n \equiv \arg J \pmod{\pi}.$$

Здесь $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — стационарные значения угла второго поворота векторов с началом в точке $P$ при отображении (1) $\lambda = e^{2i\varphi'}$, где $\varphi'$ — стационарный угол второстепенного поворота, соответствующий вектору $(z_1, \ldots, z_n)$. А. В. Лебедев

**1291. Об областях нормальности мероморфных функций многих переменных, Заксер** (Sur les domaines de normalité des fonctions méromorphes de plusieurs variables. Saxer Walter), Colloque sur les fonctions de plusieurs variables. Liège, Georges Thone; Paris, Masson et Cie, 1953, 125—134 (франц.)

Обзор известных результатов, относящихся к областям регулярности и мероморфности аналитических функций и к областям нормальности семейств аналитических функций.

Указывается следующее простое следствие основной теоремы Ока, относящейся к областям регулярности аналитических функций: Всякая конечная однолистная область пространства двух комплексных переменных с псевдовыпуклой границей (другими словами, с границей, выпуклой в смысле Леви) является областью нормальности для некоторого семейства регулярных или мероморфных функций. Б. А. Фукс

**1292. Кернфункция и расширенные классы функций в теории функций многих комплексных переменных. Бергман** (Kernel function and extended classes in the theory of functions of complex variables. Bergman S.), Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Liège, Georges Thone; Paris, Masson et C-ie, 1953, 135—157 (англ.)

Обзор результатов, принадлежащих главным образом автору и относящихся к кернфункции области пространства двух комплексных переменных, к связанной с кернфункцией области метрикой, инвариантной при псевдоконформных отображениях, к теории репрезентативных областей; приводится также ряд результатов, относящихся к областям, обладающим исключительной граничной поверхностью, к интегральному представлению функций, регулярных в подобной области, и к некоторым другим вопросам теории функций. Б. А. Фукс

**1293. О мероморфных отображениях комплексных многообразий. Тимм** (Über meromorphe Abbildungen von komplexen Mannigfaltigkeiten. Thimm Walter), Math. Ann., 1954, **128**, № 1, 1—48 (нем.)

Вейерштрасс заметил, что между любыми $n+1$ $2n$-периодическими мероморфными функциями существует алгебраическое соотношение. Эта теорема является специальным случаем следующей общей теоремы: Пусть заданы $n+1$ мероморфных функций на компактном $n$-мерном комплексном аналитическом многообразии. Допустим, что между ними имеется $n$ аналитически независимых. Тогда между ними существует алгебраическое соотношение.

В теории автоморфных функций многих комплексных переменных эта теорема находит многочисленные применения. Она впервые была доказана автором в его диссертации. В реферируемой работе упрощается ее доказательство и одновременно устанавливается несколько более общее предложение: Если функции $f_1, \ldots, f_r$ мероморфны на комплексном компактном многообразии и аналитически зависимы, то они также алгебраически зависимы.

Идея доказательства этих предложений принадлежит Пуанкаре. Существенную роль в доказательстве играет исследование мероморфных отображений в точках неопределенности. И. И. Пятецкий-Шапиро

**1294. Мероморфные отображения римановых областей. Тимм** (Meromorphe Abbildungen von Riemannschen Bereichen. Thimm Walter), Math. Z., 1954, **60**, № 4, 435—457 (нем.)

С помощью методов исследования мероморфных отображений, развитых автором в прежних работах

(РЖМат, 1954, 5552; 1956, 1293), строится теория аналитических множеств на так называемых римановых областях, являющихся разветвляемыми областями. При этом автор исходит из топологического определения римановой области, данного Бенке и Штейном (Behnke H., Stein K., Math. Ann., 1950, **124**, 1—16). Результаты исследований применяются к описанию прообраза мероморфного отображения такой области.

Основной результат: Пусть $\mathfrak{R}$ — компактная риманова область. Если между мероморфными в $\mathfrak{R}$ функциями существует аналитическая зависимость, то эта зависимость алгебраическая. А. В. Лебедев

**1295. Непрерывные модификации комплексных многообразий. К р е й с с и г** (Stetige Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten. K r e y s z i g E r w i n), Math. Ann., 1955, **128**, № 5, 479—492 (нем.)

Пусть $M^n$ и $'M^n$ — комплексные многообразия, $N \subset M^n$ и $'N \subset 'M^n$ — замкнутые множества. Тогда $'M^n$ называется модификацией $M^n$ в $N$, если 1) существует взаимно однозначное аналитическое отображение $T'$ множества $'M^n - 'N$ на $M^n - N$ и 2) для каждой окрестности $U(N)$ и каждой точки $'P \in 'N$ имеется окрестность, пересечение которой с $'M^n - 'N$ отображается в $U(N) - N$ (Behnke H., Stein K., Math. Ann., 1951, **124**, 1—16).

Рассматриваются свойства специальных форм модификаций. Если при некоторой модификации взаимно однозначное аналитическое отображение $T'$ «остаточной области» $'M^n - 'N$ на остаточную область $M^n - N$ можно продолжить соответственно до непрерывного, аналитического, собственного отображения $T$ множества $'M^n$ в $M^n$, то рассматриваемая модификация называется соответственно непрерывной, аналитической, собственной. Отображение $T$ называется собственным, если прообраз всякого компактного множества компактен. Пусть $'M^n$ — непрерывная модификация $M^n$ в $N$. Если $N$ — аналитическое множество, то $'N$ — также аналитическое множество и $'M^n$ — аналитическая модификация $M^n$. Кольцо голоморфных и тело мероморфных функций в $M^n$ и $M^n$ изоморфны. Различные $n$-мерные простые и многократные проективные пространства, получающиеся замыканием $n$-мерного аффинного пространства, переходят одно в другое посредством последовательности аналитических модификаций. Е. Н. Аравийская

**1296. О мероморфных модификациях. I. Общие свойства модификаций. Ш т о л л ь** (Über meromorphe Modifikationen. I. Allgemeine Eigenschaften der Modifikationen. S t o l l W i l h e l m), Math. Z., 1954, **61**, № 2, 206—234 (нем.)

Работа примыкает к исследованиям Хопфа (Hopf H., Univ. Roma. Ist. naz. alta mat. Rend. mat. e appl., 1951, **10**, 169—182), Бенке и Штейна (Behnke H., Stein K., Math. Ann., 1951, **124**, 1—16). В ней дается разъяснение основных понятий и доказываются простейшие свойства модификаций.

Понятие модификации определяется несколько иначе, чем у Бенке и Штейна, а именно: имеет место модификация $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$, если: а) заданы $2n$-мерные комплексные многообразия $G$ и $H$; б) замкнутые подмножества $M$ и $N$ многообразий $G$ и $H$ имеют открытые окрестности, содержащие аналитические множества, охватывающие соответственно $M$ и $N$, размерность которых меньше $2n$; в) отображение $\tau = \tau(P)$ отображает $A = G \setminus M$ псевдоконформно на $B = H \setminus N$. Его обращение $v = \tau^{-1}$.

В основе представления о модификации $\mathfrak{M}$ лежит представление о преобразовании многообразия $G$ в $H$ при замене $M$ через $N$. В силу симметричности этого понятия модификацией будет $\mathfrak{M}^{-1} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} H, B, N, v \\ G, A, M, \tau \end{pmatrix}$, которая называется обратной к $\mathfrak{M}$.

Модификация $\mathfrak{M}$ называется открытой, если вместе с открытым множеством $U \supset M$ открыто $\tau(U \cap A) \cup N$, и взаимно (beiderseits) открытой, если открыты $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^{-1}$. Свойство модификации быть открытой есть некоторое условие непрерывности: если $M$ состоит только из одной точки, то модификация $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда открыта, когда $v$ можно непрерывно продолжить на $N$. Если $G$ и $H$ — компакты, то $\mathfrak{M}$ — взаимно открытая модификация. А. В. Лебедев

**1297. Комплексно-аналитические многообразия и когомологии. К а р т а н** (Variétés analytiques complexes et cohomologie. C a r t a n H e n r i), Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Liège, Georges Thone; Paris, Masson et C-ie, 1953, 41—55 (франц.)

Пусть $X$ — комплексно-аналитическое многообразие, $\mathcal{O}_x$ — кольцо функциональных элементов, голоморфных в точке $x \in X$, $\mathcal{O}$ — связка (в смысле Лере), образованная кольцами $\mathcal{O}_x$, отвечающими всем точкам $X$. Некоторая связка $\mathcal{F}$, определенная над многообразием $X$, называется аналитической, если для каждой точки $x \in X$ элемент этой связки $\mathcal{F}_x$ является модулем относительно кольца $\mathcal{O}_x$, причем соответствующее отображение непрерывно. Аналитическая связка $\mathcal{F}$, определенная над многообразием $X$, называется когерентной, если для каждой точки $x \in X$ можно указать такую ее окрестность $U$, что связка $\mathcal{F}(U)$ будет изоморфна верхнему ядру аналитического гомоморфизма $\mathcal{O}^p(U) \to \mathcal{O}^q(U)$. Здесь $p$, $q$ — некоторые целые числа; $\mathcal{O}^p$, $\mathcal{O}^q$ — прямые суммы соответствующего числа экземпляров связки $\mathcal{O}$; $\mathcal{F}(U)$, $\mathcal{O}^p(U)$, $\mathcal{O}^q(U)$ — части связок $\mathcal{F}$, $\mathcal{O}^p$, $\mathcal{O}^q$, отвечающие точкам $x \in U \subset X$.

Комплексно-аналитическое многообразие Штейна $X$ комплексной размерности $n$ (действительной размерности $2n$) определяется как объединение счетного множества компактов, обладающего следующими свойствами: а) для любых двух различных точек $x \in X$, $y \in X$ существует такая голоморфная на $X$ функция $f$, что $f(x) \neq f(y)$; в) в некоторой окрестности каждой точки $x \in X$ можно ввести координаты с помощью функций $f_1, \ldots, f_n$, голоморфных в $X$. Они берутся равными нулю в точке $x$ и тогда все функции кольца $\mathcal{O}_x$ должны представляться в виде $F(f_1, \ldots, f_n)$, где $F$ — голоморфная функция в точке $(0, \ldots, 0)$; с) если компакт $K \subset X$, то множество $\hat{K}$, состоящее из точек $x \in X$, для которых $|f(x)| \leqslant \sup_{y \in K} |f(y)|$ для любой функции $f$, голоморфной в $X$, — компактно (Множество $\hat{K}$ называется голоморфной оболочкой множества $K$). Условие с) может быть заменено равносильным: с′) для всякой последовательности точек $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$, не имеющих в $X$ предельных точек, можно указать такую функцию $f$, голоморфную в $X$, что последовательность $|f(x_n)|$ не будет ограниченной. Если $X$ — открытое множество наложения, заданное над пространством переменных $z_1, \ldots, z_n$, то условие в) выполняется автоматически. Тогда условия а) и с) означают, что $X$ является областью регулярности. Прямое произведение $X \times Y$ двух многообразий Штейна является многообразием Штейна. Если $X$ — многообразие Штейна и функция $g(x) \not\equiv 0$ на нем голоморфна, то множество $Y$ точек $X$, где $g(x) \neq 0$, является многообразием Штейна.

Пусть $X$ — многообразие Штейна, $\mathcal{F}$ — определенная над ним когерентная аналитическая связка,

$H^q(X, \mathscr{F})$ — группа когомологий размерности $q$. Тогда имеют место теоремы:

A. Для каждой точки $x \in X$ образ группы $H^0(X, \mathscr{F})$ в $\mathscr{F}_x$ порождает $\mathscr{F}_x$ как модуль по отношению к кольцу $\mathscr{O}_x$.

B. Для любого $q > 0$ группа $H^q(X, \mathscr{F})$ сводится к нулю. Как указывается в работе, когомологическая формулировка теоремы B принадлежит Серру. Указываются следствия из этих теорем:

1. Первая проблема Кузена всегда разрешима для многообразия Штейна. Это вытекает из теоремы B и того, что равенство $H^1(X, O) = 0$ является достаточным условием резрешимости первой проблемы Кузена для многообразия $X$.

2. Пусть $V$ — некоторое аналитическое подмногообразие многообразия Штейна $X$, $\mathscr{J}$ — связка идеалов, определяемая вложением $V$ в $X$. Тогда в каждой точке $x \in X$ идеал $\mathscr{J}_x$ состоит из функций, голоморфных на всем многообразии $X$ и равных нулю на $V$. Идеалы $\mathscr{J}_x$ в точках $x \in V$ составляют те функциональные элементы из кольца $\mathscr{O}_x$, которые в окрестности точки $x$ равны нулю на $V$; в точках $x \notin V$ (но $x \in X$) $\mathscr{J}_x = \mathscr{O}_x$.

3. Пусть $X$ — многообразие Штейна, $V$ — аналитическое многообразие, регулярно вложенное в $X$. Тогда все функции, голоморфные на $V$, аналитически продолжаются на $X$.

4. Пусть $r(x)$ — некоторая функция, принимающая во всех точках $x \in A$ (где $A$ — некоторое дискретное множество, лежащие на многообразии Штейна $X$) целые неотрицательные значения. Тогда всегда можно указать такую голоморфную на $X$ функцию, разложение которой в ряд Тейлора в окрестности каждой точки $x \in X$ не содержит членов степени $\leqslant r(x)$. Из этой теоремы следует, что комплексно-аналитическое многообразие, являющееся объединением счетного множества компактов, будет в том и только в том случае многообразием Штейна, если $H^1(X, \mathscr{J}) = 0$ для любой когерентной связки идеалов над $X$.

В начале статьи дается краткая сводка определений и основных свойств связок, в конце указан ряд неразрешенных проблем, относящихся к многообразиям Штейна.

Б. А. Фукс

**1298. Некоторые проблемы в целом, относящиеся к многообразиям Штейна.** Серр (Quelques problèmes grobaux relatifs aux variétés le Stein. Serre Jean-Pierre), Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Liège, Georges Thone; Paris, Masson et Cie, 1953, 57—68 (франц.)

Указывается ряд следствий из теорем A и B Картана (реф. 1297). Форма

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} f_{i_1 \ldots i_p} dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p},$$

где $f_{i_1 \ldots i_p}$ $(i_1, \ldots, i_p = 1, \ldots, n)$ — голоморфные функции на некотором комплексно-аналитическом многообразии $X$ комплексной размерности $n$, $z_1, \ldots, z_n$ — локальные координаты, называется дифференциальной голоморфной формой степени $p$ над многообразием $X$. Рассматриваются группа $C^p(X)$, состоящая из подобных форм $\omega$, для которых $d\omega = 0$ ($d$ — символ внешнего дифференцирования (и группа $B^p(X)$, состоящая из подобных форм $\omega = d\alpha$, где $\alpha$ — дифференциальная голоморфная форма степени $p-1$ над $X$. Очевидно, что $B^p(X) \subset C^p(X)$. Для многообразий Штейна $X$ доказываются:

Теорема. Группа $C^p(X) / B^p(X)$ изоморфна группе когомологий $H^p(X, C)$ с коэффициентами из тела $C$ комплексных чисел.

Следствие. Если внешний дифференциал $d\alpha$ косой дифференциальной формы $\alpha$, определеной над $X$, является голоморфной формой, то существует такая косая дифференциальная форма $\beta$, что форма $\alpha - d\beta$ оказывается голоморфной над $X$.

Следствие. Группы гомологий $H_p(X)$ для $p > n$ сводятся к группам кручений.

Делителем $D$ паракомпактного комплексно-аналитического многообразия $X$ называется линейная, локально-конечная комбинация его комплексно-аналитических подмногообразий комплексной размерности $n-1$ с целыми коэффициентами. Делитель $D$ называется положительным, если все эти коэффициенты положительны. Множество нулей и полюсов некоторой мероморфной на $X$ функции $f$ с учетом их кратности является делителем многообразия $X$ и обозначается символом $(f)$. Для данного делителя $D$ подыскивается такая мероморфная функция $f$, что $(f) = D$ (вторая проблема Кузена). Доказывается

Теорема. Пусть $X$ — комплексно-аналитическое многообразие с $H^1(X, O) = 0$, $D$ — делитель этого многообразия. Для того чтобы на $X$ существовала такая мероморфная функция $f$, что $D = (f)$, необходимо и достаточно, чтобы $h(D) \in H^2(X, \mathbf{Z})$. Здесь $O$ — связка колец голоморфных функций, определенная над $X$; $h(D)$ — когомологический класс, дуальный по отношению к циклам действительной размерности $2n-2$, лежащим на $D$; $\mathbf{Z}$ — постоянная связка целых коэффициентов, $H^1(X, O)$, $H^2(X, \mathbf{Z})$ — соответствующие когомологические группы. Условие теоремы $H^1(X, O) = 0$ выполнено, если $X$ — многообразие Штейна, в частности, если $X$ — конечнолистная область регулярности (этот случай рассматривали Ока (Oka K., J. Sci. Hirosima, 1939, 9, 7—19) и Штейн (Stein R., Math. Ann. 1941, 117, 727—757), а также если $X$ — компактное многообразие Келера с первым числом Бетти, равным нулю. Далее доказывается

Теорема. Пусть $X$ — многообразие Штейна, $a \in H^2(X, \mathbf{Z})$. Тогда всегда существует такой положительный делитель $D$ многообразия $X$, что $h(D) = a$.

Эта теорема была ранее доказана Штейном при частных предположениях относительно $X$ (Stein K., Math. Ann., 1941, 117, 727—757, 1951, 123, 201—222). Из нее вытекает, что на многообразии Штейна всякая мероморфная функция может быть представлена как отношение двух голоморфных функций (этот результат составляет решение проблемы Пуанкаре для многообразий Штейна). Указывается ряд нерешенных проблем, относящихся к многообразиям Штейна.

Б. А. Фукс

**1299. Моногенность и полная дифференцируемость в действительной и комплексной алгебре. I-III.** Ше (Monogeneità e totale derivabilità nelle algebre reali e complesse. I-III. Sce Michele), Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, 16, № 1, 30—35; № 2, 188—193; № 3, 321—325 (итал.)

В 1-й части рассматриваются гиперкомплексные переменные $x = x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n y, = y_1 u_1 + \ldots + y_n u_n$, где $u_1, \ldots u_n$ — базис какой-нибудь алгебры $\mathscr{A}$ с единицей ранга $n$ над полем действительных или комплексных чисел; $y_1, \ldots, y_n$ — действительные или комплексные функции действительных или комплексных переменных $x_1, \ldots, x_n$. С алгеброй $\mathscr{A}$ связаны алгебры $\mathscr{A}'$ и $\mathscr{A}''$, элементы которых — квадратные матрицы $X'$ и $X''$ порядка $n$, определенные для всякого элемента $x$ алгебры $\mathscr{A}$ соотношениями вида: $xu = uX'$, $ux = uX''_{-1}$, где $u$ — матрица-строка: $(u_1, \ldots, u_n)$, $X''_{-1}$ — матрица, транспо-

нированная по отношению к $X''$. Переменная $y$ называется вполне дифференцируемой справа (слева) функцией от $x$, если якобиева матрица

$$dy/dx \equiv \| \partial y_i/\partial x_j \|_{i,j=1}^{n}$$

принадлежит к алгебре $\mathfrak{A}'$ (если $(dy/dx)_{-1}$ принадлежит к $\mathfrak{A}''$). Переменная $y$ называется моногенной справа (слева) функцией от $x$, если

$$u\frac{dy}{dx}u_{-1}=0 \quad \left(u\left(\frac{dy}{dx}\right)_{-1}u_{-1}=0\right).$$

Автор изучает некоторые свойства указанных функций $y(x)$ в связи с переходом от одного базиса данной алгебры $\mathfrak{A}$ к другому и исследует, при каком базисе алгебры $\mathfrak{A}$ всякая вполне дифференцируемая функция $y(x)$ будет моногенной.

Во 2-й части изучаются моногенные в вполне дифференцируемые гиперкомплексные функции для некоторых алгебр частного вида.

В 3-й части делается ряд кратких замечаний о некоторых интегральных свойствах гиперкомплексных функций в евклидовом пространстве $n$ измерений, в частности, о применимости к ним аналога формулы Коши и о нахождении действительных решений некоторых линейных дифференциальных уравнений в частных производных с помощью таких функций. В. С. Федоров

**1300. Канонический вид двух,- трех- и четырехмерных парааналитических функций.** Фреше (La kanonaj formoj de la 2,3,4-dimensiaj paraanalitikaj funkcioj. Fréchet Maurice), Compositio math., 1954, **12**, № 2, 81—96 (эсперанто; резюме франц.)

Рассматривается система гиперкомплексных чисел $x=\sum_1^n x_k e_k$ с главной единицей и коммутативным и ассоциативным законом умножения базисных единиц $e_1, \ldots, e_n$:

$$e_k e_r = \sum_{h=1}^{n} u_{krh} e_h \quad (\mathrm{R}_p)$$

($u_{krh}$ — действительные постоянные, $x_1, \ldots, x_n$ — действительные переменные). Гиперкомплексная функция $F(x)=\sum_1^n F_h(x_1, \ldots, x_n)\, e_h$ ($F_h$ — действительные функции от $x_1, \ldots, x_n$) называется дифференцируемой относительно данного закона умножения $\mathrm{R}_p$ для $x=x^0$, если: 1) $F(x)$ определена однозначно в некоторой окрестности $x^0$; 2) $F(x)$ имеет дифференциал $dF=\sum dF_h e_h$ для $x=x^0$ ($dF_h$ — дифференциал от $F_h$ в смысле Штольца — Юнга для $x=x^0$); 3) существует такое гиперкомплексное число $F_0'$, что для $x=x^0$ и данного закона умножения $\mathrm{R}_p$ имеем:

$$dF = F_0' \cdot dx \quad (dx=\sum_1^n dx_h e_h),$$

причем $F_0'$ не зависит от $dx$. Утверждается (без доказательства), что компоненты $F_h$ функции $F$, дифференцируемой для $x=x^0$, удовлетворяют при $x=x^0$ системе $n(n-1)$ дифференциальных уравнений с частным производными 1-го порядка, которая в случае, когда $e_1$ — главная единица, имеет вид

$$\frac{\partial F_h}{\partial x_r}=\sum_{k=1}^{n} u_{krh}\frac{\partial F_h}{\partial x_1} \quad (r=2, \ldots, n;\ h=1, \ldots, n).$$

А если $F$ дифференцируема во всех точках некоторой окрестности $x^0$ и имеет для $x=x^0$ дифференциал 2-го порядка $d^2F=\sum_1^n d^2F_h e_h$, то каждая компонента $F_h$ удовлетворяет для $x=x^0$ еще следующей системе $n(n-1)/2$ дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_r \partial x_s}=\sum_{k=1}^{n} u_{rsk}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_k} \quad (r, s=2, \ldots, n),$$

когда $e_1$ — главная единица.

Функция $F(x)$ называется парааналитической относительно данного закона умножения $\mathrm{R}_p$ для $x=x^0$, если во всех точках некоторой окрестности $x^0$ эта функция 1) имеет дифференциалы всех порядков: $dF, d^2F, \ldots$ и 2) дифференцируема относительно данного закона умножения $\mathrm{R}_p$. Доказывается, что свойства дифференцируемости и парааналитичности $F(x)$ сохраняются после замены одного базиса рассматриваемой системы гиперкомплексных чисел другим базисом. Выбирая для $n=2$, 3 и 4 канонические базисы всевозможных систем гиперкомплексных чисел (коммутативных, ассоциативных систем с главной единицей над полем действительных чисел), автор дает для каждого из этих базисов общие выражения компонент всех функций, парааналитических относительно закона умножения единиц этого базиса.

Из остальных теорем автора отметим следующую: Пусть базис $e_1, \ldots, e_n$ с законом умножения $\mathrm{R}_p$ разбивается на две такие системы единиц: $e_1, \ldots, e_r$ и $e_{r+1}, \ldots, e_n$, что 1) $e_k e_s = 0$, если $k \leqslant r$, $s > r$, 2) произведение двух единиц каждой системы линейно выражается через единицы этой системы. Тогда для всякой $F(x)$, дифференцируемой относительно $\mathrm{R}_p$ для $x=x^0$, каждая из функций $\sum_1^r F_h e_h$, $\sum_{r+1}^n F_h e_h$ будет также дифференцируемой относительно $\mathrm{R}_p$ для $x=x^0$. Библ. 9 назв. В. С. Федоров

**1301. О некоторых уравнениях с частными производными.** Рошкулец (Asupra unor ecuaţii cu derivate parţiale. Roşculeţ Marcel M.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1954, **6**, № 3, 489—498 (рум.; резюме русс., франц.)

Рассматривается дифференциальный оператор

$$N=\delta_1\delta_2\ldots\delta_n$$

и его итерации: $N^2, N^3, \ldots$, где

$$\delta_i=\frac{\partial}{\partial x_0}+\mu_i\frac{\partial}{\partial x_1}+\mu_i^2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+\mu_i^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}},$$

$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ — действительные переменные; $\mu_i\,(i=1, \ldots, n)$ — корни данного алгебраического уравнения

$$\lambda_0\mu^n+\lambda_1\mu^{n-1}+\ldots+\lambda_{n-1}\mu+\lambda_n=0; \qquad (1)$$

$\lambda_k$ — действительные постоянные ($k=0,1, \ldots, n$), $\lambda_0 \neq 0$, $\mu_i^2, \ldots$ — степени числа $\mu_i$ (не исключается случай кратных корней $\mu_i$).

Пользуясь общим определением моногенности одной гиперкомплексной функции по отношению к другой, данным референтом (Матем. сб., 1946, **18 (60)**, 353—378), автор находит решения $U(x_0, x_i, \ldots, x_{n-1})$ дифференциальных уравнений $NU=0$, $N^2U=0$, $N^3U=0, \ldots$, моногенные по отношению к гиперкомплексным функциям

$$\omega_k=a_k^0x_0+a_k^1x_1+\cdots+a_k^{n-1}x_{n-1} \quad (k=1, \ldots, n),$$

где $a_k^i$ ($i$ — индекс, а не показатель степени) — гиперкомплексные постоянные вида: $a_k^i=a_{k,0}^i+a_{k,1}^i\theta+\cdots$ $\cdots+a_{k,n-1}^i\theta^{n-1}$, $a_{k,h}^i$ ($h=0,1, \ldots, n-1$) — обыкно-

венные комплексные постоянные, $\theta$ — гиперкомплексная единица, подчиненная условию: $\lambda_0\theta^n + \lambda_1\theta^{n-1} + \dots + \lambda_{n-1}\theta + \lambda_n = 0$ (коэффициенты в этом уравнении те же, что и в уравнении (1)).

Доказывается, что подходящим подбором постоянных $a_k^i$ уравнение $NU = 0$ приводится к виду $\partial^n U/\partial\omega_1\partial\omega_2 \dots \partial\omega_n = 0$, откуда

$$U = \sum f_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}(\omega_{\alpha_1} \dots \omega_{\alpha_k}) \cdots \quad (k = n-1). \qquad (2)$$

Здесь каждая функция $f_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}$ моногенна по отношению к $\omega_{\alpha_1}, \dots, \omega_{\alpha_k}$, а каждая комбинация индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ есть комбинация попарно различных $n-1$ целых чисел из множества $\{1, 2, \dots, n\}$, причем в формуле (2) суммирование совершается по всем таким комбинациям этих индексов. Далее находятся решения уравнений $N^2U = 0$, $N^3U = 0$, причем для уравнения $N^2U = 0$ находится решение аналогичное полученному ранее (Almansi E., Ann. mat., 1899, ser. III-a, 2, 1—53). Замечена опечатка: на стр. 489, в уравнении (1,1), вместо символа суммы $\Sigma$, следует поставить символ произведения $\Pi$. В. С. Федоров

**1302.** **О неаналитических функциях нескольких комплексных переменных. Элиану** (Asupra functiilor neanalitice de mai multe variabile complexe. Elianu I. P.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1954, **6**, № 3, 511—521 (рум.; резюме русс., франц.)

Пусть $f$ — комплекснозначная неаналитическая функция от комплексных переменных $z_1, \dots, z_n$, однозначная и непрерывная от совокупности этих переменных в области $\Delta \equiv (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$, где $\Delta_j$ — какая-нибудь область на плоскости переменного $z_j$ $(j = 1, \dots, n)$. Для всякого индекса $j$ при каких-нибудь фиксированных $z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n$ (соответственно в областях $\Delta_1, \dots, \Delta_{j-1}, \Delta_{j+1}, \dots, \Delta_n$) строится функция $\Phi(\delta_j)$ множеств точек области $\Delta_j$ по формуле

$$\Phi(\delta_j) = \frac{1}{2i}\int_{\gamma_j} f(z_1, \dots, z_n)\, dz_j \quad (i = \sqrt{-1}), \qquad (1)$$

где $\delta_j$ — всякая область, образованная конечным или счетным множеством попарно не перекрывающихся квадратов в области $\Delta_j$; $\gamma_j$ — граница области $\delta_j$ и интеграл берется по $\gamma_j$ в положительном направлении относительно $\delta_j$. Функция $f$ предполагается такой, что интеграл в (1) существует и $\Phi(\delta_j)$ как функция множеств $\delta_j$ вполне аддитивна и абсолютна непрерывна.

Исследуются пределы отношения $\Phi(\delta_j)/\operatorname{mes}\delta_j$, когда множества $\delta_j$ сходятся к данной точке $z_j \in \Delta_j$. Симметрическую производную функции $\Phi(\delta_j)$ в точке $z_j \in \Delta_j$ автор обозначает $Df/D\omega_f$ и называет частной секториальной производной функции $f$ по отношению к $z_j$ в данной точке $z_j$. (Следовало бы сказать: в данной точке области $\Delta$, учитывая фиксированные значения переменных $z_k$ при $k \neq j$. *Реф.*). Для функции $f(z_1, \dots, z_n)$ выводятся различные обобщения формул Помпею — Теодореску (о секториальной производной неаналитической функции одного комплексного переменного), Тоноло (о секториальных производных неаналитической функции двух комплексных переменных) и Пуанкаре (для аналитических функций нескольких комплексных переменных). Например, доказывается формула

$$\frac{1}{(2i)^n}\iint_{C_n} dz_n \cdots \iint_{C_1} f dz_1 = \iint_{D_n} \frac{D}{D\omega_n} \cdots \iint_{D_1} \frac{Df}{D\omega_1}\, d\omega_1 \cdots d\omega_n, \qquad (2)$$

где $C_j$ — простая замкнутая спрямляемая кривая, ограничивающая конечную область $D_j \subset \Delta_j$ $(j = 1, \dots, n)$. Интегралы по $C_j$ берутся в положительном направлении, причем интегралы

$$\iint_{C_1} f dz_1, \dots, \iint_{C_n} \dots \iint_{C_2}\iint_{C_1} f dz_1 \dots dz_n$$

предполагаются абсолютно непрерывными функциями областей $D_1, \dots, D_n$, а интегралы в правой части (2) понимаются в смысле Лебега. В. С. Федоров

**1303.** **Об одной задаче Н. Н. Лузина. Мышкис А. Д., Гильт. В.,** Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 1, 143—145

Пусть в области $D$ комплексной плоскости $P$ задана непрерывная однозначная функция $f(z)$. При фиксированном $z \in D$ через $M_\varepsilon$ обозначается множество значений отношения $[f(z+\Delta z) - f(z)]/\Delta z$, где $z + \Delta z \in D$, $0 < |\Delta z| < \varepsilon$. Тогда множество $\mathfrak{M}_z = \bigcap_{\varepsilon>0} P[M_\varepsilon]$ ($P[M_\varepsilon]$ — замыкание множества $M_\varepsilon$ в плоскости $P$) называется множеством моногенности функции $f(z)$ в точке $z$. Доказывается, что для того, чтобы множество $\mathfrak{M} \subset P$ могло служить множеством моногенности некоторой непрерывной функции $f(z)$ $(z \in D)$ в некоторой фиксированной точке $z$, необходимо и достаточно, чтобы замыкание множества $\mathfrak{M}$ в расширенной комплексной плоскости $\tilde{P}$ было связным.

Таким образом, решается поставленный Н. Н. Лузиным вопрос о природе множества моногенности в отдельной точке. Уточняя задачу Н. Н. Лузина, авторы ставят вопросы о том, каким может быть множество $\mathfrak{M}_z$ почти для всех $z \in D$ или для всех $z \in D$ кроме, быть может, счетного множества точек; насколько знание свойств $\mathfrak{M}_z$ для различных $z \in D$ характеризует функцию $f(z)$. А. Д. Тайманов

**1304.** **Теоремы типа теоремы Гросса о звездообразных областях и их приложения. Оцука** (Gross's star theorems and their applications. Ohtsuka Makoto), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 151—152 (англ.)

Указывается на обобщения теоремы Гросса (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941, п. 240), именно: вместо конформного отображения плоской области на риманову поверхность рассматриваются некоторые классы непрерывных отображений, более общие, чем «классические квазиконформные отображения». Эти обобщения использованы при изучении соответствия границ при отображении области на некоторой римановой поверхности на другую риманову поверхность. В отчетливой форме сформулирован лишь следующий результат:

Построен пример такой односвязной области со спрямляемой границей, что при отображении ее на $|z|<1$ некоторое множество с положительной емкостью на границе области переходит в множество нулевой емкости на $|z| = 1$. А. А. Гольдберг

**1305.** **О распределении массы, порожденном функцией класса *P. L.* Исикава** (On the mass distribution generated by a function of *P. L.* class. Ishikawa Osamu), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 7, 532—537 (англ.)

Пусть $G$ — двумерная область, $c(M, r) \subset G$ — замкнутый круг с центром в точке $M$ радиуса $r$ и $\gamma(M, r)$ —

ограничивающая его окружность. Для всякой функции $f$, определенной в $G$, полагается:

$$L(f, M, r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma(M,r)} f(N)\, ds,\ A(f, M, r) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{c(M,r)} f(N)\, dv.$$

Если $f$ — субгармоническая функция, то через $\mu_f$ обозначается вполне аддитивная неотрицательная функция, определенная на $B$-множествах и порожденная $f$, такая, что

$$f(M) = h(M) - \iint \rho^{-1}(M, N)\, d\mu_f(N),$$

где $h(M)$ — гармоническая функция, а $\rho(M, N)$ — расстояние между точками $M$ и $N$ (возможность такого разложения доказана Риссом (Riesz F., Acta math., 1930, 54, 321—360), а единственность Саксом (Матем. сб., 1941, 9 (51), № 2, 451—456). Через $D_\mu(M)$ обозначается симметричная производная функции $\mu$ в точке $M$. Доказываются теоремы:

1. Пусть $p(M)$, $q(M)$ и $p(M)q(M)$ — субгармонические функции в области $G$. Тогда для почти всех $M \in G$ при $r \to 0$

$$P = \lim 4r^{-2}[L(p, M, r)\, L(q, M, r) - A(pq, M, r)] = \frac{1}{2}[pD\mu_q(M) + qD\mu_p(M)] - (p'_x q'_x + p'_y q'_y)_M.$$

2. Пусть $p(M)$ и $q(M)$ — положительные функции, а $\ln p(M)$ и $\ln q(M)$ — субгармонические функции в $G$ (это и означает, что функции $p$ и $q$ принадлежат классу $PL$). Тогда для почти всех $M \in G$

$$P = \frac{1}{2} pq\,[D\mu_{\ln p}(M) + D\mu_{\ln q}(M)] + \frac{1}{pq}[(q\,p'_x - pq'_x)^2 + (qp'_y - pq'_y)^2].$$

Б. Д. Кудрявцев

**1306. О характеристических свойствах гармонических функций. Исикава** (On the characterization of the harmonic functions. Ishikawa Osamu), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 8, 686—690 (англ.)

Доказывается теорема: Функция $u(x, y)$ класса $C^1$ в области $R$ будет гармонической в $R$, если существует гармоническая функция $v(x, y) \not\equiv 0$ в $R$ такая, что для любого замкнутого круга $C(x, y; r) \subset R$ справедливо соотношение

$$2\int_0^{2\pi}\int_0^r (u'_x v'_x + u'_y v'_y)\,\rho d\rho d\theta - \int_0^{2\pi} (vu'_n + uv'_n) r d\theta = o(r^2) \quad (1),$$

где $U_n$ и $V_n$ производные по нормали

Доказательство проводится методами Бекенбаха (Beckenbach E. F., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, 765—769). Вместо условия $v(x, y) \not\equiv 0$ в $R$ можно потребовать, чтобы $u = 0$ там, где $v = 0$, и $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial^2 u/\partial y^2$ были суммируемы в $R$. Формулируется также аналогичная теорема, в которой вместо соотношения (1) фигурирует соотношение

$$\lambda u^{\lambda-1}(x, y) \int_0^{2\pi}\int_0^r (u'^2_x + u'^2_y)\,\rho d\rho d\theta - \int_0^{2\pi} u^\lambda u'_n r d\theta = o(r^2),$$

где $\lambda \geqslant 1$ и $u(x, y) > 0$ (при $\lambda = 1$ см. у Бекенбаха).

Доказывается теорема, обобщающая теорему Леви — Тонелли (Levi E. L., Atti Reale Acad. Lincei, 1909, 18, 10—15; Tonelli L., там же, 577—582): Функция $u(x, y)$ класса $C^1$ в области $R$ будет гармонической в $R$, если для любого замкнутого круга $C(x, y; r) \subset R$ справедливы соотношения:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)\, d\theta - \frac{1}{\pi r^2}\int_0^{2\pi}\int_0^r u(x + \rho\cos\theta, y + \rho\sin\theta)\,\rho\, d\rho d\theta = o(r^2); \quad (2)$$

$$\int_0^{2\pi} \max_{0\leqslant\rho\leqslant r} [\{u_x(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta) - u_x(x + \rho\cos\theta, y + \rho\sin\theta)\}\cos\theta + \{u_y(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta) - u_y(x + \rho\cos\theta, y + \rho\sin\theta)\}\sin\theta]\, d\theta = 0(r).$$

В заключение высказывается преположение, что функция $u(x, y)$ класса $C$ будет гармонической, если справедливо соотношение (2) для любого $C(x, y; r)$.

Е. Д. Соломенцев

**1307. Об аппроксимации в среднем гармоническими многочленами. Шагинян А. Л.,** *Հայկական ՍՍՌ գիտությունների ակադեմիայի զեկուցումներ* (Докл. АН СССР), Арм 1954, **19**, № 4, 97—103 (резюме арм.)

Пусть $\Omega$ — область, границей которой является окружность $C_1: |z - 1| = 1$, и $C_0$ — замкнутая жорданова кривая внутри $C_1$, касающаяся $C_1$ в точке $z = 0$. Обозначим через $T(\rho)$ линейную меру дуг, отсекаемых областью $\Omega$ на $|z| = \rho$.

1. Если $T(\rho) = e^{-\theta(\rho)}$, где $\theta(\rho)$ удовлетворяет условиям: 1) $\theta(rt) > \delta \log t^{-1}\theta(r)$ при $t < 1$ и $\delta > 0$; 2) $\theta(rt) > q\theta(r)$ при $t \leqslant 1$ и $q > 1$; 3) $\int_0^\alpha \theta(t)\, dt = +\infty$, то любая ограниченная и гармоническая в $\Omega$ функция $u(x, y)$ аппроксимируема в среднем степени $p > 0$ в $\Omega$ гармоническими полиномами $H_n(x, y)$, т. е.

$$\inf_{\{H_n\}} \iint_\Omega |u(x, y) - H_n(x, y)|^p d\sigma = 0. \quad (1)$$

2. Если $r\theta'(r)/\theta(r)$ монотонно стремится к $-\infty$ при $r \to 0$ и $\int_0^\alpha \theta(t)\, dt = +\infty$, то снова имеет место (1).

Далее доказывается следующая теорема: Если $\int_0^\alpha \theta(t)\, dt < +\infty$, то из

$$\lim_{n\to+\infty} \iint_\Omega |u(x, y) - H_n(x, y)|^p d\sigma = 0$$

следует нормальность полиномов $\{H_n(x, y)\}$ внутри окружности $C_1$, а также регулярность $u(x, y)$ в этой области.

А. П. Тамадян

**1308. Меры Радона, связанные с плюрисубгармонической функцией. Приложение к нахождению целых функций от $n$ комплексных переменных с заданными нулями. Лелон** (Mesures de Radon associées à une fonction plurisousharmonique. Application au calcul des fonctions entières de $n$ variables complexes ayant des zéros donnés. Lelong Pierre), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 133—135 (франц.)

Сообщается о работах автора (см., в частности, РЖМат, 1954, 3684; 1955, 1735), относящихся к задаче построения целой функции от $n$ переменных по ее «нулевому многообразию» (так называемая проблема Кузена).

З. Я. Шапиро

---

**См. также:** 978, 980, 1042, 1186, 1230, 1244, 1319, 1372, 1377, 1378, 1402, 1438, 1466, 1484, 1502, 1688 Д

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

## ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**1309. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами посредством операционного исчисления. Мор** (Integration von gewöhnlichen Differentialgleichngen mit konstanten Koeffizienten mittels Operatoren rechnung. Mohr Ernst), Math. Nachr., 1953, **10**, № 1—2, 1—49 (нем.)

При помощи преобразования Лапласа рассматривается решение задачи Коши для системы уравнений

$$\alpha_n y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_1 y'(t) + \alpha_0 y(t) = f(t) \quad (t \geqslant 0), \qquad (1)$$

где $\alpha_j$ — матрицы, $y(t)$, $f(t)$ — векторы. После перехода к изображениям получается система

$$\alpha^{(0)}(s) Y(s) = F(s) + \alpha^{(1)}(s) y(0) + \alpha^{(2)}(s) y'(0) + \cdots + \alpha^{(n)}(s) y^{n-1}(0), \qquad (2)$$

где $\alpha^j(s) = \sum_{k=j}^{n} \alpha_k s^{k-j}$, а $Y(s)$ и $F(s)$ — преобразования Лапласа от $y(t)$ и $f(t)$ соответственно. Если $\alpha_n$ невырождена, то $\det \alpha^{(0)}(s) \not\equiv 0$. Поэтому из (2) можно найти $Y(s)$ и затем восстановить решение $y(t)$. Автор рассматривает решение уравнения (1) в двух случаях: 1) $\det \alpha_n = 0$, $\det \alpha^{(0)}(s) \not\equiv 0$, 2) $\det \alpha^{(0)}(s) \equiv 0$. В случае 1) оказывается необходимым исследовать поведение $Y(s)$ на $\infty$. При дополнительных ограничениях на коэффициенты уравнения даются формулы для решения $y(t)$ в этом случае. В случае (2) дается критерий разрешимости задачи и указывается путь нахождения решения.

Ю. М. Березанский

**1310. Об одном методе интегрирования дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. Конюхов М. В.,** Тр. Казанск. хим. технол. ин-та, 1954, № 18, 264—268

Рассматривается линейное однородное уравнение второго порядка, находится его частное решение в виде ряда, а затем решается элементарная задача об интегрировании в квадратурах этого уравнения, когда известно частное решение. Автору, повидимому, неизвестно, что указанное им частное решение находится более простым путем, например, в книге Крылова А. Н. «Лекции о приближенных вычислениях» (М.—Л., Гостехиздат, 1950, 260—264). Новых результатов нет.

М. И. Серов

**1311. О решении линейного однородного дифференциального уравнения $n$-го порядка с постоянными действительными коэффициентами. Волков И. Ф.,** Уч. зап. Кишиневск. гос. пед. ин-та, 1955, **3**, 17—21

Методическая заметка, показывающая возможность получения общего решения указанного в заглавии уравнения, без использования теории функций комплексной переменной.

Б. П. Демидович

**1312. О некоторых свойствах обыкновенных дифференциальных уравнений. Финкельштейн Г. М.,** Уч. зап. Тульск. гос. пед. ин-та, 1954, вып. 5, 157—176

Излагается теория расширений для обыкновенных дифференциальных операторов. Новых результатов нет.

Л. А. Чудов

**1313. Структура рекуррентных уравнений. II. Маркс** (On the structure of recurrence relations. II. Marx Imanuel), Michigan Math. J., 1953—1954, **2**, № 2, 99—103 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1955, 4402. Доказывается теорема: Пусть дана бесконечная последовательность дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz}\left[P(z)\frac{dy}{dz}\right] + Q_n(z)\,y = 0 \quad (n = 0, \pm 1, 2, \pm 2, \ldots) \qquad (1)$$

и пусть $y_n = y_n^{(1)}$ и $y_n = y_n^{(2)}$ — две последовательности линейно-независимых решений (1). Тогда существуют последовательности функций $A_n(z)$, $B_n(z)$, $C_n(z)$ и постоянных $d_n$ такие, что обе последовательности $y_n^{(1)}$ и $y_n^{(2)}$ удовлетворяют рекуррентным уравнениям

$$y_{n-1} = PA_n\frac{dy_n}{dz} + B_n y_n; \quad d_n y_n = PA_n\frac{dy_{n-1}}{dz} + C_n y_{n-1},$$

где

$$A_n = h_n(y_n^{(1)} y_{n-1}^{(2)} - y_{n-1}^{(1)} y_n^{(2)});$$

$$B_n = h_n P(y_{n-1}^{(1)} dy_n^{(2)}/dz - y_{n-1}^{(2)} dy_n^{(1)}/dz);$$

$$C_n = -h_n P(y_n^{(1)} dy_{n-1}^{(2)}/dz - y_n^{(2)} dy_{n-1}^{(1)}/dz);$$

$d_n = -h_n/h_{n-1}$, $w_n$—вронскиан: $w_n = y_n^{(1)} dy_n^{(2)}/dz - y_n^{(2)} dy_n^{(1)}/dz = 1/h_n P(z)$, где $h_n$ — постоянные.

Ю. Л. Рабинович

**1314. Об уравнениях движения неголономных систем с линейными связями. Зуннунов Н. З.,** Тр. ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1954, вып. 13, 121—128

Обычным образом выводятся уравнения движения неголономной системы с линейными связями в формах, близких к уравнениям Лагранжа и Гамильтона, в предположении, что функции $L$ и $H$ выражены через независимые обобщенные скорости соответственно импульсы и декартовы координаты системы. При рассмотрении задачи С. А. Чаплыгина о плоском неголономном движении допущена неточность, так как дуга $s$ не является обобщенной координатой и не может быть выражена через декартовы координаты $x_1, x_2, \ldots, x_{3n}$ равенствами типа (3), которые принимались автором при выводе уравнений движения.

Ю. И. Неймарк

**1315. Условия, выражающие возможность приведения системы линейных дифференциальных уравнений к каноническому виду. Оливери** (Condizione caratteristica perchè un sistema di equazioni differenziali lineari sia canonico. Oliveri E.), Matematiche, 1954, **9**, № 2, 148—153 (итал.)

Рассматривается система $2n$ линейных дифференциальных уравнений относительно $2n$ неизвестных функций с переменными, вообще говоря, коэффициентами, записанная в форме:

$$\begin{aligned} \dot{p}_h &= \sum_{k=1}^{n}(a_{2h-1,\,2k-1}q_k + a_{2h-1,\,2k}p_k), \\ \dot{q}_h &= \sum_{k=1}^{n}(a_{2h,\,2k-1}q_k + a_{2h,\,2k}p_k), \quad h = 1, \ldots, n. \end{aligned} \qquad (1)$$

Показывается, каким условиям должны удовлетворять коэффициенты системы (1), чтобы она могла быть приведена к каноническому виду уравнений Гамильтона; находится функция Гамильтона с точностью до некоторой аддитивной функции времени.

В. В. Добронравов

**1316. Преобразование обобщенно-гамильтоновых уравнений. Русак Б. И.,** Докл. АН УзССР, 1955, № 3, 3—7 (резюме узб.)

Доказывается, что ранее рассмотренные преобразования, оставляющие инвариантными обобщенно-гамильтоновы уравнения (РЖМат, 1955, 725), образуют группу. Приводится пример. И. С. Аржаных

**1317. Об одной ошибке в теории интегрирования уравнений движения голономных и неголономных систем. Аржаных И. С.,** Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1954, вып. 13, 163—167

Путем анализа доказательств и приведения противоречащих примеров показывается, что теорема М. Ф. Шульгина, опубликованная в работе «Об интеграции динамических уравнений С. А. Чаплыгина» (Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1949, вып. 5, 119—128), ошибочна. Ю. И. Неймарк

**1318. Некоторые общие проблемы качественной и аналитической теории линейных систем дифференциальных уравнений. Еругин Н. П.,** Прикл. матем. и механика, 1955, **19**, № 2, 211—221

Обзор некоторых проблем теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматривается система $n$ линейных дифференциальных уравнений в матричной форме

$$dX/dz = XP(z),$$

где $P(z)$ представима в окрестности точки $z=a$ рядом Лорана $P(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k (z-a)^k$, $P_k$ — постоянные матрицы $n$-го порядка. Ставится задача о выделении многозначной особенности интегральной матрицы. Приведены результаты Лаппо-Данилевского (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1934, **1**), Н. П. Еругина (Матем. сб., 1935, **42**, № 6; 1938, 3, № 3), Л. И. Донской (Вестн. Ленингр. ун-та, сер. матем., физ. и хим., 1952, № 6), полученные при различных частных предположениях относительно $P(z)$. Указанную задачу автор называет проблемой Пуанкаре—Лаппо-Данилевского. Затем для системы

$$dX/dt = XP(t), \quad P(t+2\pi)=P(t)$$

ставится задача эффективного представления ее решения в виде $X(t)=e^{At}Z(t)$, где $Z(t)$ — периодическая матрица. Эта задача рассматривалась автором (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1946, **13**). Устанавливается связь между задачами качественной теории линейных систем с периодическими коэффициентами и проблемой Пуанкаре — Лаппо-Данилевского. В качестве примера рассматривается уравнение Матье

$$d^2y/dt^2 + (a - 2q\cos 2t)\,y = 0,$$

а также некоторые результаты Б. П. Демидовича (Уч. зап. Моск. ун-та, 1952, 6, № 163).

И. З. Штокало

**1319. О некоторых случаях использования числа** $\sup |a_n|^{1/n}$. **Коутский** (Nekterá užité čísla $\sup |a_n|^{1/n}$. Koutsky Zdeněk), Časop. pěstov. mat., 1954, **79**, № 3, 273—277 (чеш.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$d\eta/d\zeta = f(\eta, \zeta) \qquad (1)$$

с начальными данными $\zeta=0$, $\eta=0$, $f(\eta, \zeta)$ в окрестности точки $(0, 0)$ определена как аналитическая функция комплексных переменных, вследствие чего имеется разложение $f(\eta, \zeta)=\sum_{i,\,k\geqslant 0} a_{ik}\eta^i\zeta^k$, сходящееся в некоторой окрестности точки $(0, 0)$. При помощи неравенства $|a_{ik}|^{1/(i+k+1)} \leqslant g$, где $g$ — положительная постоянная, доказывается, что существует единственная аналитическая комплексная функция $\eta$ от комплексного переменного $\zeta$, удовлетворяющая уравнению (1) и начальным данным. Найдена оценка радиуса сходимости ряда, которым представимо решение $\eta$. К. Я. Латышева

**1320. О существовании и единственности периодического решения уравнения** $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$. **Кастро** (Sull'esistenza ed unicità delle soluzioni periodiche dell'equazione. $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$. Castro Antonio de), Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, № 4, 359—372 (итал.)

Рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0, \qquad (1)$$

где $f(x, v)$ и $g(x)$ непрерывны и удовлетворяют условиям Липшица в каждой ограниченной области $\{x, v\}$; $g(x)$ возрастает; $xg(x)>0$ при $x\neq 0$; $\int_0^{\pm\infty} g(\xi)\,d\xi = \pm\infty$; $f(0, 0)<0$; $f(x, v)$ не убывает при возрастании $|x|$ и $|v|$; существуют положительные постоянные $a$, $N$, $\alpha$, такие, что $f(x, v)>0$ при $|x|>a$ и при $|v(\xi)|>N$, $|x|>a$

$$\int_{-x}^{x} f(\xi, v(\xi))\,d\xi \geqslant \alpha.$$

Доказывается существование периодического решения (условия, наложенные на $f$ и $g$, незначительно отличаются от условий, указанных А. В. Драгилевым (Прикл. матем. и механика, 1952, 16, № 1, 86)). Доказательство единственности периодического решения лишь намечено. Замеченные опечатки: стр. 370, строка 1, должно быть $\ddot{x} + \omega f(x)\dot{x} + \omega^2 x = 0$, стр. 372, строка 18, должно быть $k>1$. Н. Н. Красовский

**1321. Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка. Рейссиг** (Über eine nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung. Reissig Rolf), Math. Nachr., 1955, **13**, № 5, 313—318 (нем.)

Дается небольшое обобщение результатов Левинсона (Levinson N., J. Math. and Phys., 1943, **22**, № 4, 181—187) для уравнения

$$\dddot{x} + f(x)\ddot{x} + \dot{x} = e(t), \qquad (1)$$

где $f(x)$ кусочно-непрерывна, $f(x)>0$ (может быть, кроме отдельных точек), $e(t)$ непрерывна и имеет период $L$. Доказывается, что уравнение (1) имеет единственное периодическое решение, а все другие решения стремятся к нему при $t\to+\infty$, если выполнено хотя бы одно из условий: 1) если (1) имеет хоть одно решение, для которого $|x(t)|<K$, $|\dot{x}(t)|<K$ при $t\geqslant 0$; 2) если $\int_m^{+\infty} f(x)\,dx$ $\left(\text{или } \int_{-\infty}^{m} f(x)dx\right)$ больше, чем $3\max_t \left|\int_0^t (e(\xi)-m)\,d\xi\right|$, где $m=L^{-1}\int_0^L e(\xi)\,d\xi$.

А. Ф. Филиппов

**1322. О простых субгармонических решениях нелинейных систем с двумя степенями свободы. Манарези** (Sulle soluzioni sottoarmoniche semplici, nei sistemi non-lineari a due gradi di libertà. Manaresi Gabriella), Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, № 4, 412—417 (итал.)

Рассматривается система

$$L_1\ddot{x}_1 + M\ddot{x}_2 - \varphi(\dot{x}_1) + \frac{x_1}{C_1} = \frac{E}{\omega}\sin(\omega t + \gamma),$$

$$M\ddot{x}_1 + L_2\ddot{x}_2 + \frac{x_2}{C_2} = 0, \qquad (1)$$

где $L_1$, $L_2$, $M$, $C_1$, $C_2$, $\omega$, $\gamma$ — постоянные, а $\varphi(\dot{x}_1)$ — полином $n$-й степени, содержащий только нечетные степени $\dot{x}_1$. Коэффициенты этого полинома и частота $\omega$ подбираются таким образом, чтобы существовало частное решение: $x_1 = A\cos\omega t/n$, $x_2 = B\cos\omega t/n$. Этим показывается возможность простых субгармонических колебаний порядка $1/n$ у систем вида (1).

Рассматривается вопрос об устойчивости такого решения. И. Г. Малкин

**1323. Об одном дифференциальном уравнении механики нитей.** Стоппелли (Su un'equazione differenziale della meccanica dei fili. Stoppelli Francesco), Rend. Accad. sci. fis. e mat. Napoli, 1952, **19**, 109—114 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Пусть $p(t) > 0$, $q(t)$, $f(t)$ — непрерывные периодические функции периода $T$. Доказывается, что дифференциальное уравнение

$$y'' + y' \mid y' \mid + q(t)\, y' + y - p^2(t)\, y^3 = f(t) \qquad (1)$$

допускает по крайней мере одно периодическое решение периода $T$. Для доказательства (1) преобразуется в нелинейное интегральное уравнение, у которого ядром является функция Грина для оператора $y'' + y$ с условием периодичности в качестве граничного условия. Применением теоремы о неподвижной точке в пространстве Банаха показано, что интегральное уравнение имеет решение. Автор утверждает, что этот же метод применим к более общему дифференциальному уравнению

$$y'' + q_0(t)\, y' \mid y' \mid + q(t)\, y' + p_0(t)\, y - p^2(t)\, y^3 = f(t)$$

при условии, что функция $\mid q_0(t) \mid$ всюду положительна.

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 7, 624. W. Wasow

**1324. Общее свойство траекторий системы дифференциальных уравнений, эквивалентной уравнению нелинейных колебаний Льенара.** Барбэлат (O proprietate clobală a traiectoriilor unui sistem de ecuaţii diferenţiale echivalent cu ecuaţia oscilaţiilor neliniare a lui ziénard. Barbălat I.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne, Sec. mat. şi fiz., 1954, **6**, № 4, 853—860 (рум.; резюме русс., франц.)

Некоторое обобщение теорем Лефшетца (Lefchetz S., Contributions to the theory of non-linear oscillations. Princeton Univ. Press, New York, 1952, Vol. 2, 67—73), посвященных рассмотрению уравнения Льенара.

Доказывается теорема: Пусть

$$\dot{x} = y - F(x), \qquad \dot{y} = -x \qquad (1)$$

есть система дифференциальных уравнений, эквивалентная уравнению Льенара $\ddot{x} + f(x)\,\dot{x} + x = 0$, $F(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi$. Если: 1) $f(x)$ непрерывна при $-\infty < x < +\infty$; 2) существует $a > 0$ такое, что $F(x) \leqslant 0$ при $0 \leqslant x \leqslant a$, $F(x) \geqslant 0$, при $-a \leqslant x \leqslant 0$, $F(a) = F(-a) = 0$, $f(x) > 0$ при $\mid x \mid \geqslant a$ и существуют точки, сколь угодно близкие к 0, для которых $F(x) \neq 0$; 3) существует $b > a$ такое, что $F(x)/x > 1$ при $\mid x \mid > b$; 4) функция $F(x)/x$ возрастает при $x \geqslant 0$ и убывает при $x \leqslant 0$,— то система (1) допускает лишь один устойчивый предельный цикл и любая траектория (за исключением вырожденной траектории, соответствующей началу координат) стремится к нему.

Ю. А. Митропольский

**1325. Квазиоднородные дифференциальные уравнения второго порядка, содержащие малый параметр. Волосов В. М.,** Матем. сб., 1955, **36**, № 3, 501—554

Рассматриваются уравнения вида

$$\mu\,[\alpha y'' + \beta y' + \gamma] + Q(y,\ x) = 0, \qquad (1)$$

где $\mu > 0$ — малый параметр, $Q(y, x)$ удовлетворяет основному условию: $Q(y, x) \gtrless 0$ при $y \gtrless f(x)$, $y = f(x)$ — корень уравнения $Q(x, y) = 0$, $\alpha(y', y', y, x) > \text{const} > 0$ и $\beta(y'', y', y, x)$ ограничены, $\gamma(y'', y', y, x)$ ограничена при фиксированном $y$; $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют некоторым условиям при $\mid y'' \mid$, $\mid y' \mid \to \infty$, из которых наиболее существенными являются определенная быстрота предельного перехода в $\alpha$ при $\mid y'' \mid$, $\mid y' \mid \to \infty$ и независимость предельного поведения $\alpha$ от знака $y'$; справедливы неравенства $m$, $\mid y - f(x) \mid \leqslant \leqslant \mid Q(y, x) \mid \leqslant M \mid y - f(x) \mid$, ($m$, $M = \text{const}$). Решение (1) представляется в виде

$$y(x,\ \mu) = f(x) + u(x,\ \mu).$$

Функция $u(x, \mu)$ устойчиво колеблется около оси абсцисс с частотой порядка $1/\sqrt{\mu}$. Для $u(x, \mu)$ выведены уравнения опорных кривых, т. е. двух кривых, к которым при $\mu \to 0$ приближаются максимумы и минимумы $u(x, \mu)$. Выведена формула для вычисления предельных (при $\mu \to 0$) значений интегралов вида $\int_a^b \psi(y'', y', y, x)\, dx$, где $y$ — решение уравнения (1). А. Б. Васильева

**1326. Исследование нелинейной системы дифференциальных уравнений при помощи электрической схемы. Николау** (Studierea pe cale electronica a unui sistem diferenţial neliniar. Nicolau Edmond), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1954, **6**, № 4, 945—953 (рум.; резюме русс., франц.)

Предлагается способ экспериментального исследования нелинейной системы $dx/dt = y$, $dy/dt = -k^2 x + \mu f(x, y, \mu)$ при помощи некоторой электрической схемы. Указывается, что небольшое изменение схемы позволяет исследовать нелинейные системы уравнений более общего вида. В. И. Зубов

**1327. О дисперсиях решений уравнения $y^{(4)} + Q(x)y = 0$. Швец** (Sur les dispersions des intégrales le l'équation $y^{(4)} + Q(x)y = 0$. Švec Marko), Чехосл. матем. ж., 1955, **5**, № 1, 29—60 (франц.; резюме русс.)

Рассматривается уравнение

$$y^{(4)} + Q(x)\, y = 0, \qquad (1)$$

где $Q(x) \neq 0$ определена и непрерывна при $-\infty < x < \infty$, причем все нетривиальные решения (1) колеблются. Ссылаясь на результат своей предыдущей работы (РЖМат, 1956, 407), автор утверждает, что у решения (1) две из величин $y$, $y'$, $y''$, $y'''$ могут обращаться в нуль одновременно только в одной точке. Доказывается, что множество $M_{ik}$ решений (1), для которых при $x = x_1$ $y^{(i)} = y^{(k)} = 0$, $i < k$ ($i = 0, 1, 2, 3$), совпадает с множеством решений уравнения

$$A_{ik}\, y'' - A'_{ik}\, y' + 1/2\,[A''_{ik} - (-1)^k C_{ik}]\, y = 0,$$

где $C_{ik}$ — определитель Вронского фундаментальной системы решений (1) при $x = x_1$, если $i + k = 3$, и $C_{ik} = 0$, если $i + k \neq 3$; $A_{ik}$ — функция, которая определяется по $Q(x)$ с точностью до постоянного множителя; $A_{ik}$ непрерывны на $(-\infty, +\infty)$ и могут иметь не более одного корня (при $x = x_1$). Доказывается теорема о разделении корней решений (1), принадлежащих $M_{ik}$, и указывается на возможность распространить теорию дисперсий О. Борувка (РЖМат, 1956, 406) на множество решений (1) из $M_{ik}$. М. И. Ельшин

**1328. О минимальном числе нулей решений уравнения $y^{(n)} + A(x)y = 0$. Бернацкий** (Sur le nombre minimum des zéros des intégrales de l'équation $y^{(n)} + A(x)y = 0$. Biernacki Mieczysław), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1953, **A7**, № 2, 15—18 (журнал вышел из печати в 1954 г.) (франц.; резюме русс., польск.)

Рассматривается уравнение указанного вида, где $A(x) > 0$ — непрерывная функция $(-\infty < x < +\infty)$.

Оценивается снизу число действительных нулей всех решений этого уравнения. При четном $n$ у уравнения есть решение, имеющее не меньше, чем $n$ действительных нулей, при нечетном $n$ есть решение, имеющее не меньше чем $n-1$ таких нулей. Для $n=2$ и $n=3$ приведены примеры, когда числа $n$ и $n-1$ не могут быть заменены большими. Н. В. Попова

**1329. Приведение к простейшему виду задачи Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка. Фаге М. К.,** Докл. АН СССР, 1954, **99**, № 6, 909—912

Обратный оператор $A$ задачи Коши для уравнения $y''+q(x)y=f(x)$ с условиями $y(0)=y'(0)=0$ является интегральным и вольтерровским. В простейшем случае, когда $q(x)\equiv 0$, имеется следующее представление соответствующего обратного оператора $A_0$ и его итераций через семейство «оперативного сдвига» $P_u$:

$$A_0^n=\int_0^\infty [(2n-1)!]^{-1}u^{2n-1}P_u\,du \qquad (1)$$

(Оператор $P_u$ определяется для всех $u\geqslant 0$ условиями: если $\varphi(x)=P_u\psi(x)$, то $\varphi(x)=0$ при $x<u$ и $\varphi(x)=\psi(x-u)$ при $x\geqslant u$). В общем случае существует однопараметрическое семейство «собственных сдвигов» $Q_u$, по которому $A^n$ разлагается аналогично (1). При этом $Q_uQ_v=Q_{u+v}$ и $Q_u=P_u+K_u$, где $K_u$ — вольтерровский оператор, определяемый путем решения некоторой проблемы моментов. Знание $K_u$ позволяет построить вольтерровское преобразование линеала дважды непрерывно дифференцируемых функций, при котором уравнение $y''+q(x)y=f(x)$ переходит в простейшее ($q(x)\equiv 0$). Л. А. Чудов

**1330. Приближенное решение одной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка. Владимиров В. С.,** Прикл. матем. и механика, 1955, **19**, № 3, 315—324

Дан численный метод решения краевой задачи

$$y''-p(x)y=-f(x), \qquad (1)$$

$$y'(0)-H_1y(0)=0,\quad y'(1)+H_2y(1)=0,$$

где $p(x)$, $f(x)$ суммируемы, $H_1\geqslant 0$, $H_2\leqslant+\infty$. Уравнение (1) эквивалентно системе

$$q'+g(x)q=f(x),$$

$$y'-g(x)y=-q(x), \qquad (2)$$

где $g(x)$ — решение уравнения Риккати $g'+g^2=p(x)$. Вместо уравнения (1) решается точно уравнение

$$Y''-p_{h_1,\ldots,h_n}(x)Y=-f_{h_1,\ldots,h_n}(x)$$

при тех же граничных условиях, где

$$p_{h_1,\ldots,h_n}(x)=-h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}p(x)\,dx,$$

$$f_{h_1,\ldots,h_n}(x)=h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\,dx$$

$$(x_{i-1}<x<x_i),\ h_i=x_i-x_{i-1},$$

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=1.$$

При помощи интегрального представления решений $q(x)$ и $y(x)$ системы (2) доказывается равномерная сходимость $Y(x)$ и $Y'(x)$ соответственно к $y(x)$ и $y'(x)$ при $\max h_i\to 0$ и сходимость в среднем $Y''(x)$ к $y''(x)$. Доказана устойчивость решения по отношению к случайным ошибкам. Приведены два примера.

К. В. Задирака

**1331. О конечных возмущениях одномерных дифференциальных операторов второго порядка. Марченко В. А.,** Уч. зап. Харьковск. ун-та, 40, Зап. матем. отд. физ.-матем. фак. и Харьковск матем. о-ва, 1952, **23**, 73—77

Устанавливается, что для числа $n(x)$ собственных значений, по модулю меньших $x$, дифференциального оператора вида

$$L(u)=d^2u/dx^2-q(x)u,$$

заданного на полуинтервале $[0,\ a)$, $a\leqslant\infty$, не изменяющихся при замене $q(x)$ на $q(x)+\hat q(x)$, где $\hat q(x)\not\equiv 0$ и $\hat q(x)=0$ при $x>b<a$, и замене краевого условия $u'(0)-hu(0)=0$ на $u'(0)-\hat hu(0)=0$, имеет место неравенство

$$\overline{\lim}_{x\to\infty}n(x)/\sqrt{x}\leqslant 2b/\pi.$$

Ю. И. Неймарк

**1332. Конечные преобразования Штурма — Лиувилля. Эрнген** (The finite Sturm — Liouville transform. Eringen A. Cemal), Quart. J. Math., 1954, **5**, № 18, 120—129 (англ.)

Рассмотрено применение метода разложения по собственным функциям уравнения Штурма — Лиувилля

$$Lf\equiv-[f'(x)]'+q(x)f(x)=\lambda f$$

к решению уравнений в частных производных. Сделано следующее замечание. Для того чтобы решить уравнение $Lf=g$ на отрезке $[a,\ b]$ с заданными (раздельными) граничными условиями, достаточно разложить $f$ по полной системе собственных функций $\psi(x,\ \lambda_n)$, следует лишь позаботиться о том, чтобы граничные члены $B_f(\lambda_n)$ в интеграле

$$\int Lf\cdot\psi(x,\ \lambda_n)\,dx=B_f(\lambda_n)+\lambda_n\int f\psi(x,\ \lambda_n)\,dx$$

содержали только известные граничные значения $f$. Если известны два независимых решения $\varphi_0(x,\ \lambda)$ и $\chi_0(x,\ \lambda)$, то легко подобрать их линейную комбинацию, удовлетворяющую этим условиям. Конечным преобразованием Штурма — Лиувилля $S(f)$ функции $f$ автор называет коэффициент Фурье

$$\bar f(\lambda_n)=S(f)=\int_a^b f(y)\psi(y,\ \lambda_n)\,dy,$$

где $\psi(y,\ \lambda_n)$ — полная ортонормированная система собственных функций, удовлетворяющих условиям $\sin\alpha\,\psi(a,\ \lambda)+\cos\alpha\,\psi'_x(a,\ \lambda)=0$, $\sin\beta\,\psi(b,\ \lambda)+\cos\beta\,\psi'_x(b,\ \lambda)=0$. Далее

$$S(Lf)=-[f_x\psi-\psi_xf]_a^b+\lambda_n\int_a^b f(x)\psi(x,\ \lambda_n)\,dx=$$
$$=B_f(\lambda_n)+\lambda_nf(\lambda_n).$$

Пусть, например, нужно решить уравнение

$$u_{xx}+[\lambda-p(x,\ t)]u+r(t)u_t=0 \qquad (1)$$

при условиях $u(a,\ t)=m(t)$; $u'_x(b,\ t)=n(t)$. Выберем для $\psi$ краевые условия $\psi(a)=0$; $\psi'(b)=0$. Тогда (1) заменяется на уравнение

$$r(t)\frac{d\bar u(\lambda_n,\ t)}{dt}+(\lambda-\lambda_n)\bar u(\lambda_n,\ t)=$$
$$=-u_x(b,\ t)\psi(b,\ \lambda_n)+u(a,\ t)\psi_x(a,\ \lambda_n).$$

Это уже обыкновенное дифференциальное уравнение; функции в правой части известны. Легко видеть, что $u(x, t) = \sum \bar{u}(\lambda_n, t)\psi(\lambda_n x)$ удовлетворяет уравнению и краевым условиям. В конце статьи разобрана «задача о вулкане», т. е. задача Дирихле для уравнения Лапласа в области, ограниченной двумя концентрическими сферами и двумя коаксиальными конусами с вершиной в центре сфер. Для решения используется разложение по собственным функциям уравнения полиномов Лежандра $[(1-y^2)v_y]_y + \nu(\nu+1)v = 0$.

Э. Э. Шноль

**1333. Поведение собственных функций и спектр операторов Штурма—Лиувилля. Шноль Э.,** Успехи матем. наук, 1954, 9, № 4, 113—132

В § 1 рассмотрено понятие устойчивой гипермаксимальности. Оператор $Ly = -y'' + qy$ с условием $\alpha y(0) + \beta y'(0) = 0$ называется устойчиво гипермаксимальным, если при всех $q_1 \geqslant q$ операторы $L_1 y = -y'' + q_1 y$ с тем же условием при $x = 0$ гипермаксимальны. Доказывается, что для монотонной $q(x)$, стремящейся к $-\infty$, известное достаточное условие гипермаксимальности: $\int_0^\infty |q(x)|^{-1/2} dx = +\infty$, является также и необходимым.

В § 2 доказывается основная теорема: Для того, чтобы $\lambda$ была предельной точкой спектра гипермаксимального оператора $L$, необходимо и достаточно существование собственной последовательности, уходящей в бесконечность, т. е. последовательности функций $\{\varphi_n(x)\}$, равных нулю при $0 \leqslant x \leqslant n$ и таких, что $\|\varphi_n\| = 1$, $\|L\varphi_n - \lambda\varphi_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. В качестве простых следствий этой теоремы получен ряд известных фактов, в том числе общее условие существования чисто дискретного спектра. Здесь досадная неточность: вместо условия $(L\varphi_n, L\varphi_n) \to \infty$, написано $(L\varphi_n, \varphi_n) \to \infty$. Для $q(x)$, ограниченного снизу, эти условия эквивалентны, однако пример § 4 показывает, что существуют операторы с чисто дискретным спектром, для которых условие $(L\varphi_n, \varphi_n) \to \infty$ не выполнено.

В § 3 изучается спектр при $q(x) > c$. Устанавливаются: 1) критерий чисто дискретного спектра, 2) условие, при котором все положительные $\lambda$ принадлежат спектру (очевидное из физических соображений), 3) теорема о густоте предельного спектра: расстояние от любой точки $\lambda$ до предельного спектра (если он существует) порядка $\sqrt{\lambda}$, 4) уточнение предыдущей теоремы для ограниченного $q(x)$ — интервалы смежности к предельному спектру стремятся к 0 как $\lambda^{-1/2}$ при $\lambda \to \infty$.

В § 4 подчеркивается, что при $q(x) \to -\infty$ имеет значение не только порядок роста $|q(x)|$, но и гладкость $q(x)$. При недостаточной гладкости (как показано на примере) математические понятия спектра и дискретного спектра перестают соответствовать своему физическому содержанию. В § 5 кратко изложены результаты автора о связи между поведением собственных функций и спектром. Имеется ряд неточностей и опечаток: так, в теореме 1 (§ 4) $O(r^2)$ следует заменить на $o(r^2)$.

А. М. Молчанов

**1334. Об особых точках дифференциальных уравнений, допускающих интегральный инвариант. Ура, Хирасава** (Sur les points singuliers des équations différentielles admettant un invariant intégral. Ura Taro, Hirasawa Yoshikazu), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 8, 726—730 (франц.)

Рассматривается система

$$dx/dt = X(x, y), \quad dy/dt = Y(x, y), \qquad (1)$$

где $X(x, y)$, $Y(x, y)$ — непрерывные функции в некоторой окрестности $A$ изолированной особой точки $P_0(x_0, y_0)$ $(X(P_0) = Y(P_0) = 0)$. Доказывается, что если в $A$ обеспечено условие единственности решений системы (1) и существует положительный интегральный инвариант, то $P_0$ является либо центром в смысле Пуанкаре (т. е. в некоторой окрестности $P_0$ все траектории системы (1) — замкнутые кривые, окружающие $P_0$), либо седлом общего типа (т. е. существует лишь конечное число траекторий системы (1), входящих в $P_0$ при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$). В частности отмечается, что при этих условиях центр в смысле Бендиксона (т. е. точка, в каждой окрестности которой существует бесконечное множество замкнутых траекторий, ее окружающих), является центром в смысле Пуанкаре. Аналогичные результаты были получены ранее одним из авторов для системы дифференциальных уравнений, заданной на торе (Ura T., Ann. scient. École norm. supér., 1952, ser. 3, **69**, 259—275).

Б. П. Демидович

**1335. Об одном способе получения условий существования периодических решений нелинейных систем. Шиманов С. Н.,** Прикл. матем. и механика, 1955, **19**, № 2, 225—228

Рассматривается система уравнений

$$dz_s/dt = \sum_{i=1}^{n} a_{si} z_s + Z_s(t, z, \mu) \quad (s = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где $a_{si}$ — постоянные; $Z_s(t, z, \mu)$ — функции, непрерывные и периодические по $t$, с периодом $2\pi$, аналитические относительно переменных $z = (z_1, \ldots, z_n)$ и параметра $\mu$ в некоторой окрестности точки $z = 0$, $\mu = 0$; причем $Z_s(t, 0, 0) \equiv Z'_{sz_i}(t, 0, 0) \equiv 0$. Даются необходимые и достаточные условия существования периодического решения системы (1), обращающегося в тривиальное $z = 0$ при $\mu = 0$, в критическом случае, когда характеристическое уравнение $\det(a_{si} - \delta_{si}\lambda) = 0$ имеет среди своих корней чисто мнимые. При формулировке используется факт существования аналитического относительно параметра $\mu$ периодического решения некоторой вспомогательной системы, которое отыскивается обычным методом. К системе вида (1) сводится задача о разыскании при малых $|\mu|$ периодических решений системы

$$dx_s/dt = X_s(t, x, \mu) \qquad (s = 1, \ldots, n), \qquad (2)$$

где $X_s$ — непрерывные периодические относительно $t$ функции, периода $2\pi$, аналитические по $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mu$ в некоторой области, если при $\mu = 0$ система (2) имеет порождающее периодическое решение $x_s^{(0)} = \varphi_s(t)$ периода $2\pi$, являющееся предельным при $\mu \to 0$ для искомого периодического решения.

Б. П. Демидович

**1336. Об обращении теоремы К. П. Персидского о равномерной устойчивости. Красовский Н. Н.,** Прикл. матем. и механика, 1955, **19**, № 3, 273—278

Для системы дифференциальных уравнений

$$dx_i/dt = X_i(x_1, \ldots, x_n t), \quad X_i(0, \ldots, 0, t) \equiv 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где $|x_i| \leqslant H$, $t \geqslant 0$, $|\partial X_i/\partial x_j| < L$, $|\partial X_i/\partial t| < L$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ доказана теорема: Если решение $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = O$ уравнений (1) равномерно устойчиво по $t_0$, то в области $|x_i| < H$, $t > 0$ существует непрерывно дифференцируемая определенно-положительная функция Ляпунова $v(x_1, x_2, \ldots, x_n t)$, допускающая бесконечно малый высший предел и та-

кая, что ее производная в силу системы $dv/dt$ является знакоотрицательной функцией. В. И. Зубов

**1337. Методы решения вопросов устойчивости в большом. Еругин Н. П.,** Тр. 2-го Всес. совещ. по теории автомат. регулирования. Т. I. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1955, 131—141

Обзор последних исследований по теории устойчивости в большом. Дается классификация основных проблем по этой теме. Обращается большое внимание на связь между критериями устойчивости в большом и продолжаемостью решений на всю ось времени. В конце статьи автор привлекает внимание к важной проблеме получения оценок быстроты затухания решений, асимптотически приближающихся к положению равновесия. Библ. 27 назв. В. В. Немыцкий

**1338. Анализ систем, включающих в себя дифференциально-разностные уравнения. Берфорд** (Analysis of systems involving difference-differential equations. Burford T. M.), J. Appl. Phys., 1954, **25** № 9, 1145—1148 (англ.)

Для исследования устойчивости системы с характеристическим уравнением

$$A(s) + Ke^{-\tau s}B(s) = 0$$

предлагается по существу графический способ отыскания его корней, основанный на построении отображения плоскости комплексного переменного $s$, даваемого функцией $-A(s)/B(s)$. Заметим, что для исследования устойчивости было бы достаточно построение отображения одной мнимой оси (этого достаточно для построения $D$-разбиений по параметру $K$ или параметрам $K$ и $\tau$). Ю. И. Неймарк

**1339. Замечания к статье об устойчивости на конечном интервале времени. Каменков Г. В., Лебедев А. А.,** Прикл. матем. и механика, 1954, **18**, № 4, 512

См. РЖМех, 1955, 2843.

**1340 К. Численное решение дифференциальных уравнений. Милн В. Э.** Пер. с англ., М., Изд-во ин. лит., 1955, 291 стр. с черт., 12 р. 65 к.

См. РЖМат, 1955, 5336 К.

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

**1341. Обобщение метода Римана для дифференциальных уравнений с частными производными. Диас, Мартин** (A generalization of Riemann's method for partial differential equations. Diaz J. B., Martin M. H.), Ann. mat. pura ed appl., 1954, **36**, 335—359 (англ.)

Дифференциальные операторы

$$L(u) \equiv a^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a^i\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

и

$$M(u) \equiv b^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b^i\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

(суммирование по повторяющимся индексам) авторы называют сопряженными, если существуют такие формы $\lambda(u) = \lambda^i \partial u/\partial x_i$, $\mu(u) = \mu^i \partial u/\partial x_i$, $A^k(u, v) = \alpha^{kij}\,\partial u/\partial x_i\,\partial v/\partial x_j$, что для произвольных достаточно гладких функций $u$, $v$

$$\lambda(v)L(u) + \mu(u)M(v) = \partial A^k(u, v)/\partial x^k. \qquad (1)$$

В случае двух аргументов исследуется построение $M(u)$ по заданному $L(u)$; например, если $L$ — оператор эллиптического типа (все рассматриваемые функции действительны), $M$ выражается через некоторое частное решение уравнения $L(\varphi) = 0$. Из (1) при помощи подходящего решения $v$ уравнения $M(v) = 0$ известным образом получается выражение для решения задачи Коши для гиперболического уравнения $L(u) = 0$; определение решения задачи Дирихле по решению сопряженного уравнения сводится к решению уравнения первого порядка. Приведены примеры. Я. Б. Лопатинский

**1342. О задаче Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Виграненко Т. И.,** Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 2, 147—152

Решение задачи Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения

$$X(u) = \lambda\int_D K(M, N)\,Y(u)\,dY, \qquad (1)$$

$$X(u) = \sum_{i=1}^{n} X_i(M)\frac{\partial u}{\partial x_i};$$

$$Y(u) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(N)\frac{\partial u}{\partial y_i} + Y_{n+1}(N)\,u(N),$$

с начальными условиями: $u = \varphi(t_1, \ldots, t_{n-1})$; $x_k = \varphi_k(t_1, \ldots, t_{n-1})$ сводится к решению интегрального уравнения

$$v(M) = \Phi(M) + \lambda\int_D Q(M, N)\,v(N)\,dN. \qquad (2)$$

Предполагается, что решения системы $dx_k/ds = X_k(M)$ $(k = 1, \ldots, n)$ однозначно покрывают ограниченную область $D$, $\partial X_k/\partial x_i$ непрерывны, $Y_k$ интегрируемы, ядра $K$ и $\partial K/\partial x_i$ ограничены при $M$, $N \in D$.

Если $\lambda$ не является собственным значением для уравнения (2), то существует единственное решение задачи Коши для уравнения (1) (в классе функций, непрерывных вместе с частными производными первого порядка по $x_k$). Если $\lambda$ — собственное значение для уравнения (2), то задача Коши для уравнения (1) будет разрешима или нет, в зависимости от того, разрешимо или нет уравнение (2).

Имеются опечатки: в (2) следует читать $(k = 1, \ldots, n)$, в (6) $k = 1, \ldots, n-1$). Ю. К. Ландо

**1343. О линейном дифференциальном уравнении первого порядка в частных производных. Касуга.** (On the linear partial differential equation of the first order. Kasuga Takashi), Osaka Math. J., 1953, **5**, № 2, 211—225 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\partial z/\partial x + f(x, y, z)\,\partial z/\partial y = g(x, y, z) \qquad (1)$$

в области $D$, где $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ — непрерывные функции, имеющие непрерывные производные $f_y$, $f_z$, $g_y$, $g_z$. Пусть $G$ — проекция $D$ на плоскость $(x, y)$, $S$ — поверхность $z = z(x, y)$.

Теорема 1. Если $S \subset D$ и непрерывная функция $Z(x, y)$ почти всюду в $G$ удовлетворяет уравнению (1) и имеет частные производные всюду, кроме, быть может, счетного множества точек, то каждая характеристика уравнения (1), максимально продолженная в $D$ и имеющая общую точку с $S$, целиком принадлежит $S$.

Теорема 2. Если выполнены предположения теоремы 1 и всюду в $G$ существует $\partial z/\partial y$, то $z(x, y)$ дифференцируема всюду в $G$. Дан пример, показывающий,

что условие существования всюду $\partial z/\partial y$ в теореме 2 не может быть снято. А. М. Ильин

**1344. Задача Коши для линейных гиперболических уравнений второго порядка. Дуглис** (The problem of Cauchy for linear, hyperbolic equations of second order. Douglis Avron), Communs Pure and Appl. Math., 1954, 7, № 2, 271—295 (англ.)

Методом, аналогичным методам С. Л. Соболева (Матем сб., 1936, **43**, № 1, 39—71) и Матиссона (Mathisson M., Math. Ann., 1932, **107**, 400—419), на работы которых автор ссылается, решается задача Коши для линейного гиперболического уравнения с нечетным числом пространственных переменных. При помощи соотношений, выполняющихся на характеристическом конноиде гиперболического уравнения, для искомого решения задачи Коши строится интегральное уравнение типа Вольтерра. В. М. Бабич

**1345. Характеристики нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Плись А.,** Бюлл. Польской АН, Отд. 3, 1954, 2, № 9, 421—425

**Характеристики нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Плись** (Characteristics of non-linear partial differential equations. Pliś A.), Bull. Acad. polon. sci., Cl. III, 1954, 2, № 9, 419—422 (англ.)

Пусть $z(x, y)$ — функция класса $C^1$ в окрестности точки $(0, 0)$, удовлетворяющая уравнению $z_x = f(x, y, z, z_y)$, где $f(x, y, z, q)$ — класса $C^1$ вблизи точки $(0,0, z(0,0), z_y(0,0))$. Система уравнений характеристик

$$\eta' = -f_q(x, \eta, \zeta, \gamma),\ \zeta' = f - \gamma f_q,\ \gamma' = f_y + \gamma f_z$$

при начальном условии $\eta(0) = 0, \zeta(0) = z(0, 0), \gamma(0) = z_y(0, 0)$ имеет в окрестности значения $x = 0$ решения, удовлетворяющие тождествам

$$\zeta(x) = z(x, \eta(x)),\ \gamma(x) = z_y(x, \eta(x)).$$

Указывается, что доказательство Хаара (Haar A., Acta Lit. Sci. Univ. Szeged, 1928, **4**, 103) не вполне корректно; в работе Важевского (Ważewski T., Math. Z., 1938, **43**, 522—532) предполагалось, что производные функций $z$ и $f$ удовлетворяют условию Липшица. Доказательство автора основано на аппроксимации системы уравнений характеристик с последующим применением известного критерия компактности семейства непрерывных функций. Формулируются теоремы, переносящие полученные результаты на уравнение $z_x = f(x, y_1, \ldots, y_n, z, z_{y_1}, \ldots, z_{y_n})$. Имеются опечатки. А. Д. Мышкис

**1346. Замечание к теории характеристик. Гейрингер** (Bemerkung zur Theorie der Charakteristiken. Geiringer Hilda), Österr. Ingr-Arch., 1954, 8, № 2—3, 107—109 (нем.).

Для квазилинейной гиперболической системы двух уравнений в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными выводятся уравнение для характеристических направлений и условия на характеристиках. Новых результатов нет. М. Ш. Бирман

**1347. Разрешимость общих линейных уравнений с частными производными посредством степенных рядов. Хорних** (Risolubilità di generali equazioni lineari a derivate parziali mediante serie di potenze. Hornich Hans), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **15**, № 1—2, 7—10 (итал.)

Рассматривается уравнение вида

$$Lu \equiv \sum_{i_1, \ldots, i_n} g_{i_1, \ldots, i_n} \partial^{i_1 + \ldots + i_n} u / \partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n} = f \quad (1)$$

(только конечное число $g_{i_1, \ldots, i_n} = g_{i_1, \ldots, i_n}(x)$ отлично от нуля, причем

$$g_{i_1, \ldots, i_n} = \sum_{h_1 \geqslant i_1, \ldots, h_n \geqslant i_n} g^{h_1, \ldots, h_n}_{i_1, \ldots, i_n} x_1^{h_1}, \ldots, x_n^{h_n}, \quad (2)$$

$\sum_{i_1, \ldots, i_n} g^{i_1, \ldots, i_n}_{i_1, \ldots, i_n} \binom{j_1}{i_1} i_1! \ldots \binom{j_n}{i_n} i_n! \neq 0$ для всех целых $j_1, \ldots, j_n$, в частности может быть

$$g_{i_1, \ldots, i_n} = g^{i_1, \ldots, i_n}_{i_1, \ldots, i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}. \quad (3)$$

Доказывается, что в случае (2) всякое ненулевое решение уравнения $Lu = 0$, разлагающееся в ряд Лорана в окрестности начала, содержит бесконечное множество слагаемых с отрицательными показателями $x_1, \ldots, x_n$; в случае (3), если $f = f(x)$ — регулярная функция в окрестности начала, то всякое решение (1), разлагающееся в ряд Лорана, регулярно. Я. Б. Лопатинский

**1348. Задача о линейных дифференциальных операторах. Хорних** (Das Problem der linearen Differentialoperatoren. Hornich Hans), Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1954, **23**, № 2, 333—339 (нем.)

Определение: индекс $(i_1, \ldots, i_n)$ следует за индексом $(j_1, \ldots, j_n)$, если $0 \leqslant j_1 \leqslant i_1, \ldots, 0 \leqslant j_n \leqslant i_n$. Рассматривается оператор

$$Lu \equiv \sum_M g_{i_1 \ldots i_n} \partial^i u / \partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n} \quad (i = i_1 + \ldots + i_n),$$

где сумма распространена на конечное множество $M$ индексов, содержащее вместе с каждым индексом все ему предшествующие. Коэффициенты $g$ предполагаются непрерывными в некоторой окрестности точки $P = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, а от решения $u$ требуется наличие непрерывных производных вида $\partial^i u / dx_1^{i_1} \ldots dx_n^{i_n}$ $((i_1, \ldots, i_n) \in M)$. Ставится вопрос о том, существует ли такая фиксированная окрестность точки $P$, в которой уравнение $Lu = f$ имеет при любой непрерывной функции $f$ по крайней мере одно решение. Доказано, что такой окрестности нет, если $g_{i_1 \ldots i_n}(P) = 0$ для всех индексов $(i_1, \ldots, i_n) \in M$, кроме, быть может, тех, для которых все непосредственно следующие также принадлежат $M$ (функция $f$, при которой уравнение $Lu = f$ не имеет решений, выражается через коэффициенты $g$, но не зависит от выбора окрестности). С другой стороны, доказано, что если в $M$ имеется последний индекс $(r_1, \ldots, r_n)$, причем $g_{r_1 \ldots r_n}(P) \neq 0$, то такая окрестность имеется; здесь решение строится при помощи метода последовательных приближений.

Требования к степени гладкости решений сформулированы не вполне точно. На стр. 339, 8-я строка сверху, опечатка: должно быть $k$ вместо $n$. А. Д. Мышкис

**1349. Последний множитель союзных уравнений со множителями связи. Спехальский В. Е.,** Тр. Киргизск. с.-х. ин-та, 1955, № 8, 291—293

Рассматривается каноническая система уравнений движения голономной системы при наличии конечных связей, которые учитываются при помощи множителей:

$$\dot q_i = \partial H / \partial p_i,\ \dot p_i = -\partial H / \partial q_i + \sum_{k=1}^m \lambda_k \partial f_k / \partial q_i,$$

$f_k(t, q_1, \ldots, q_n) = 0,\ i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m$. Утверждается, что множитель Якоби этой системы имеет

вид определителя

$$M = |(f_r, f_s)|_1^n,$$

где $(f_r, f_s) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial f_r}{\partial q_i} \frac{\partial f_s}{\partial q_j}$, что является обобщением результата Г. К. Суслова (Суслов, Теоретическая механика, М.—Л, 1944, 436—440). Указана лишь идея доказательства (та же, что у Суслова).

И. С. Аржаных

**1350. Всюду неразрешимые линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Хорних** (Überall unlösbare lineare partielle Differentialgleichungen. Hornich Hans), Monatsh. Math., 1955, **59**, № 1, 34—42 (нем.)

Для произвольной ограниченной плоской области $G$ строятся функция $\varphi(x, y)$, непрерывная в $G$, и постоянные $a$, $b$ и $c$ так, что уравнение

$$\partial u / \partial x + \varphi \, \partial u / \partial y = ax + by + c$$

ни в какой области $G' \subseteq G$ не имеет дифференцируемого решения. При построении примера основным свойством функции $\varphi$ является то, что для любой области $G' \subseteq G$ найдутся две точки $(\alpha, \beta) \in G'$ и $(\gamma, \delta) \in G'$ $(\alpha < \gamma)$ и решения $\psi_1(x) \not\equiv \psi_2(x)$ уравнения $dy/dx = \varphi(x, y)$, для которых $\psi_i(\alpha) = \beta$, $\psi_i(\gamma) = \delta$ $(i = 1, 2)$.

А. Д. Мышкис

**1351. К задаче Дарбу для уравнения $z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y)$. Конти** (Sul problema di Darboux per l'equazione $z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y)$. Conti Roberto), Ann. Univ. Ferrara. 1953, sec. 7, **2**, 129—140 (итал.)

Рассматривается задача с начальными данными на характеристиках:

$$z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y),$$

$$z(x, 0) = \sigma(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant a), \; z(0, y) = \tau(y) \quad (0 \leqslant y \leqslant b).$$

Здесь $\sigma$ и $\tau$ удовлетворяют условиям Липшица, $f$ непрерывна, ограничена и равномерно удовлетворяет условию Липшица относительно $z_x$ и $z_y$. Непрерывное по Липшицу решение $z(x, y)$ получается как решение эквивалентного интегрального уравнения. В доказательстве аппроксимативный процесс, который Тонелли применял в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, переносится на случай двух переменных.

F. A. Ficken

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 7, 628.

**1352. К алгебраической теории дифференциальных уравнений с частными производными. Херц** (Contribution à la théorie algébrique des équations aux dérivées partielles. Herz Jean-Claude), Ann. scient. Ecole norm. supér., 1954, **71**, № 4, 321—362 (франц.)

Алгебраизируется теория систем линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Получаются свойства векторного пространства $E$ над телом $K$, в котором определена операция $\{,\}$ (скобка Якоби), со свойствами:

$$\{u, v\} = -\{v, u\}; \; \{u, v + w\} = \{u, v\} + \{u, w\};$$

$$\{u, \lambda v\} = \lambda \{u, v\} + \alpha v; \; \{u, \{v, w\}\} + \{v, \{w, u\}\} + \{w, \{u, v\}\} = 0;$$

$\alpha$ зависит только от $\lambda$, $u$ («псевдоалгебра Ли», по автору). Определяется структура псевдоалгебр Ли в случае, если размерность $E$ больше единицы и характеристика $K$ отлична от двух; в случае размерности, равной единице, получены менее полные результаты. Далее, опираясь на результаты Ритта (Ritt, Amer. Math. Soc. Colloq. Public., 1950, 33, 27—166), автор дает алгебраическое доказательство теоремы: Для того чтобы системы линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$u_i Y = 0, \quad v_j Y = 0 \qquad (i, j = 1, 2), \ldots \tag{1}$$

допускали одинаковые решения, необходимо и достаточно, чтобы псевдо-алгебры Ли, порожденные $u_i$ и $v_j$, совпадали. В заключение, опираясь на развитую им теорию, автор дает некоторое упрощение классической теории интегрирования системы типа (1).

Я. Б. Лопатинский

**1353. Пример дифференциального уравнения типа Гюйгенса. Штельмахер** (Ein Beispiel einer Huyghensschen Differentialgleichung. Stellmacher Karl L.), Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-phys. Kl. II-a, 1953, № 10, 133—138 (нем.)

Определяются все аналитические функции $c(x_1, \ldots, x_6)$, для которых значение в точке решения уравнения

$$-\sum_{i=1}^{5} \partial^2 u / \partial x_i^2 + \partial^2 u / \partial x_6^2 + c(x_1, \ldots, x_6) u = 0$$

зависит только от значений этого решения на пересечении соответствующего характеристического конуса с поверхностью задания начальных данных (дифференциальное уравнение типа Гюйгенса). Это имеет место только при $c(x) = k \{(x_6 - a_6)^2 - \sum_{i=1}^{5} (x_i - a_i)^2 + k/8\}^{-2}$ или при $c(x) = -2(a, a) \{(a, x) + B\}^{-2}$; здесь $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $(a, x) = \sum_{i=1}^{6} a_i x_i$, $k$, $B$ — постоянные.

Я. Б. Лопатинский

**1354. Общая форма сингулярных решений волновых уравнений. Фер** (Forme générale des solutions singulières des équations d'onde. Fer Francis), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 6, 600—602 (франц.)

Рассматривается уравнение

$$\square u + b^\rho \partial u / \partial x^\rho - ku = 0 \quad (\rho = 1, \ldots, 4; \; x^4 = t),$$

где $b^\rho$, $k$ — вещественные или комплексные функции $x^\rho$. Доказывается, что уравнение имеет бесконечное множество решений с подвижной особенностью типа потенциала линии

$$u(x^\rho) = \int_{-\infty}^{\tau} r^{-1} \omega(\theta) \mu(x^\rho, a^\rho) \, d\theta \quad (a^4 = \theta)$$

и все решения с подвижной полярной особенностью приводятся к потенциалу линии.

Х. Л. Смолицкий

**1355. Элементарное решение ультрагиперболических уравнений. Фурес-Брюа** (Solution élémentaire d'équations ultrahyperboliques. Fourès-Bruhat Yvonne), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 4, 395—396 (франц.)

Для оператора

$$\square = \sum_{\alpha=1}^{n_1} \partial^2 / (\partial x^\alpha)^2 - \sum_{i=1}^{n_2} \partial^2 / (\partial x^i)^2 \quad (n_1 + n_2 = n)$$

строится элементарное решение $\sigma$—распределение (обобщенная функция), удовлетворяющее в $R^n$ уравнению $\square \sigma = \delta$.

Х. Л. Смолицкий

**1356. О линейных дифференциальных уравнениях с частными производными второго порядка, имеющих геодезические решения. Дафф** (On linear partial differential equations of the second order having geodesic solutions. Duff G. F. D.), Canad. J. Math., 1954, **6**, № 1, 73—79 (англ.)

Рассматривается уравнение вида

$$\Delta u + (\mathbf{b}, \nabla u) + cu = 0; \tag{1}$$

здесь $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$, $\Delta u = a^{1/2}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(a^{1/2}a^{ik}\frac{\partial u}{\partial x^k}\right)$, $a^{-1} = |\det(a^{ik})| \neq 0$; $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_N)$, все коэффициенты предполагаются четырежды непрерывно дифференцируемыми. Пусть $\Gamma = \Gamma(P, Q) = s^2(P, Q)$ — квадрат геодезического расстояния между точками $P$, $Q$ в метрике, определяемой формой $ds^2 = a_{ik}dx^i dx^k$ ($a_{ik}a^{kj} = \delta_i^j$). Пространство с этой метрикой называется вполне гармоническим, если при любом выборе точки $Q$ уравнение $\Delta u = 0$ имеет непостоянное решение $u(P)$, являющееся функцией только $\Gamma(P, Q)$. Доказываются теоремы:

I. Для того чтобы уравнение (1) имело решение $u \in C^2$ при $\Gamma \neq 0$, непостоянное в окрестности $\Gamma = 0$, являющееся функцией только $\Gamma(P, Q)$, необходимо и достаточно, чтобы $c = \text{const}$, $b = 0$ и пространство было вполне гармоническим. При выполнении этих условий уравнение (1) имеет два независимых решения вида $F(\Gamma)$, одно из которых является фундаментальным, а другое регулярным при $\Gamma = 0$.

II. Если выполнены условия теоремы I и притом уравнение (1) эллиптического типа, то среднее значение регулярного решения $u(P)$ уравнения (1) по геодезической сфере радиуса $s$ с центром в $Q$, равно $v(s^2)u(Q)$; $v(s^2) = v(\Gamma(P, Q))$ есть регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $v(0) = 1$ (в формулировке этой теоремы содержится несущественная неточность). Я. Б. Лопатинский

**1357. О решении общей задачи диффракции. Ладыженская О. А.**, Докл. АН СССР, 1954, **96**, № 3, 433—436

В области $\Omega$ пространства $X = (x_1, \ldots, x_n)$ (конечной или бесконечной) с границей $S$ рассматривается гиперболическое уравнение

$$\rho(X)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a(X, t)u + f(X, t),$$

коэффициенты которого $a_{ij}$, $\rho \geqslant \rho_0 > 0$ суть кусочно-непрерывные функции, имеющие лишь разрывы первого рода на поверхности $F \subset \Omega$. При $t = 0$ задаются начальные условия, на $S$ — граничное условие, а на $F$ — условия сопряжения

$$(u)_F^+ = (u)_F^-,\ (b\partial u/\partial N)_F^+ = (b\partial u/\partial N)_F^-,$$

где $b$ — кусочно-постоянная функция, могущая терпеть разрыв лишь на $F$. Решение $u(X, t)$ задачи понимается в обобщенном смысле, а именно как функция, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_0^{t_1}\int_{\Omega'}\left\{b\rho\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial t} - b\sum_{i,j}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + bau\Phi + bf\Phi\right\}dxdt + \int_{\Omega'}b\rho\varphi_1\Phi dx = 0, \qquad (3)$$

где $\varphi_1 = \partial u/\partial t|_{t=0}$, $\Omega'$ — любая конечная подобласть $\Omega$, а $\Phi \in W_2^{(1)}(Q')$, $Q' = \Omega' \times [0, t_2]$, $\Phi$ обращается в нуль при $t = t_1$ и на боковой поверхности $Q'$. Существование такого решения установлено методом конечных разностей. Имеет место единственность решения задачи в указанном смысле.

Кроме того, рассмотрена аналогичная задача диффракции для уравнений теории упругости. Указана конечноразностная схема, позволяющая установить существование решения задачи и в этом случае.

М. И. Вишик

**1358. О неподвижной точке функционального преобразования: граничная задача для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Вольпато** (Sugli elementi uniti di trasformazioni funzionali: un problema ai limiti per una classe di equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico. Volpato Mario), Ann. Univ. Ferrara, 1953, sez. 7, **2**, 93—109 (итал.)

Пусть $\Sigma^*$ — банахово пространство, образованное системой $q$ непрерывных в прямоугольнике функций, $\Phi$ — непрерывное отображение $\Sigma^*$ в некоторое подпространство $\Sigma$. Автор доказывает, что $\Phi$ имеет по крайней мере одну неподвижную точку, если $\Phi(\Sigma^*)$ ограничено и если (грубо говоря) осцилляция образа функции мажорируется неоднородным линейным выражением от осцилляции прообраза. Рассмотрено обобщение краевой задачи с начальными данными на характеристиках для уравнения

$$z_{n,m} = f(x, y, z, \ldots, z_{\nu,\mu}, \ldots, z_{n,\mu}, \ldots, z_{\nu,m}, \ldots);$$

$$z_{r,s} = \partial^{r+s}z/\partial x^r \partial y^s;\ \nu = 0, \ldots, n-1;\ \mu = 0, \ldots, m-1,$$

где $f$ удовлетворяет условию Липшица лишь для тех $z_{\nu,\mu}$, для которых $\nu = n$ или $\mu = m$. Доказаны две теоремы существования; в одной из них $f$ ограничена, в другой это требование несколько ослаблено. Отмечается связь с аналогичной работой Хартмана и Винтнера (Hartman, Wintner, Amer. J. Math., 1952, **74**, 834—864).

Исправление: как отмечает автор в другой работе (Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1954, **23**, 228) в оценке (21) на стр. 105 и в продолжении предыдущей оценки на стр. 104 (в средине) справа надо прибавить $|G_{n,\mu}(x_1, y_1) - G_{n,\mu}(x_2, y_2)|$ (что следует из (16)). Это выражение равномерно стремится к 0 вместе с расстоянием между $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$ и в (23) может быть включено в $H_{n,\mu}(\delta)$. F. A. Ficken

Перевод из Math. Revs. 1954, **15**, № 8, 709.

**1359. Приложение вариационного метода к изучению одного дифференциального уравнения с частными производными и двойными вещественными характеристиками. Манарези** (Applicazione di un procedimento variazionale allo studio di una equazione differenziale alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie. Manaresi Fabio), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1954, **23**, № 1, 163—213 (итал.)

В прямоугольнике $R \equiv (a_1 \leqslant x \leqslant a_2,\ b_1 \leqslant y \leqslant b_2)$ ищется решение дифференциального уравнения

$$(\theta u_{xy})_{xy} + pu = 0 \qquad (\theta > 0,\ p \geqslant 0)$$

при краевом условии $u = g$ на $FR$ (на границе $R$); предполагается, что функции $\theta_x$, $\theta_y$, $\theta_{xy}$, $p$, $g_{yy}(a_i, y)$, $g_{xx}(x, b_i)$ $(i = 1, 2)$ существуют и непрерывны. От решения $u$ требуется, чтобы оно обладало непрерывными производными $u_x$, $u_y$, $u_{xy}$, $u_{xyx}$, $u_{xyy}$, $u_{xyxy}$. Эта краевая задача заменяется равносильным интегральным уравнением, от решений которого достаточно требовать лишь непрерывность (а необходимая их гладкость получается как следствие).

Далее рассматривается функционал

$$I[u] = \int\int_R [\theta(u_{xy})^2 + pu^2]\,dxdy$$

в классе функций $u$, непрерывных в $R$ вместе с $u_x$, $u_y$, $u_{xy}$ и равных $g$ на $FR$. Доказывается, что из последовательности функции, минимизирующей этот функционал, можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность, предел которой удовлетворяет упомянутому выше интегральному уравнению (доказательство последнего утверждения наиболее громоздко). Единственность решения поставленной краевой (и вариационной) задачи получается просто. Указано, как изменить рассуждения, чтобы доказать аналогичные

теоремы для уравнения

$$(\theta u_{xy})_{xy} - (ru_x + su_y)_x - (tu_y + su_x)_y + pu = 0, \quad (1)$$

где функции $r, s, t$ имеют непрерывные производные $r_x$, $s_x$, $s_y$, $t_y$, причем $r \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $rt \geqslant s^2$.

Во второй части рассмотрена задача о собственных значениях:

$$(\theta u_{xy})_{xy} + (p - \lambda q)u = 0 \qquad (u = 0 \text{ на } FR),$$

где $q \not\equiv 0$—непрерывная функция. При помощи вариационного метода доказано, что все собственные значения можно расположить в последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ($|\lambda_h| \underset{h\to\infty}{\to} \infty$), а соответствующие собственные функции $u_h$ (через которые линейно выражаются все прочие собственные функции) выбрать так, чтобы

$$\int\int_R q u_h u_k dxdy = 0 \quad (h \neq k), \; K[u_h] \equiv \int\int_R q u_h^2 dxdy = \operatorname{sign}\lambda_h$$

(при этом если $q$ меняет знак, то имеется бесконечное число собственных значений каждого знака). Собственные значения можно получить последовательно, рассматривая отношение $I[u]/K[u]$ или независимо друг от друга при помощи теоремы, аналогичной известной теореме Куранта о максимуме минимумов. Из последней теоремы выводятся некоторые теоремы о сравнении собственных значений при изменении коэффициентов и области. По поводу доказательства одного из основных свойств автор отсылает читателя к работе Манжерона (Mangeron D., Rend. Accad. Scienze Fis. e Mat. Napoli, ser. 4, 1932, 2, 29—40), рассматривавшего случай $p \equiv 0$. Полученные результаты переносятся на уравнение вида (1).

Замеченная опечатка: в уравнении (III) на стр. 164 между первой и второй скобками должен стоять знак «—».

А. Д. Мышкис

**1360. Исследование методом конечных разностей задачи Коши для уравнения второго порядка параболического типа. П у ч ч и** (Studio col metodo delle differenze di un problema di Chauchy relativo ad equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo parabolico. P u c c i C a r l o), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1953, **7**, № 3—4, 205—215 (итал.)

При помощи метода конечных разностей устанавливается, что задача Коши

$$\partial^2 u/\partial t^2 = a(t)\,\partial u/\partial x + b(t)\,\partial u/\partial t + c(t)u + f(x,t), \quad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \;\; \partial u(x,0)/\partial t = u_1(x) \quad (2)$$

в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant h$ имеет решение, обладающее непрерывными производными $\partial^k u/\partial t^k$, $\partial^n u/\partial x^n$, $k = 1, 2$; $n = 1, 2, \ldots$, если $a$, $b$, $c$ и $f$ непрерывны, а $u_0$, $u_1$ и $f$ имеют производные по $x$ всех порядков и удовлетворяют неравенствам

$$|d^n u_0/dx^n|, \; |d^n u_1/dx^n|, \; |\partial^n f/\partial x^n| < M\rho^{-n}(2n)!,$$

где $n = 1, 2, \ldots$, $M > 0$, $\rho > l^2 h^2 \max_{0\leqslant t\leqslant h} |a(t)|$ — постоянные. Уравнение (1) заменяется разностным следующим образом

$$[v(x, t+2\Delta t) - 2v(x, t+\Delta t) + v(x,t)]/\Delta t^2 =$$
$$= a(t)[v(x+\Delta x, t) - v(x,t)]/\Delta x +$$
$$+ b(t)[v(x, t+\Delta t) - v(x,t)]/\Delta t + f(x,t),$$

а коэффициент $c(t)$ без ограничения общности полагается равным нулю. Доказывается, что $v$ и его разностные отношения по $t$ до второго порядка, а по $x$ до любого фиксированного порядка остаются ограниченными по модулю равномерно относительно $h = 1, 2, \ldots$, если взять $\Delta x = l/n^2$, $\Delta t = h/n$. Отсюда уже следует теорема существования решения задачи (1), (2).

О. А. Ладыженская

**1361. О связи между фундаментальными матрицами решений параболических и эллиптических систем. Э й д е л ь м а н С. Д.**, Матем. сб., 1954, **35**, № 1, 57—72

Обобщая результат А. Н. Тихонова (Бюлл. МГУ, 1938, **1А**, № 9, 1—45), автор устанавливает связь между фундаментальными матрицами $\varphi(\xi - x)$ эллиптического уравнения с постоянными действительными коэффициентами, содержащего только дифференцирования порядка $2b$, $\Phi^{(2b)}(\partial/\partial x)u = 0$, и фундаментальными матрицами $G(t - t_0, x - \xi)$ соответствующего параболического уравнения $\partial u/\partial t = -\Phi^{(2b)}(\partial/\partial x)u$. В случае $2b < n$ ($n$ — числа пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$) $\varphi(x - \xi) = \int_0^\infty G(\beta, x - \xi)\, d\beta$; в случае $n \geqslant 2b$ получена несколько более сложная формула. Подобные же формулы имеют место и для системы уравнений, если система $\partial u/\partial t = -\Phi^{(2b)}(\partial/\partial x)u$ имеет параболический тип.

Я. Б. Лопатинский

**1362. О некоторых решениях волнового уравнения. Г у р е в и ч М. И.**, Докл. АН СССР, 1954, **97**, № 3, 385—386

Ищутся решения уравнения

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 - \partial^2\varphi/\partial z^2 = 0$$

вида $\varphi = \sum_{n=1}^\infty r^n f_n(\delta, \sigma)$, где $r$ $\sigma$, $\delta$ — криволинейные координаты; $x = -r\cos\delta/\operatorname{sh}\delta$; $y = -r\sin\delta/\operatorname{sh}\delta$, $z = -r\operatorname{cth}\delta$. Показывается, что за $\varphi_n$ можно взять функцию

$$\varphi_n = \operatorname{sh}^{n+1}\delta\left(\operatorname{sh}\delta\frac{\partial}{\partial\delta}\right)^n \frac{F_n(\omega) + \overline{F_n(\omega)}}{2\operatorname{sh}\delta},$$

где $\omega = \delta + i\sigma$ и $F_n(\omega)$ — аналитическая функция от $\omega$.

С. Г. Михлин

**1363. Ударная волна в инвариантной теории распространения волн. Т е о д о р е с к у** (Unda de şoc în teoria invariantă a propagării undelor. T e o d o r e s c u N.), Bul. Ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1953, **5**, № 1, 19—39 (рум.; резюме русс., франц.)

Изучаются поверхности разрыва решений уравнения гиперболического типа

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j + \sum_{i=1}^n b_i \partial u/\partial x_i + cu = f,$$

с достаточно гладкими коэффициентами.

Поверхность разрыва $S_{n-2}$ (размерности $n-2$) производных порядка $m$ решения $u(x)$ называется распространяемой, если она лежит на такой поверхности $S_{n-1}$, на которой разрывы производных порядка $m$ определяются заданием разрывов на $S_{n-2}$ и заданием разрывов на $S_{n-1}$ производных меньшего порядка (вне $S_{n-1}$ решение регулярно). Один из результатов автора: Для того чтобы поверхность разрыва $S_{n-2}$ решения и его первых производных (ударная волна) была распространяема, необходимо и достаточно, чтобы она содержалась в характеристической поверхности $S_{n-1}$ и касательные к ней направления лежали вне соответствующих характеристических конусов (решение регулярно вне $S_{n-1}$).

Определена связь между скачком первой (нормальной к $S_{n-1}$) производной и скачком самого решения. Приведены еще некоторые результаты подобного типа.

Я. Б. Лопатинский

1364. Две теоремы о решении уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Ректорыс (Dvě věty o řešení rovnice $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Rektorys Karel), Časop. pěstov. mat., 1954, **79**, № 4, 333—366 (чеш.; резюме русс., англ.)

Рассматривается задача Дирихле для уравнения Лапласа и первая краевая задача для уравнения теплопроводности при условии, что пространственные переменные $x$ и $y$ изменяются в пределах от 0 до $\pi$. В задаче Дирихле искомая функция равна нулю на трех сторонах квадрата и равна ограниченной функции $f(x)$, непрерывной для всех $x\in(0,\pi)$, за исключением меры нуль, на четвертой стороне. Доказывается, что решение этой задачи имеет производные всех порядков внутри области и непрерывно вплоть до границы в тех точках границы, где заданная граничная функция непрерывна. Решение представлено рядом Фурье. Аналогичный результат устанавливается и для уравнения теплопроводности.

Автор, повидимому, не знаком с работами 30—50 гг., посвященных «неклассическим» постановкам классических задач (с исследованием обобщенных решений, теорией «барьеров» и пр.), в которых получены более общие результаты. О. А. Ладыженская

1365. **О влияниях и двумерных поверхностях, вдоль которых решение волнового уравнения может иметь разрыв. Петровский И. Г., Чудов Л. А.**, Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 3, 175—180

Рассматриваются функции $u(t,x,y,z)$, которые имеют непрерывные вторые производные и удовлетворяют уравнению

$$\partial^2 u/\partial t^2=\partial^2 u/\partial x^2+\partial^2 u/\partial y^2+\partial^2 u/\partial z^2 \qquad (1)$$

во всех точках области $D$ пространства $(t,x,y,z)$, за исключением некоторых изолированных точек, линий, двумерных и трехмерных поверхностей, где $u$ или какие-нибудь ее производные до второго порядка включительно имеют неустранимые разрывы.

Пусть $u\equiv u(x-at,\ y-bt,\ z-ct)$ имеет непрерывные производные второго порядка и удовлетворяет уравнению (1) всюду, кроме точек прямой

$$\xi\equiv x-at=0.\quad \eta\equiv y-bt=0,\ \zeta\equiv z-ct=0 \qquad (2)$$

($a$, $b$, $c$ — некоторые постоянные), где $u$ или какая-либо ее производная до второго порядка включительно имеет неустранимый разрыв, а в окрестности точки $\xi=0,\ \eta=0,\ \zeta=0$

$$|u(\xi,\eta,\zeta)|\leqslant A(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{-p/2},\quad A>0,\ p>0.$$

Показано, что прямая (2) не может лежать на поверхности характеристического конуса

$$t^2=x^2+y^2+z^2. \qquad (3)$$

Если $u$ трижды непрерывно дифференцируема во всех точках, не принадлежащих (2), то линия разрыва (2) не может лежать вне характеристического конуса (3). Можно построить пример дважды дифференцируемой вне прямой (2) функции $u\equiv u(x-at,\ y-bt,\ z-ct)$, обладающей указанными выше свойствами и такой, что линия разрыва (2) лежит вне характеристического конуса (3). Аналогичные рассмотрения проводятся для двумерной плоскости разрыва решения уравнения (1). О. А. Олейник

1366. **Основные интегральные уравнения краевых задач классической теории поля. Аржаных И. С.**, Докл. АН УзССР, 1955, № 2, 3—7 (резюме узб.)

В области $Q_1$ лежащей внутри или вне замкнутой поверхности $S$, рассматривается векторное поле $\mathbf{v}$. Доказывается, что если

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}=\Omega,\ \operatorname{div}\mathbf{v}=\theta, \qquad (1)$$

то $\mathbf{v}$ удовлетворяет уравнению

$$4\pi\mathbf{v}=\operatorname{grad}\left(\varepsilon\int\frac{(\mathbf{nv})}{r}\,dS-\int\frac{\theta}{r}\,dQ\right)-$$
$$-\operatorname{rot}\left(\varepsilon\int\frac{[\mathbf{nv}]}{r}\,dS-\int\frac{\Omega}{r}\,dQ\right) \qquad (2)$$

($\varepsilon=1$ для области внутри $S$, $\varepsilon=-1$ — для внешней области); $\mathbf{v}$ (удовлетворяющий (2) при заданных $\theta$ и $\Omega$, $\operatorname{div}\Omega=0$) удовлетворяет (1).

В предположении, что $\theta$ и $\Omega$ заданы, получены интегральное уравнение для нормальной составляющей $\mathbf{v}$ на $S$, если задана касательная составляющая, и векторное интегральное уравнение для касательной составляющей $\mathbf{v}$ на $S$, если задана нормальная составляющая. Х. Л. Смолицкий

1367. **Теорема типа Фрагмена — Линделёфа. Хубер** (A theorem of Phragmén — Lindelöf type. Huber Alfred), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 6, 852—857 (англ.)

Обозначения: $H=E[P\mid x_n>0]$, $D=E[P\mid x_n=0]$, $S_r=H\cap E[P\mid\sum_{i=1}^n x_i^2=r^2]$, где $P=P(x_1,\ldots,x_n)$ — точка $n$-мерного пространства. Пусть $u(P)$ — регулярное в $H$ решение уравнения

$$L_k(u)\equiv\sum_{i=1}^n\partial^2 u/\partial x_i^2+x_n^{-1}k\partial u/\partial x_n=0,\quad k<1,$$

и $\limsup_{P\to M}u(P)\leqslant 0$, $(P\in H,\ M\in D)$. Тогда существует $\alpha=\lim_{r\to\infty}m_r(r)\,r^{k-1}$, $m(r)=\sup_{P\in S_r}u(P)$; $\alpha\geqslant 0$; $u(P)\leqslant\alpha x_n^{1-k}$, $P\in H$; если $u(P)=\alpha x_n^{1-k}$ хоть в одной точке, то $u(P)\equiv\alpha x_n^{1-k}$ $(P\in\bar H)$.

Теорема перестает быть справедливой, если $k\geqslant 1$ (например, $u=\log x_n$, $k=1$; $u=-x_n^{1-k}+\text{const}$, $k>1$). Библ. 9 назв. М. Б. Гагуа

1368. **О полуограниченных гармонических функциях многих переменных. Виссер** (Sur les fonctions harmoniques semi-bornées d'un nombre arbitraire de variables. Visser C.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, **A58**, № 1, 50—55; Indagationes math., 1955, **17**, 50—55 (франц.)

Доказывается теорема (аналог теоремы Жюлиа — Каратеодори об угловых производных): Пусть $h(s)>0$ — непрерывная неубывающая функция, $s\geqslant 0$, $h(s)s^{-2}$ не возрастает и $\int_1^\infty h(s)s^{-2}\,ds<\infty$. Пусть $D$ — область $x_1>h(\sqrt{x_2^2+\ldots+x_n^2})$ и $u(P)$ гармонична и ограничена снизу в $D$. Тогда внутри любого конуса $\sqrt{x_2^2+\ldots+x_n^2}\leqslant Mx_1$ при $x_1\to\infty$ существует $\lim u/x_1=\lambda$ и $\lim\operatorname{grad}u=\lambda\operatorname{grad}x_1$. Для доказательства рассматривается функция $\omega(P)=\sup(u_x(P)/u(P))$, где sup берется по семейству положительных гармонических в $D$ функций; используется сходимость интеграла $\int_{x_1}^\infty(\omega-x_1^{-1})\,dx_1$. В основе оценок лежат неравенства Гарнака. Н. С. Ландкоф

1369. **Поведение решений уравнения $\Delta U=F(x,u)$ в окрестности точки. Мюллер** (The behavior of the solutions of $\Delta U=F(x,U)$ in the neighborhood of a point. Müller Claus), Division of Electromagnetic Research, Institute of Mathematical Scien-

ces, New York University, Research Rep., 1954, № BR-5, I + 18 pp. (англ.)

Изучается локальное поведение решений уравнений вида

$$\Delta U = F(x, U) \tag{1}$$

и главным образом поведение решений уравнения

$$\Delta U + k^2(x)\, U = 0, \tag{2}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_p)$ — вектор $p$-мерного евклидова пространства, $\Delta$ — оператор Лапласа. Основной результат: Пусть $U \in C^2$ при $|x| \leqslant \alpha$ и равномерно по $R$, $0 < R \leqslant \alpha$, удовлетворяет неравенству

$$\int_{\Omega R} |\Delta U|^2\, ds \leqslant c \int_{\Omega R} |U|^2\, ds,$$

где $\Omega_R$ — гиперсфера $|x| = R$. Тогда, если

$$\int_{\Omega R} |U|^2\, ds \equiv o(R^n) \text{ при } R \to 0 \tag{3}$$

для всех $n$, то $U \equiv 0$.

Условия теоремы, очевидно, выполняются, если $U$ — решение (2), где $k(x)$ равномерно ограничено. Итак, решение, убывающее быстрее любой степени расстояния, есть нуль. Раньше эта теорема была доказана только для аналитических $k(x)$. Если $U_1$ и $U_2$ — непрерывно дифференцируемые при $|x - x_0| \leqslant \alpha$ решения (1), $U_1(x_0) = U_2(x_0)$, $|F(x, T_1) - F(x, T_2)| \leqslant L|T_1 - T_2|$ в окрестности $x_0$ и $U_1(x_0)$ и если $\int_{\Omega R} |U_1(x) - U_2(x)|^2\, ds = o(R^n)$ при $R \to 0$ для всех $n$ ($\Omega_R$ — гиперсфера $|x - x_0| = R$) то $U_1 \equiv U_2$.

E. T. Copson

Перевод из Math. Revs. 1954, **15**, № 8, 711.

**1370. О сингулярностях решений дифференциальных уравнений эллиптического типа. Нетаньяху** (On the singularities of solutions of differential equations of the elliptic type. Netanyahu E.), J. Rational Mech. and Analysis, 1954, **3**, № 6, 755—761 (англ.)

Рассматривается дифференциальное уравнение эллиптического типа, которое в комплексных обозначениях имеет вид

$$L(u) \equiv u_{zz^*} + a u_z + a^* u_{z^*} + cu = 0, \tag{1}$$

где $z = x + iy$, $z^* = x - iy$, $a \equiv a(z, z^*)$ и $c \equiv c(z, z^*)$ — заданные целые функции. Пусть

$$U = (z, z^*) = \sum_{m,k=0}^{\infty} D_{mk} z^m z^{*k} = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(z)\, z^{*k},$$

$$D_{mk} = D_{km}^*,$$

является разложением (в окрестности нуля) действительного регулярного решения уравнения (1).

Бергман доказал (Bergman S., Trans. Amer. Math. Soc., 1945, **57**, 299—331), что односвязная область регулярности функции $U_0(z)$ совпадает с областью регулярности $U(z, z^*)$. Продолжая исследования Бергмана, автор устанавливает, что если односвязная область $D$, $O \in D$, является областью регулярности $U_k(z)$ при некоторых $k > 0$, ($U_k$ — не целая функция), то в $D$ решение $U(z, z^*)$ может иметь лишь конечное число изолированных особенностей. М. Б. Гагуа

**1371. О сингулярностях решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Нетаньяху** (On the singularities of solutions of linear partial differential equations of the elliptic type. Netanyahu E.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 146—147 (англ.)

Краткое изложение результатов предыдущей работы (реф. 1370). М. Б. Гагуа

**1372. Об одном методе решения краевых задач уравнений в частных производных. Векуа И. Н.,** Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 4, 593—596

Дано обоснование одного метода решения краевых задач для квазилинейных уравнений вида

$$a(x, y, u, u_x, u_y)\, u_{xx} + 2b(x, y, u, u_x, u_y)\, u_{xy} + c(x, y, u, u_x, u_y)\, u_{yy} + d(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{1}$$

при довольно общих предположениях относительно $a$, $b$, $c$, $d$. Уравнение (1) удовлетворяется почти всюду в рассматриваемой области, частные производные от $u(x, y)$ понимаются в смысле С. Л. Соболева. Изучается первая краевая задача для односвязной области, которую можно свести к задаче Дирихле для единичного круга с однородным краевым условием.

Уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$u_{z\bar{z}} + \operatorname{Re}[A(z, u, u_z)\, u_{zz}] + B(z, u, u_z) = 0, \tag{2}$$

где $u_x + iu_y = 2u_{\bar{z}}$, $u_x - iu_y = 2u_z$, решение ищется в виде

$$u(x, y) = \iint_{\Gamma} G(z, \zeta)\, \rho(\zeta)\, d\eta\, d\xi \equiv S_0\rho, \quad G = \frac{2}{\pi} \lg \frac{|z - \zeta|}{|1 - z\bar{\zeta}|}, \tag{3}$$

где $\Gamma$ — единичный круг с границей $\gamma$, $\rho(\zeta) \in L_p(\Gamma)$, ($p \geqslant 1$) — вещественная функция точки $\zeta = \xi + i\eta$. Если $\rho \in L_p$, $p > 2$, то $u = S_0\rho$ и $u_z = S_1\rho$ непрерывны в $\Gamma + \gamma$, причем 1) $u|_\gamma = 0$; 2) $|S_0\rho| \leqslant k_0 \|\rho\|_p$, $|S_1\rho| \leqslant k_1 \|\rho\|_p$; 3) $S_1\rho \in \operatorname{Lip}\alpha$, $\alpha = (p-2)/2$. Существуют обобщенные вторые производные $u$, которые определяются по формуле

$$u_{\bar{z}\bar{z}} = \rho, \quad u_{zz} = S_2\rho \equiv \int_{\Gamma} (\partial^2 G(z, \zeta)/\partial z^2)\, \rho(\zeta)\, d\zeta,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. На основании неравенства Кальдерона и Зигмунда (Calderon A. P. Zygmund A., Acta math., 1952, 88, № 1—2, 85—139) утверждается, что $\|S_2\rho\|_p \leqslant A_p \|\rho\|_p$, $p > 1$. Задача сводится к исследованию функционального уравнения вида

$$\rho(x, y) + \operatorname{Re}[A(z, S_0\rho, S_1\rho)\, S_2\rho] + B(z, S_0\rho, S_1\rho) \equiv \rho - P\rho = 0, \tag{4}$$

оператор $P$ переводит $L_p$ в $L_p$, $p > 2$. Устанавливается, что $A_2 = 1$. На основании этого равенства доказано, что при некоторых условиях на Au $B$ уравнение (4) разрешимо.

Далее рассматривается линейное уравнение

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g \tag{5}$$

где $a$, $b$, $c$ — ограниченные измеримые функции переменных $x$, $y$, $a^2 - b^2 \geqslant k > 0$ почти везде в $\Gamma$ и $d$, $e$, $f$, $g \in L_p(\Gamma)$, $p > 2$. Доказывается, что если $d$, $e$, $f$ малы по норме, то задача Дирихле $u|_\gamma = 0$ для (5) имеет решение, выражаемое формулой (3). Уравнение (4) обращением сингулярной части оператора $P$ приводится в этом случае к эквивалентному уравнению с вполне непрерывным оператором, для которого справедлива альтернатива Фредгольма.

Приводятся теоремы, характеризующие гладкость обобщенного решения уравнения (5) в зависимости от степени гладкости коэффициентов. А. И. Каландия

**1373. О краевой задаче для уравнения $\Delta u + \lambda^2 u = 0$.** Эйдус Д. М., Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 4, 631—633

В пространстве $L_2(S)$ рассматривается симметричный вполне непрерывный оператор

$$Af \equiv \int_S r_{xy}^{-1} \sin \lambda r_{xy} f(y)\, dS_y.$$

Здесь $S$ — поверхность, удовлетворяющая условиям Ляпунова, ограничивающая конечную область $\Omega$ в трехмерном пространстве, $r_{xy}$ — расстояние между точками $x$ и $y$, $\lambda \neq 0$ — вещественное число. Доказывается, что всякое решение уравнения $Af = 0$ есть граничное значение нормальной производной функции, удовлетворяющей уравнению $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ и краевому условию $u|_S = 0$. Верно и обратное утверждение. Доказывается, что собственные числа оператора $A$ положительны.

Решение краевой задачи: $\Delta u + \lambda^2 u = 0$, $u|_S = \psi$, выражается через собственные числа $\mu_m$ и собственные функции $\theta_m$ оператора $A$ рядом

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (\psi, \theta_m)\, \mu_m^{-1} \int_S r_{xy}^{-1} \sin \lambda r_{xy} \theta_m(y)\, dS_y,$$

который сходится в $L_2(\Omega)$ и, как следствие, сходится равномерно вместе с рядами производных любого порядка в любой внутренней подобласти $\Omega$.

Упомянутые выше результаты остаются в силе для $n$-мерного пространства, с той разницей, что оператор $A$ задается формулой

$$Af = 2^k \Gamma(k+1) \int_S r_{xy}^{-1} J_k(\lambda r_{xy})\, f(y)\, dS_y; \quad k = (n-2)/2.$$

С. Г. Михлин

**1374. О решении дифференциальных уравнений в частных производных при помощи теоремы Гана — Банаха. Гарабедян, Шифман** (On solution of partial differential equations by the Hahn-Banach theorem. Garabedian P. R., Shiffman Max), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **76**, № 2, 288—299 (англ.)

При помощи теоремы Гана — Банаха строится функция Неймана для оператора $\Lambda u \equiv \Delta u - P(z)u$, где $P(z) \geqslant \varepsilon > 0$, $z = x + iy$, $(\partial u / \partial \nu)|_C = 0$), а также строится для этого оператора функция Грина (при граничном условии $u|_C = 0$). Предварительно изучается функционал $L_w$, сопоставляющий $\Lambda u$, где $u \in C^2(D+C)$, и, например, $\partial u / \partial \nu|_C = 0$, значению функции $u$ в точке $w \in D$: $L_w \Lambda u \equiv u(w)$.

Доказывается ограниченность этого функционала в метрике $C$. (Отметим, что функции $\Lambda u$ не заполняют всего пространства $C$). По теореме Гана — Банаха функционал $L_w$ можно продолжить на все $C$ с сохранением нормы. Далее автор строит так называемый «параметрикс» $S(w, z) = S(z, w)$ для оператора $\Lambda u$, т. е. функцию, имеющую логарифмическую особенность при $w = z$, причем $\Lambda S(w, z)$ — непрерывная функция даже при $w = z$, и, кроме того, $\partial S(w, z) / \partial \nu_z|_C = 0$.

Функция Неймана определяется по формуле

$$N(w, z) = S(w, z) - L_w\{[\Delta - P(t)]\, S(t, z)\},$$

где $L_w$ — продолженный выше функционал. Аналогично строится функция Грина для оператора $\Lambda u$; доказан ряд характерных для нее свойств. Последний параграф посвящен построению функции Грина для неограниченных областей. М. И. Вишик

**1375. Об одной граничной задаче для кольца. Хонг** (On some boundary value problem in an annulus. Hong Imsik), Kodai Math. Sem. Repts, 1954, № 1, 4—6 (англ.)

Кольцо ограничено окружностями $C_1(z = e^{i\theta})$ и $C_2(z = Re^{i\theta})$. $\{E_{1n}\}$ и $\{E_{2n}\}$ — счетные множества открытых дуг, соответственно на $C_1$ и $C_2$, $E_1 \cap E_2 = 0$, $\mathrm{mes}(C_1 - \{E_{1n}\}) = \mathrm{mes}(C_2 - \{E_{2n}\}) = 0$. Множества $\{E_{jn}\}$ $(j = 1, 2)$ делятся произвольно на два класса: $\{A_{jn}\}$ и $\{B_{jn}\}$. Решается задача: построить функцию $f(z)$, гармоническую внутри кольца $1 < |z| < R$ и удовлетворяющую граничным условиям:

$$\lim_{r \to 1} \partial f(re^{i\theta}) / \partial r = A_1(\theta) \quad \text{при } e^{i\theta} \in \{A_{1n}\},$$

$$\lim_{r \to R} \partial f(re^{i\theta}) / \partial r = R^{-1} A_2(\theta) \quad \text{при } Re^{i\theta} \in \{A_{2n}\},$$

$$\lim_{r \to 1} f(re^{i\theta}) = B_1(\theta) \quad \text{при } e^{i\theta} \in \{B_{1n}\},$$

$$\lim_{r \to R} f(re^{i\theta}) = B_2(\theta) \quad \text{при } Re^{i\theta} \in \{B_{2n}\},$$

где $A_j(\theta)$ и $B_j(\theta)$ — заданные на соответственных множествах ограниченные непрерывные функции.

Задача сводится к эквивалентной задаче на полуплоскости и решается методом Мюрберга (Myrberg Lauri, Ann. Acad. scient fennicae Ser. A., J. Math and Phys., 1951, 103).

Указывается, что единственность решения может быть доказана аналогично доказательству Мюрберга для случая круга. Д. Б. Тополянский

**1376. О единственности решений обобщенных граничных задач для колебательного уравнения. Хаху бия** (ტალღის განტოლების განზოგადებულ სასაზღვრო ამოცანათა ამოხსნების ერთადერთობის შესახებ. ხახუბია გ.), Საქართველოს პოლიტექნიკური ინსტიტუტის შრომები, Тр. Груз. политехн. ин-та, 1954, № 30, 115—122 (груз.; резюме русс.)

Н. М. Гюнтер изучал основные краевые задачи теории логарифмического потенциала в некотором обобщенном смысле (Тр. Физ. матем. ин-та АН СССР, 1932, 1). Пусть, для определенности, $D$ — конечная область в пространстве $(x_1, x_2, x_3)$, ограниченная замкнутой поверхностью Ляпунова $S$; задача Дирихле заключается в определении гармонической в $D$ функции $u(x)$, удовлетворяющей на $S$ условию

$$u(\sigma_0) = f(\sigma_0), \quad u(\sigma_0) = \lim_{\sigma' \to \sigma_0} (\sigma')^{-1} \int_{\sigma'} u(x)\, d\sigma',$$

где $\sigma' \subset D$ — поверхность, $f(\sigma_0)$ — заданная на $S$ аддитивная функция множества с ограниченным изменением. Аналогично формулируется задача Неймана.

Автор рассматривает эти обобщенные краевые задачи для колебательного уравнения

$$\partial^2 u / \partial x_1^2 + \partial^2 u / \partial x_2^2 + \partial^2 u / \partial x_3^2 + k^2 u = 0.$$

Выводится формула Грина в интегралах Стилтьеса — Гюнтера, затем доказывается теорема единственности решения краевых задач в случае бесконечной области при соблюдении на бесконечности так называемого условия излучения в виде, указанном И. Н. Векуа (Тр. Тбилисс. матем. ин-та, 1943, 12, 105—165).

А. И. Каландия

**1377. Одно замечание по поводу краевой задачи Неймана. Комацу** (Eine Bemerkung über Neumannsche Randwertaufgabe. Komatu Yûsaku), Kodai Math. Sem. Repts, 1954, № 2, 38—42 (нем.)

Функция Грина — Неймана $N(\zeta, z)$ не обладает свойством конформной инвариантности. Показывается, что семейство функций $\mathfrak{N}(\zeta, z) = N(\zeta, z) + a(\zeta) + B(z)$, каждая из которых может заменить $N(\zeta, z)$ в представлении решения задачи Неймана, в целом конформно инвариантно. Как замечает автор, это обстоятельство просто связано с тем, что ядро допускает представление

$\partial^2 N(\zeta, z)/\partial\zeta\,\partial\bar{z} = \partial^2 \mathfrak{N}(\zeta, \bar{z})/\partial\zeta\,\partial\bar{z}$ (следует предположить, чего автор в явной форме не сделал, односвязность области). Н. С. Ландкоф

**1378. О преобразовании краевых задач. Комацу** (On transference of boundary value problems. Komatu Yûsaku), Kodai Math. Sem. Repts, 1954, № 3, 71—80 (англ.)

При помощи элементарных конформных отображений получены явные формулы, связывающие решения задач Дирихле и Неймана для плоскости с прямолинейным и круговым разрезом с одними и теми же краевыми условиями. Н. С. Ландкоф

**1379. Решение задачи Неймана теории потенциала в случае одного разомкнутого контура. Плуме З. Я.,** Изв. АН ЛатвССР, 1953, № 10, 95—106

Пусть $S$ — плоскость $z = x + iy$, разрезанная вдоль разомкнутой (достаточно гладкой) дуги $L$. Рассматривается задача: найти гармоническую в $S$ функцию $u$, если на краях $L$ заданы значения нормальной производной $u$; при этом $u$ должна быть действительной частью кусочно-голоморфной функции, которая исчезает на бесконечности и ограничена на всей плоскости, включая концы $L$. Задача решается при помощи приведения ее к сингулярному интегральному уравнению. Г. Ф. Манджавидзе

**1380. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями в частных производных (V). Титчмарш** (Eigenfunction expansions associated with partial differential equations (V). Titchmarsh E. C.), Proc. London Math. Soc., 1955, 5, № 17, 1—21 (англ.)

Первые части работы см. Proc. London Math. Soc., 1951, 1, № 1, 1—27; РЖМат, 1954, 1663; 1955, 1257.

Изучается уравнение

$$\Delta\psi + \{\lambda - q(x, y)\}\,\psi = 0 \qquad (1)$$

во всей плоскости. Если при помощи замены $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ уравнение (1) приводится к виду $F_1(u, \psi) + F_2(v, \psi) = 0$, где $F_1$ содержит $u$ и производные по $u$, $F_2$ — $v$ и производные по $v$, то уравнение (1) называется разделимым. Один из простейших случаев разделимого уравнения — тот, когда $q$ зависит только от $r$, тогда (1) в полярных координатах имеет вид $\partial^2\psi/\partial r^2 + r^{-1}\partial\psi/\partial r + r^{-2}\partial^2\psi/\partial\theta^2 + \{\lambda - q(r)\}\,\psi = 0$. (2) Доказывается, что если спектр (2) дискретен, то все собственные функции имеют вид:

$$\psi = Cr^{-1/2}\,\chi_{m,n}(r)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\theta,$$

где $\chi_{m,n}(r)$ — собственные функции уравнения

$$\chi'' + \{\lambda - q(r) - (n^2 - 1/4)\,r^{-2}\}\,\chi = 0, \qquad (3)$$

соответствующие собственным значениям $\lambda_{m,n}$. Для функции Грина $G(r, \theta; r', \theta'; \lambda)$ уравнения (2) при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ выводится разложение

$$G(r, \theta; r', \theta'; \lambda) = 2\pi^{-1}(rr')^{-1/2}\,G_0(r, r'; \lambda) + \pi^{-1}(rr')^{-1/2}\sum_{n=1}^{\infty} G_n(r, r'; \lambda)\cos n(\theta - \theta'),$$

где $G_n(r, r'; \lambda)$ — функция Грина уравнения (3). Аналогичные результаты доказываются в трехмерном случае.

Основная часть работы посвящена изучению уравнения

$$\Delta\psi + (\lambda + ar^{-1} - 2bz)\,\psi = 0, \qquad (4)$$

где $a$ и $b$ — положительные постоянные. Это уравнение встречается при изучении атома водорода в электрическом поле. При помощи некоторых подстановок (4) можно привести к разделимому виду. Детально изучается функция Грина уравнения (4), на основании чего делаются заключения об его спектре. В частности, доказывается, что при $b > 0$ спектр непрерывно заполняет всю ось.

Примечание референта. Разделимые уравнения изучались также недавно в работе Кордеса (РЖМат, 1955, 2768). Б. М. Левитан

**1381. О спектре сингулярных граничных задач эллиптических дифференциальных уравнений. Бирман М. Ш.,** Докл. АН СССР, 1954, **97**, № 1, 5—7

В неограниченной области $\Omega$ с конечной границей $\Gamma$ рассматривается эллиптический оператор

$$Lg = -\sum_{i,k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial g}{\partial x_k}\right) + cg, \qquad (1)$$

при краевых условиях

$$g|_{\Gamma_1} = 0, \quad \partial g|\partial\nu + \sigma g|_{\Gamma_2} = 0 \quad (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma). \qquad (2)$$

В предположении, что $\inf c(x) > -\infty$ и

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(x)\,\xi_i\bar{\xi}_k \leqslant M(r)\sum_{i=1}^{m}|\xi_i|^2,$$

$$\int_R^{+\infty} M(r)^{-1/2}\,dr = \infty,$$

устанавливается теорема: Множество точек сгущения спектра оператора $\tilde{L}$, соответствующего (1), (2), не зависит от вида поверхности $\Gamma$ и граничных условий (2). Независимость от граничных условий (2) вытекает из вполне непрерывности оператора $B = \tilde{L}^{-1} - \tilde{L}_\mu^{-1}$, где $\tilde{L}_\mu$ — оператор $L$ при граничных условиях $u|_\Gamma = 0$. Независимость от границы $\Gamma$ устанавливается при помощи метода «расщепления оператора» И. М. Глазмана (Докл. АН СССР, 1951, 80, № 2, 153—156). Кроме того, формулируются следующие утверждения: 1) левее точки $\lambda = \lim_{|x|\to\infty}\inf c(x)$ спектр $\tilde{L}$ дискретен; 2) прибавление к $c(x)$ функции, стремящейся к нулю при $x \to \infty$, не меняет множества точек сгущения спектра оператора $\tilde{L}$. М. И. Вишик

**1382. Доказательство сходимости собственных функций, получаемых методом сеток. Саульев В. К.,** Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 4, 217—224

Рассматривается задача о собственных значениях для уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ в конечной области $Q$ $n$-мерного пространства, где $1 \leqslant n \leqslant 5$, при условии на границе $u = 0$. Строится неравномерная прямоугольная решетка со звеньями одинакового порядка малости. Для функций, заданных на решетке, разностные отношения первого порядка определяются как обычно, разностные отношения второго порядка определяются некоторым специальным образом. Разностные собственные функции $u^{(h)}$ определяются уравнением $\Delta^{(h)}u^{(h)} + \lambda^{(h)}u^{(h)} = 0$ при условии $u^{(h)} = 0$ в граничных узлах. Предполагается, что для всякой системы функций на решетке $w^{(h)}$, компактной при $h \to 0$ в смысле равномерной сходимости в замкнутой области $Q$, соответствующая система гармонических разностных функций $g^{(h)}$, удовлетворяющих в граничных узлах условию $g^{(h)} = w^{(h)}$, также является компактной в том же смысле. В этом предположении доказывается теорема: Система нормированных разностных собственных функций $u_p^{(h)}$, где $p$ — номер собственной функции, при любом фиксированном $p$ является компактной при $h \to 0$ в указанном выше смысле. Приведенное доказательство содержит пробелы и неточности.

Далее рассматривается частный случай кубической решетки, граница областей предполагается кусочно-гладкой. Доказывается то же, что и в общем случае, но уже без специального предположения о компактности гармонических разностных функций. Доказательство ошибочно, из рассуждений автора следует лишь компактность в смысле равномерной сходимости в любой внутренней подобласти.

Примечания референта. Оба приведенных выше утверждения сформулированы автором неточно. Их следует понимать так, как они сформулированы выше. Далее, ссылка на стр. 219 на работы Л. А. Люстерника (Успехи матем. наук, 1940, 8, 115—124) и И. Г. Петровского (Успехи матем. наук, 1940, 8, 161—170) неточна. В этих работах доказывается компактность гармонических разностных функций, удовлетворяющих краевым условиям, в смысле равномерной сходимости в любой области, содержащейся вместе с границей в $Q$ (а не в самой области $Q$). Так же неточна ссылка на стр. 224 на работу О. А. Ладыженской (Смешанная задача для гиперболического уравнения, 1953 г., М.— Л., Гостехиздат) и на работу референта (Докл. АН СССР, 1952, 83, № 2, 191—194). В этих работах речь идет не о сходимости разностных собственных функций, которая, вообще говоря, не имеет места, а о компактности. Д. М. Эйдус

**1383. Смешанные краевые задачи и приближенный метод их решения. Вишик М. И.,** Докл. АН СССР, 1954, **97**, № 2, 193—196

Дан новый метод доказательства теоремы существования обобщенных решений краевых задач для операторных уравнений и некоторых систем параболического типа. Обобщенное решение задачи берется автором в смысле, введенном в работах референта; именно, как функция, удовлетворяющая некоторому интегральному тождеству, содержащему произвольную функцию. Доказывается теорема единственности для таких решений. В основе данного доказательства теоремы существования лежит то, что вышеупомянутое тождество удается представить, используя теорему Ф. Рисса о линейных функционалах, как равенство скалярных произведений в двух функциональных пространствах. Указывается, что обобщенное решение для этих систем и систем типа Шредингера можно получить аналогом метода Галеркина. Сходимость выводится из «энергетического неравенства» для этих систем. Рассмотрены также операторные нестационарные уравнения

О. А. Ладыженская

**1384. Смешанные краевые задачи для уравнений, содержащих первую производную по времени, и приближенный метод их решения. Вишик М. И.,** Докл. АН СССР, 1954, **99**, № 2, 189—192

В цилиндрической области $Q = D \times (0 < t < l)$, где $D$ — ограниченная область в $E^n$ с границей Г, рассматриваются системы дифференциальных уравнений вида

$$Lu \equiv A_r\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t} + B_s\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x_i}\right)u = h(x,\ t), \tag{1}$$

где $A_r$ и $B_s$ — линейные дифференциальные операторы порядков $r$ и $s$; $u = (u_1, \ldots, u_N)$, $h = (h_1, \ldots, h_N)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Частными случаями таких систем являются уравнения типа

$$L_1 u \equiv u_t + Cu = h, \tag{2}$$

где $C$ — сильно эллиптической оператор, и параболические уравнения

$$L_2 u \equiv u_t - L_3 u = h, \quad u|_\Gamma = 0. \tag{3}$$

Для уравнений типа (2) и (3) вводятся обобщенные решения краевой задачи (в смысле удовлетворения интегральным тождествам) так, что их существование сравнительно просто выводится различными методами (например, аналогом метода Галеркина) на основании лишь неравенств,

$$\int_D u_t^2\,dx < c, \tag{4}$$

$$\int_D u^2 dx + \int_0^t \int_D u_{x_i}^2 dx\,dt < c, \tag{5}$$

получаемых из равенства $\int_0^t \int_D u_t L_1 u\,dx\,dt = \int_0^t \int_D h u_t dx\,dt$ для уравнений (2) и равенства $\iint uL_2 u\,dx\,dt = \iint h u dx dt$ для уравнений (3).

Автор выделяет из (1) ряд систем, для которых имеют место неравенства типа (4) или (5) и для которых тем самым обобщенное решение может быть определено и получено так же, как для уравнений (2) и (3). Автор рассматривает эти системы как с однородными, так и с неоднородными граничными условиями и доказывает сходимость аналога метода Галеркина О. А. Ладыженская

**1385. Об одной системе уравнений в частных производных смешанного типа. Кикнадзе З. А.,** Сообщ. АН Груз ССР, 1954, **15**, № 6, 321—325

Рассматривается система уравнений смешанного типа

$$v_x + u_y \operatorname{sign} y = 0, \quad v_y - u_x = 0. \tag{1}$$

Пусть $D$ — область, ограниченная гладкой дугой Жордана $\sigma$ (лежащей в полуплоскости $y > 0$) с концами в точках $A(0, 0)$, $A(1, 0)$ и характеристиками $L_1\{x + y = 0\}$, $L_2\{x - y = 1\}$ системы (1).

Изучается задача: определить функции $u$, $v$, которые непрерывны в $\overline{D}$, в $D$ при $y \neq 0$ являются решениями (1), причем $u$ принимает заданные значения на $\sigma$ и на $L_1$. Рассмотрен также случай, когда на $\sigma$ задана $v$, а на $L_1$ задана $u$.

Примечание референта. Имеются опечатки. В системе (1) $u$ и $v$ переставлены ролями, что не соответствует дальнейшему изложению. На стр. 324 вместо $u = f$ на $\sigma$ должно быть $v = f$ на $\sigma$. В формуле (20) вместо $v_1 = t$ должно быть $v_1 = f(t)$. А. В. Бицадзе

**1386. Замечания о теоремах единственности для дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа со смешанными краевыми условиями. Ди Джорджи** (Osservazioni relative ai teoremi di unicità per le equazioni differenziali a derivate parziali di tipo ellittico, con condizioni al contorno di tipo misto. De Giorgi Ennio) Ricerche mat., 1953 (1954), 2 183—191 (итал.)

Основные результаты работы представляют интерес в связи с вопросом единственности решений смешанной краевой задачи для эллиптических уравнений (см. Fichera, Ann. Scuola norm. super Pisa (3), 1949, 1, 75—100). Автор строит в полуокружности $D = \{x^2 + y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0\}$ непрерывную функцию, которая гармонична внутри $D$, имеет ограниченный интеграл Дирихле и удовлетворяет условиям: $(i)$ $u = 0$ на полуокружности $x^2 + y^2 = 1$, $(ii)$ на части $D_2$ границы $D$, где $y = 0$, существует множество нулевой меры $N$ такое, что $u_x$ и $u_y$ непрерывны в $D - N$, а $u_y = 0$ в $D_2 - N$. L. Nirenberg

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 7, 628.

**1387. Устойчивость тонких упругих пластинок, покрывающих произвольную односвязную область, при естественных граничных условиях. Цицика** (Stability of thin elastic plates covering an arbitrary simply connected region and subject to any admissible boundary conditions. Zizicas G. A.), J. Appl. Mech., 1953, **20**, № 1, 23—29 (англ.)

Излагается приближенный способ нахождения критической нагрузки тонкой упругой (вообще говоря, анизотропной) пластинки, для чего, как известно (см. например, Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М.— Л., 1946), нужно найти наименьшее положительное собственное значение некоторого дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка относительно прогиба $w$, при определенных граничных условиях $G_1(w)=G_2(w)=0$. Строится полная система $\{f_i\}$ частных решений упомянутого дифференциального уравнения (при построении $f_i$ граничные условия не принимаются во внимание). Положив $w_n=\sum_{i=1}^{n} c_i f_i$, $c_i=$ $=\text{const}$, из условия

$$\int [G_1(w_n)]^2\,ds+\Lambda\int [G_2(w_n)]^2\,ds=\min$$

(интеграл берется по границе, $\Lambda>0$) автор получает для $c_i$ однородную систему линейных алгебраических уравнений, детерминант которой должен равняться нулю; это дает уравнение для приближенного нахождения собственных значений. Г. Ф. Манджавидзе

**1388. Решение линеаризированных уравнений нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области. Киселев А. А.,** Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 1, 43—46
См. РЖМех, 1955, 6169.

**1389 К. Преобразование Лапласа и интегрирование дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа. Халлер** (Laplacesche Integraltransformation und Integration partieller Differentialgleichungen vom parabolischen Typus. Haller Jacob), Zürich, Art. Institut Orell Füssli A. G., 1953, 49 S. (нем.)

Рассматривается линейное самосопряженное дифференциальное выражение эллиптического типа, определенное в односвязной или многосвязной трехмерной области $D$:

$$Lu\equiv\sum_{i,k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+au.$$

На поверхности $S$, ограничивающей $D$, определена обобщенная нормальная производная

$$\delta u=-\sum_{i,k=1}^{3}\cos(n,\,x_i)\,a_{ik}\partial u/\partial x_k.$$

Показано, что решение краевой задачи

$$LU(x,t)-\partial U(x,t)/\partial t=f(x,t),\ \lim_{t\to 0}U(x,t)=U_0(x),\qquad(1)$$

$$\gamma\delta U(s,\,t)-h(s)\,U(s,\,t)=0,$$

где $x\in D$, $s\in S$, $0\leqslant t<\infty$, $\gamma=0$ или 1, представляется интегралом Меллина

$$U(x,\,t)=(2\pi i)^{-1}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{\lambda t}u(x,\,\lambda)\,d\lambda,\qquad(2)$$

где $u(x,\,\lambda)$ — решение задачи

$$Lu(x,\,\lambda)-\lambda u(x,\,\lambda)=-U_0(x)+\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}f(x,t)\,dt,\qquad(3)$$

$$\gamma\delta u(s,\,\lambda)-h(s)\,u(s,\,\lambda)=0,$$

полученной из (1) в результате применения преобразования Лапласа. В (2) $\sigma$ больше, чем наибольшее из собственных значений задачи (3).

Доказательство проводится путем непосредственного исследования функции (2) и опирается на выведенные автором асимптотические оценки поведения $u(x,\lambda)$ при $|\lambda|\to\infty$. М. И. Клиот-Дашинский

**1390 К. О классификации дифференциальных уравнений в частных производных. Курант** (On the classification of partial differential equations. Courant R.) Scientific papers presented to Max Born. New York, N. Y., Hafner Publishing Co. Inc., 1953, pp. 29—32, 2.50 doll. (англ.)

Автор объясняет, как можно семилинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных, записанную в матричной форме: $U_y=AU_x+B$, привести к виду: $V_y=A'V_x+B'$, где $A'$ имеет нормальную жорданову форму, и как «ящики», т. е. матрицы вдоль главной диагонали в нормальной форме, использовать для классификации уравнения. D. L. Bernstein

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 1, 39.

## ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

**1391. Об одном классе динамических задач, сводящихся к теории релейных систем. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р.,** Прикл. матем. и механика, 1955, **19**, № 2, 222—224

Обращается внимание на то, что задача определения периодического режима в динамической системе, содержащей нелинейный элемент с характеристикой вида $f(x)=rx+\operatorname{sign}x$, сводится к задаче теории релейных систем, т. е. к задаче того же вида, что и выше, но при $r=0$. Я. З. Цыпкин

**1392. Преобразование временной характеристики в частотную для линейных сервосистем. Ч. 2. Ладбрук** (Step to frequency response transforms for linear servo systems. Part 2. Ludbrook L. C.), Electronic Engng, 1954, **26**, № 312, 51—55 (англ.)

На примерах проверяется приближенный метод, разработанный в части 1 (РЖМат, 1955, 255). Рассматривается динамическая система, описываемая обыкновенным линейным неоднородным дифференциальным уравнением; уравнение неизвестно, но задан графиком интеграл его в случае, когда в правой части стоит единичная функция Хевисайда; ищется частное решение этого уравнения, соответствующее вынужденным колебаниям, в случае когда в правой части стоит синусоидальная функция. Рассматриваются как простейшие случаи, когда при функции Хевисайда в правой части решением уравнения являются функции $Kt$, $Kt^n$, $Ke^{-rt}$, $1-\cos\beta t$ и т. д., так и более сложные случаи, соответствующие исследованию процессов в высокочастотных и полосовых фильтрах, в низкочастотных фильтрах и т. д. Автор находит, что предложенный метод удобно применять в случаях, когда заданный графиком интеграл уравнения имеет не более двух максимумов; достаточная точность получается тогда при аппроксимации графика четырьмя отрезками прямых. М. А. Айзерман

**1393. Замечания к статье Е. П. Попова «Приближенное исследование автоколебаний и вынужденных колебаний нелинейных систем». Айзерман М. А, Смирнова И. М.** Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1954, № 10, 185—191

Указывается, что Е. П. Попов применяет принцип гармонического баланса Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова (РЖМат, 1955, 4451), не предполагая, что система близка к линейной, и для суждения о локальной устойчивости обосновывает возможность применения метода гармонического баланса не наличием малого параметра, а фильтрующими свойствами линейной части системы. Как известно, фильтрующие свойства линейной части системы, обеспечивающие близость колебаний к гармоническим даже при отсутствии в

уравнениях движения малого параметра, вообще говоря, не обеспечивают возможности постулировать те же свойства процесса установления, что и наличие малого параметра. В связи с этим применение метода гармонического баланса к исследованию устойчивости периодических решений в системах автоматического регулирования не может быть обоснована только фильтрующими свойствами линейной части контура. Приводится пример, опровергающий возможность использования полученного Е. П. Поповым критерия устойчивости. К статье приложен ответ Е. П. Попова, где он соглашается с рядом замечаний авторов и вносит исправления в нечеткие формулировки.

Ю. А. Митропольский

1394. **Частотный анализ счетно-решающих устройств.** **Боксер** (Frequency analysis of computer systems. Boxer Rubin), Proc. I. R. E., 1955, **43**, № 2, 228—229 (англ.)

Кратко излагаются известные методы построения передаточных функций для динамических линейных систем импульсного действия. Задача сводится к построению преобразований Лапласа ступенчатых функций и решается обычными приемами. Новых результатов нет.

Примечание референта. См. также Цыпкин Я. З. Переходные и установившиеся процессы в импульсных системах, Госэнергоиздат, 1951.

М. А. Айзерман

1395. **О влиянии настройки параметров автомата на автоколебания системы регулирования. Черможская Л. Н.,** Уч. зап. МГУ, 1954, вып. 172, Механика, 5, 191—205

Исследуется система автоматического регулирования третьего порядка с нелинейной характеристикой сервомотора и с функцией управления, зависящей от второй и первой производных регулируемого сигнала и от регулируемого сигнала. Автор определяет условия устойчивости автоколебаний, применяя метод осреднения коэффициентов возмущенного движения.

В работе развиваются исследования Б. В. Булгакова, посвященные указанному вопросу. (Прикл. матем. и механика, 1942, **6**, 263—280, № 4, 1943, **7**, № 2, 97—108; 1946, **10**, 273—290, 313—332) Г. М. Уланов

1396. **Некоторые геометрические свойства корневых годографов. Реза** (Some geometrical properties of the «Root Locus» curve. Reza F. M.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 159 (англ.)

Утверждается, что предложенный Эвансом (W. R. Evans) метод корневых годографов позволяет находить смещения корней характеристического уравнения системы при изменении коэффициента усиления. Этот метод обобщается в свете работ Гаусса, Лукаса, Дарбу и др. Рассматриваются геометрические свойства годографов. Устанавливается зависимость формы корневого годографа от устойчивости сервосистемы и течения ее переходного процесса. И. М. Смирнова

1397. **Вынужденные колебания импульсно-самовозбужденных систем. Аймерих** (Oscillazioni forzate di sistemi autosostenuti impulsivamente. Aymerich G.), Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1952, **22**, 109—116 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Гармонические колебания осциллятора Рокарда, которые определяются уравнениями

$$\dot{x} = -\varepsilon f(x) + y, \quad \dot{y} = -\omega^2 x + A \sin \omega_1 t,$$
$$f(x) = 2\omega [x - x_0 \operatorname{sgn} x],$$

где $A$ и $\omega - \omega_1$ являются величинами порядка малого параметра $\varepsilon$, изучаются методами Крылова — Боголюбова. Рассматривается также устойчивость решений.

J. L. Massera

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 8, 707.

1398. **О вынужденных колебаниях в электрической цепи, содержащей катушку с железным сердечником. Коломбо** (Sulle oscillazioni forzate di un circuito comprendente una bobina a nucleo di ferro. Colombo Giuseppe), Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1954, **23**, № 2, 407—421 (итал.)

Рассматривается уравнение

$$L(\dot{x})\ddot{x} + R\dot{x} + x/C = E(t) \qquad (1)$$

колебаний в цепи, состоящей из источника переменного напряжения $E(t)$ с периодом $2T$, сопротивления $R$, емкости $C$ и самоиндукции $L(\dot{x})$, зависящей от силы тока $\dot{x}$. Доказывается существование решения с минимальным периодом $6T$ в случаях, когда: 1) $L(\dot{x}) = L_1$ при $|\dot{x}| \leqslant I_s$, $L(\dot{x}) = L_2$ при $|\dot{x}| > I_s$, $E(t) = (-1)^m E$ при $mT \leqslant t < (m+1)T$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, постоянные $R$, $C$, $L_1$, $L_2$, $E$, $T$, $I_s$ связаны некоторыми неравенствами; 2) функции $L(\dot{x})$ и $E(t)$ мало отличаются от функций, указанных в 1) (точной оценки не дано). Указывается, что (1) имеет также решение с периодом $2T$.

А. Ф. Филиппов

1399. **Об одном аналитическом методе исследования автоматически управляемого движения. Шотлендер** (Über eine analytische Methode zur Untersuchung automatisch gesteuerter Bewegungen. Schottlaender Stefan), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 170—171 (нем.)

Некоторые разработанные ранее графические методы исследования движения систем с одной степенью свободы поддаются аналитической трактовке. При этом более точно определяются число возможных периодических движений и их период в зависимости от параметров управляющего устройства и область перехода от линейной системы к нелинейной (и наоборот). Можно также определить границы области, в которой движение в течение длительного промежутка времени линейно (или нелинейно), и пределы изменения времени, в течение которого протекает движение. Указывается на возможность решения подобных вопросов с привлечением топологических методов — для систем с двумя и более степенями свободы, для которых графические методы неприменимы. Доказательства и формулировки теорем отсутствуют. И. М. Смирнова

1400. **Об устойчивости периодических движений одной системы автоматического регулирования. Литвин-Седой М. З.,** Уч. зап. МГУ, 1954, вып. 172, Механика, 5, 163—176

Рассматривается плоское движение одной колебательной (механической) системы, подверженной действию сервоуправления с нелинейной характеристикой сервомотора, которая берется в виде, данном Б. В. Булгаковым. Для возмущенного движения системы, находящейся в режиме периодических колебаний, составляется уравнение в вариациях. Условия асимптотической устойчивости периодического режима (которые определяют отрицательность характеристических показателей уравнений в вариациях) исследуются методами малого параметра. Эти условия в работе находятся в виде алгебраических выражений достаточно сложной структуры. Автор приходит к важному заключению о том, что приближенная оценка условий устойчивости колебаний по методу осреднения коэффициентов совпадает с точностью до множителя с условиями устойчивости, полученными при помощи теории харак-

теристических показателей (Булгаков Б. В., Литвин-Седой, Автомат. и телемеханика, 1949, **10**, № 5, 329—341). Г. М. Уланов

**1401. Элементарное доказательство единственности потока в ламинарном пограничном слое с потенциальным течением $U=u_1x^m$ ($m\geqslant 0$) при наличии отсасывания и выдувания.** **И г л и ш** (Elementarer Beweis für die Eindeutigkeit der Strömung in der laminaren Grenzschicht zur Potentialströmung $U = u_1x^m$ mit $m \geqslant 0$ bei Absaugen und Ausblasen. I g l i s c h R u d o l f), Z. angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 12, 441—443 (нем.; резюме англ., франц. русс.)

Доказывается единственность течения вдоль плоского бесконечного клина с углом раствора $\beta\pi$ ($\beta\geqslant 0$) в ламинарном пограничном слое вязкой несжимаемой жидкости. Скорость потенциального течения $U = u_1x^m$, $m = \beta/(2-\beta)$. Задача сводится к единственности решения уравнения

$$f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0$$

с граничными условиями: $f(0) = C$, $f'(0) = 0$, $f'(\infty) = 1$, $C > 0$ при отсасывании, $C < 0$ при выдувании. При условии $f'(\eta) > 0$ при $\eta > 0$ (отсутствие обратного течения), доказывается единственность решения эквивалентной граничной задачи:

$$F(F\dot{F}) + fF\dot{F} + \beta(1 - F^2) = 0, \quad F(C) = 0, \quad F(\infty) = 1,$$

где $F(f) = f'(\eta)$, $\dot{F} = dF/df$, $0 < F(f) < 1$ при $C < f < \infty$. Доказательство основано на оценках знаков производных $F$. Д. Е. Долидзе

**1402. Существование уединенной волны. Фридрихс, Хайерс** (The existence of solitary waves. F r i e d r i c h s K. O., H y e r s D. H.), Communs Pure and Appl. Math., 1954, **7**, № 3, 517—550 (англ.)

Теории уединенной волны посвящены исследования Буссинеска, (Boussinesq J.), Релея (Rayleigh), Келлера (Keller J. B., Communs Pure and Appl. Math., 1948, **1**, 323—329) и др. Первое строгое доказательство существования уединенной волны дано М. А. Лаврентьевым. (Тр. Матем. ин-та АН УССР, 1946). Автор дает новое доказательство существования уединенной волны и приближенные формулы для вычисления ее параметров.

В переменных Леви-Чивитта (см., например, Сретенский Л. Н., Теория волнового движения жидкости, М.— Л, 1937) исследование уединенной волны сводится к следующей краевой задаче для аналитической функции $w(\chi) = \theta + i\tau$, где $\chi = \varphi + i\psi$:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\psi} = e^{-3\tau}\sin\theta \text{ при } \psi = 1,\ \theta = 0 \text{ при } \psi = 0, \quad (1)$$

если $\varphi \to \pm\infty$, то $\theta \to 0$, $\tau \to a^2$, где $a^2 = -\frac{1}{3}\ln gh\,U^{-2}$, $h$ — глубина, а $U$ — скорость течения жидкости.

В § 3 строится приближенное решение (1) в виде рядов

$$\tau = a^2\tau_1(\hat{\varphi}, \psi) + a^4\tau_2(\hat{\varphi}, \psi) + \ldots,$$
$$\theta = a^3\theta_1(\hat{\varphi}, \psi) + a^5\theta_2(\hat{\varphi}, \psi) + \ldots,$$

где $\hat{\varphi} = a\varphi$. Если ограничиться первыми слагаемыми, то получаются новые (и более точные) приближенные формулы для профиля волны: $y = 1 + 3a^2\operatorname{sech}^2 3ax/2$.

В § 4 рассматривается линейная задача, в которой первое из условий (1) заменено условием: $\partial\theta/\partial\psi = f(\varphi) + \theta$. Для этой задачи строится функция Грина, через которую выражается в явном виде оператор $\Omega$:

$$w = \Omega f + ia^2. \quad (2)$$

В § 5 исследуется основное нелинейное интегральное уравнение задачи, которое получается из (2), если положить $f = e^{-3\tau}\sin\theta - \theta$. Показывается, что для удовлетворения асимптотическим условиям, необходимо найти решение этого интегрального уравнения, удовлетворяющее дополнительному условию

$$\Gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi} f(\hat{\theta}, \hat{\tau}, a)\, d\hat{\varphi} = 0. \quad (3)$$

Находятся решения (2) при $a = 0$: $\omega_1 = \theta_1 + i\tau_1$, где

$$\tau_1 = 1 - 3\operatorname{sech}^2 3\hat{\varphi}/2, \quad \theta_1'(\hat{\varphi}) = -\tau_1'(\hat{\varphi}). \quad (4)$$

В § 6 вводятся банаховы пространства $B_1$, $B_2$ и $B$. $B_1$ — множество непрерывных нечетных функций $\theta(\varphi)$ таких, что $e^{2\varphi}\theta(\varphi)$ остается ограниченным для всех $\varphi \geqslant 0$, $\|\theta\| = \sup_{0\leqslant\varphi<\infty} e^{2\varphi}|\theta(\varphi)|$. $B_2$ — соответственно множество четных функций с такой же метрикой, $\omega = \{\theta, t\} \in B$, если $\theta \in B_1$ и $t \in B_2$. Доказывается, что (2) можно рассматривать как уравнение в $B$:

$$G(\omega, a) = 0, \quad (5)$$

решение которого удовлетворяет (3) и $\omega \in B$.

§ 7 посвящен доказательству основной теоремы существования решения (5), удовлетворяющего условию (3). Кажется, что, основываясь на решении (4) для уравнения (5) при $a = 0$, можно применить метод итераций. Однако авторы показывают, что благодаря необходимости удовлетворить дополнительному условию (3), процесс итераций, в общем случае, не будет сходящимся. Поэтому рассматривается вариационное уравнение

$$\delta G(\omega_1, 0, \delta\omega) = \delta\zeta, \quad (6)$$

где $\omega_1 = \{\theta_1, \tau_1\}$, $\delta G(\omega, a, \delta\omega)$ — дифференциал Фреше оператора $G$, $\delta\zeta$ — произвольный элемент из $B$. Доказывается существование линейного ограниченного оператора $K$ такого, что решение (6) имеет вид: $\delta\omega = K\delta\zeta - c\nu_1$, где $\nu = \{-u_1'(\varphi), u_1(\varphi)\}$, $\nu \in B$, $u_1$ — решение уравнения $y'' - 9\tau_1 y = 0$ при условии $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$. Пользуясь (6), уравнение (5) можно представить в виде

$$\xi = KH(a) + KR(\xi, a) - c\nu, \quad (7)$$

где $\xi = \omega - \omega_1$; $H(a) = G(\omega_1, 0) - G(\omega_1, a)$, $R(\xi, a) = \delta G(\omega_1, 0) - G(\omega_1 + \xi, a) + G(\omega_1, a)$. Существование решения $\xi(c)$ уравнения (7), эквивалентного (5), доказывается методом сжатых отображений. Показывается, что можно выбрать параметр $c(a)$ таким образом, чтобы решение (5) $\omega = \omega_1 + \xi[c(a)]$ удовлетворяло условию (3). При этом $c \to 0$ когда $a \to 0$. Таким образом доказана теорема: Для достаточно малых положительных $a$ существует симметричная уединенная волна. Это значит, что симметричная волна существует лишь тогда, когда $U^2 > gh$. Библ. 11 назв. Н. Н. Моисеев

**1403. Вычисление суточного хода температуры моря по суммарной радиации и температуре воздуха. К о л е с н и к о в А. Г., П и в о в а р о в А. А.,** Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 2, 261—264

Для отклонений $t_1(z, \tau)$ и $t_2(z, \tau)$ температур моря и приводного слоя атмосферы от их среднесуточных значений при некоторых упрощающих предпосылках (в частности, распространение тепла по вертикали: в море — турбулентным обменом и потоком лучистой энергии, в атмосфере — только турбулентным обменом и т. д.) устанавливаются уравнения

$$\frac{\partial t_1}{\partial\tau} = k_1\frac{\partial^2 t_1}{\partial z^2} + \sum_{m=1}^{\nu}\frac{1 - A_m}{c_1\rho_1}\beta_m J_m(\tau)\, e^{-\beta_m z},$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau} = k_2 \frac{\partial}{\partial z}\left\{(1+\mu z)\frac{\partial t_2}{\partial z}\right\}$$

и граничные условия

$$t_1(0,\ \tau) = t_2(0,\ \tau),$$

$$c_1\rho_1 k_1 \left(\frac{\partial t_1}{\partial z}\right)_{z=0} - c_2\rho_2 k_2 \left(\frac{\partial t_2}{\partial t}\right)_{z=0} = \varphi(\tau) - a_и t_1(0,\ \tau)$$

(равенство температур и полный тепловой баланс на поверхности моря), где $k_i$, $c_i$, $\rho_i$, $A_m$, $\beta_m$ и $a_и$ — известные постоянные, $J_m(\tau)$ — поток лучистой энергии, приходящийся на долю $m$-го участка спектра, $\varphi(\tau)$ — функция, учитывающая теплообмен на поверхности раздела. Задача решается в предположении установившихся суточных колебаний температуры, вследствие чего принимается, что

$$J_m(\tau) = \sum_{m=1}^{\nu} \{A^J_{m,n}\cos n\omega\tau + B^J_{m,n}\sin n\omega\tau\},$$

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=1}^{j} \{A^\varphi_n \cos n\omega\tau + B^\varphi_n \sin n\omega\tau\}.$$

Периодическое решение для $t_1$ ищется в виде

$$t_1(z,\ \tau) = \sum_{m=1}^{\nu} U_m(\tau)\, e^{-\beta_m z} + U(z,\ \tau),$$

$$U_m(\tau) = \frac{1-A_m}{c_1\rho_1}\beta_m \sum_{n=1}^{j} C^J_{m,n}\ \sin(n\omega\tau - \varepsilon_{m,n} - \delta_{m,n}),$$

где постоянные $C^J_{m,n}$, $\varepsilon_{m,n}$, $\delta_{m,n}$ выражаются через параметры задачи, а

$$U(z,\ \tau) = \sum_{n=1}^{j} \mathrm{Re}\,\{C_{1n}\exp[(1-i)\sqrt{n\omega/2k_1}z - in\omega\tau]\}.$$

Аналогично $t_2(z,\ \tau) = \sum_{n=1}^{j} \mathrm{Re}\,\{V_{2n}(z)\, e^{-in\omega\tau}\}$, где $V_{2n}(z)$ выражается через функции Ганкеля. Решение это связывается с функцией

$$f(\tau) = t_2(h,\ \tau) = \sum_{n=1}^{j} \{A^f_n \cos n\omega\tau + B^f_n \sin n\omega\tau\},$$

которая предполагается приближенно известной. Отсюда по наблюдениям хода отклонений температуры воздуха на высоте $h$ над уровнем моря можно делать заключения о температуре моря. В. И. Левин

**1404. Равновесие трансверсально-изотропного упругого полупространства.** Ху Хай-чан (On the equilibrium of a transversely isotropic elastic half space, Hu Hai-Chang), 中國科學 (Чжунго кэсюэ — Scientia Sinica), 1954, **3**, № 4, 463—479 (англ.)

Напряжения и перемещения в упругом полупространстве, обладающем трансверсальной изотропией, выражены через две функции $F$ и $\varphi$, удовлетворяющие уравнениям:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{s_1^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{s_2^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)F = 0$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{s_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Здесь $s_0$, $s_1$, $s_2$ — параметры, выражающиеся через упругие постоянные материала. Решен ряд задач, когда на границе полупространства заданы: а) нормальная нагрузка (при отсутствии касательной), б) касательная нагрузка (при отсутствии нормальной), в) перемещения, г) нормальная нагрузка и касательное смещение, д) касательная нагрузка и нормальное смещение. Задача сводится к отысканию некоторых гармонических функций при помощи решения граничных задач теории потенциала для полупространства. Рассмотрены также задачи о жестком штампе и об изгибе упругой тонкой плиты, лежащей на упругом полупространстве. Я. С. Уфлянд

**1405. Об одном классе точных решений уравнений Ляме в цилиндрических координатах.** Цай А. Г. Докл. АН УзССР, 1954, № 12, 3—8 (Рез. узб.)

Рассматриваются два типа частных решений уравнений статики теории упругости в цилиндрических координатах. В первом типе радиальное $u_r$, тангенциальное $u_\varphi$ и осевое $u_z$ перемещения задаются в виде

$$u_r = e^{kz}\cos(n\varphi+\alpha)R_r,\ u_\varphi = e^{kz}\sin(n\varphi+\alpha)R_\varphi,$$
$$u_z = e^{kz}\cos(n\varphi+\alpha)R_z, \qquad (1)$$

где $k$, $n$, $\alpha$ — произвольные параметры, а $R_r$, $R_\varphi$ и $R_z$ — функции одной переменной $r$.

Во втором типе решений перемещения отыскиваются в форме

$$u_r = \cos(n\varphi+\alpha)\cos(kz+\beta)R_r,\ u_\varphi = \sin(n\varphi+\alpha)\cos(kz+\beta)R_\varphi,$$
$$u_z = \cos(n\varphi+\alpha)\sin(kz+\beta)R_z. \qquad (2)$$

Функции $R_r$, $R_\varphi$ и $R_z$ определяются из систем 3 обыкновенных дифференциальных уравнений, которые для случаев (1) и (2) различаются лишь знаками у некоторых коэффициентов. Решение этих систем уравнений выражаются в явном виде через цилиндрические функции. К. В. Соляник-Красса

**1406. К задаче обтекания профиля околозвуковым потоком.** Крючин А. Ф, Прикл. матем. и механика, 1954, **18**, № 5, 547—560

Решается смешанная задача для уравнения

$$y\partial^2 z/\partial x^2 + \partial^2 z/\partial y^2 = 0 \qquad (1)$$

путем разложения решения в ряд частных решений уравнения (1) и приближенного удовлетворения граничным условиям.

В конце приводится график результата вычисления расстояния ударной волны до носка клина единичной длины в зависимости от критерия околозвукового подобия $\Lambda = 2(1-M_\infty)/[(\varkappa+1)\theta]^{2/3}$, где $\theta$—полуугол раствора клина, $\varkappa$ — показатель адиабаты.

Примечание референта. Этот численный результат не вызывает доверия, так как автор указывает, что расчет проведен им при $n=4$ и $m=10$. Но при аппроксимации решения линейной комбинацией из $n$ частных решений ранг матрицы коэффициентов системы (3.13) не может быть больше $n$. Поэтому для однозначного определения чисел $b_k/b_0$ $(k=1,\ldots,m-1)$ из системы (3.13) в ней должно быть не более $n$ неизвестных, так что необходимо $m-1\leqslant n$. Л. В. Овсянников

**1407. Доказательство полноты характеристических векторных полей теории волноводов.** Хейн (Beweis der Vollständigkeitsrelation für die charakteristischen Vektorfelder der Hohlleitertheorie. Heyn Eugen), Math. Nachr., 1955, **13**, № 1—2, 25—56 (нем.)

Рассматривается $N$-связная плоская область $G$ с границей $\Gamma$ и совокупность $\mathscr{N}$ векторных полей (вектор-функций) $\{C_x,\ C_y\}$ с интегрируемым квадратом. Скалярное произведение полей $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ определяется интегралом

$$\iint_G (C_x D_x + C_y D_y)\,dxdy = \iint_G (\mathbf{C},\ \mathbf{D})\,dxdy. \qquad (1)$$

Строится система характеристических векторных полей следующим образом. Решаются краевые задачи: $\Delta\Phi + \lambda\Phi = 0$, $\Phi = 0$ на $\Gamma$, $\Delta\Psi + \mu\Psi = 0$, $\partial\Psi/\partial n = 0$ на $\Gamma$, $\Delta X = 0$, $X$ постоянна на каждой из связных частей границы $\Gamma$. Пусть $\lambda_i = k_i'^2$ и $\mu_i = k_i''^2$ — собственные значения первой и второй задач, $\xi$ и $\eta$ — единичные векторы осей $x$ и $y$; положим

$$e_i' = -\frac{1}{k_i'}\left(\xi\frac{\partial\Phi_i}{\partial x} + \eta\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\right);\quad h_i' = \frac{1}{k_i'}\left(\xi\frac{\partial\Phi_i}{\partial y} - \eta\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\right);$$

$$e_i'' = \frac{1}{k_i''}\left(-\xi\frac{\partial\Psi_i}{\partial y} + \eta\frac{\partial\Psi_i}{\partial x}\right);\quad h_i'' = -\frac{1}{k_i''}\left(\xi\frac{\partial\Psi_i}{\partial x} + \eta\frac{\partial\Psi_i}{\partial y}\right);$$

$$e_i''' = \xi\frac{\partial X_i}{\partial x} + \eta\frac{\partial X_i}{\partial y};\quad h_i''' = -\xi\frac{\partial X_i}{\partial y} + \eta\frac{\partial X_i}{\partial x}.$$

Легко проверяется, что $(e_\nu', e_\mu') = (e_\nu'', e_\mu'') = \delta_{\mu\nu}$, $(e_\nu', e_\mu'') = (e_\nu', e_\mu''') = (e_\nu'', e_\mu''') = 0$. Линейно-независимых вектор-функций $e_i'''$ $(h_i''')$ будет конечное число: именно $N - 1$. Выберем их ортонормированными.

Основная теорема состоит в том, что совокупность полей $\{e_\mu', e_\nu'', e_\sigma'''\}$ образует полную ортонормированную систему. То же верно для полей $h$. Идея доказательства чрезвычайно проста и основана на последовательном применении формулы Грина к интегралу (1), выражающему условие ортогональности произвольной вектор-функции к функциям системы. Однако, поскольку рассматривается случай весьма общих областей с негладкой границей, автору приходится пользоваться вариационными методами (точнее простейшими методами функционального анализа, см. Курант, Гильберт, Методы математической физики, гл. 7, Гостехиздат, 1951). Нужные ему результаты и определения этой главы автор формулирует в § 2.

В приложении II выводятся уравнения распространения волн в тороидальном волноводе, полученном вращением плоской области $G$ вокруг оси, лежащей в ее плоскости. Положение точки $M$ внутри волновода характеризуется координатами $x$, $y$, определяющими положение $M$ в сечении, проходящем через ось вращения, и длиной дуги параллели $z$, соединяющей $M$ с соответствующей точкой фиксированного нулевого сечения. Поля **E** и **H** разлагаются по полной системе (соответственно $\{e\}$ и $\{h\}$) характеристических полей для области $G$. При этом уравнения Максвелла для полей **E** и **H** переходят в систему обыкновенных дифференциальных (по $z$) уравнений для коэффициентов Фурье этого разложения. В конце статьи выписаны соответствующие уравнения для случая цилиндрического волновода. Э. Э. Шноль

**1408. Гидродинамика. Новые достижения в теории струй. Сарантонелло** (Hirgodinamica. Recientes avances en la teoria de fronteras libres. Zarantonello E. H.), 2° symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América, Villavicencio — Mendoza, julio 1954, Montevideo, Centro coop. cient., UNESCO América Latina, 1954, 113—128 (исп.)

Обзор результатов в задаче об обтекании со срывом струй. Рассматриваются общие теоремы существования и единственности и методы эффективного построения решений. Задача разбирается в классической постановке, при которой задаются условия обтекания на участке границы тела и условия постоянства давления на поверхности струй. Приводятся нелинейное интегральное уравнение Вилла и его видоизменение и теоремы существования, полученные применением метода Шаудера — Лерэя к соответствующим интегральным уравнениям. Излагаются вариационный принцип Рябушинского (Riabouchinsky D., C. r. Acad. sci., 1927, 185, 850—851) и его применение для доказательства существования струйного обтекания в пространственных и плоских задачах.

Указывается, что задача обтекания со срывом струй может иметь неединственное решение. Формулируется теорема сравнения Лаврентьева (Матем. сб., 1938, 46, 391—458) и указываются теоремы единственности, из нее вытекающие, а также приводятся обобщенные теоремы сравнения (Serrin J., Amer. J. Math., 1952, 74, 492—506; Gilbarg D., J. Rational Mech. and Analysis, 1952, 1, 309—320; 1953, 2, 233—251). Рассматриваются метод последовательных приближений Некрасова решения соответствующих интегральных уравнений и метод автора, основанный на том, что решение ищется в виде тригонометрического многочлена, удовлетворяющего уравнению в нескольких точках. К получаемой системе нелинейных алгебраических уравнений применяется видоизменение метода последовательных приближений. Описываются различные расчеты, проделанные на электронных вычислительных машинах. Библ. 31 назв. С. Г. Крейн

**1409 Д. Методы приближенного решения одной пространственной задачи теории фильтрации (задача о несовершенной скважине). Алихашкин Я. И.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т точной механ. и вычисл. техн. АН СССР, М., 1955

---

**См. также:** 918, 941, 1048, 1116, 1117, 1157, 1289, 1299, 1301, 1306, 1437, 1500, 1501, 1504 **К**, 1567, 1616, 1668, 1669, 1670, 1671, 1672, 1674, 1675, 1685 **К**

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**1410. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Крейн М. Г.**, Докл. АН СССР, 1955, 100, № 3, 413—416

Приводится формула, выражающая непрерывное решение уравнения

$$\int_0^a K(x, s)\,\varphi(s)\,ds - \mu\varphi(x) = f(x) \qquad (1)$$

(для любого $a$ в интервале $0 < a < A$) при произвольной непрерывной функции $f(x)$ через решения $g(x, u)$ и $g^*(x, u)$ вспомогательных уравнений вида (1) с ядрами $K(x, s)$ и $K^*(x, s) = K(s, x)$ при правой части $f(x) \equiv 1$; интервал интегрирования для вспомогательных уравнений переменный: $0 \leqslant s \leqslant u$, причем $u$ меняется в интервале $0 \leqslant u \leqslant a$. Предполагается, что к уравнению (1) для всех рассматриваемых значений $a$ применима обычная теория Фредгольма, $\mu \neq 0$ и однородное уравнение, соответствующее (1), для любого $a$ $(0 < a < A)$ не имеет решений, отличных от тривиального.

Аналогичная формула дается для уравнения

$$\int_{-a}^{a} H(|x - s|)\,\varphi(s)\,ds - \mu\varphi(x) = f(x), \qquad (2)$$

где $H(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2A)$ — измеримая функция, суммируемая в каждом интервале $(0, 2a)$ при $0 < a < 2A$. Эта формула сохраняет силу при $\mu = 0$ и дает единственное интегрируемое решение уравнения (2) с $\mu = 0$, если $H(x)$ имеет вид

$$H(x) = F(x) + \begin{cases} c \ln x, \\ cx^{-h}, \end{cases} \quad 0 < h < 1,$$

где $F(x)$ имеет абсолютно непрерывную первую производную; при этом предполагается еще, что $f(x)$ имеет абсолютно непрерывную вторую производную.
Л. А. Чудов

**1411. Интегральные уравнения Фредгольма, для которых функции, обратные решениям, также являются решениями.** Пеннисси (Fredholm integral equations, the reciprocals of whose solutions are also solutions. Pennisi L. L.), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 2, 113—115 (англ.)

Доказывается следующая теорема. Пусть $C$ есть измеримое множество $n$-мерного пространства Евклида; $K(x, y)$ — вещественная функция $\in L_2(C, C)$. Пусть интегральное уравнение Фредгольма

$$u(x) = \int_C K(x, y)\, u(y)\, dy \qquad (1)$$

обладает свойствами: а) существует такое вещественное решение $u_0(x) \in L_2(C)$, что $1/u_0(x) \in L_2(C)$; б) если $u(x) \in L_2(C)$ есть решение и $1/u(x) \in L_2(C)$, то $1/u(x)$ есть также решение; в) если $u(x) \in L_2(C)$ — решение, то существует такое постоянное число $b$, что $1/[b + u(x)] \in L_2(C)$. Тогда существуют положительное целое число $m$ и измеримые множества $C_0, C_1, \ldots, C_m$ такие, что 1) $C = \sum_{j=0}^{m} C_j$; 2) $\operatorname{mes} C_0 = \operatorname{mes} C_i C_j = 0$ при $i \neq j$; $\operatorname{mes} C_j \neq 0$ при $j \neq 0$; 3) функции

$$\varphi(x, C_j) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in C_j \\ 0 \text{ при } x \notin C_j \end{cases} \quad (j = 1, \ldots, m)$$

образуют полную систему линейно-независимых решений уравнения (1).
Я. В. Быков

**1412. Об одном интегральном уравнении, ядро которого является аналитической функцией параметра.** Касимов Д. М., Тр. Азерб. ун-та, серия физ.-матем., 1954, № 4, 47—60 (резюме азерб.)

Рассматривается интегральное уравнение

$$\varphi(x, \lambda) - \int_a^b K(x, y; \lambda)\, \varphi(y, \lambda)\, dy = f(x), \qquad (1)$$

где

$$K(x, y; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n K_n(x, y),$$

причем $|f(x)| < P$, $|K_n(x, y)| < \mu$. Предполагается, что единица не является собственным значением ядра $K_0(x, y)$, так что существует резольвента $R_0(x, y)$ ядра $K_0(x, y)$, причем $|R_0(x, y)| < M$. Решение уравнения (1) ищется в форме

$$\varphi(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \varphi_n(x). \qquad (2)$$

Для функций $\varphi_n(x)$ получается бесконечная система рекуррентных интегральных уравнений:

$$\varphi_0(x) - \int_a^b K_0(x, y)\, \varphi_0(y)\, dy = f(x); \qquad (3)$$

$$\varphi_n(x) - \int_a^b K_0(x, y)\, \varphi_n(y)\, dy = \int_a^b \Big\{ \sum_{s=0}^{n-1} K_{n-s}(x, y) \varphi_s(y) \Big\} dy.$$

Решение (3) имеет вид:

$$\varphi_0(x) = f(x) + \int_a^b R_0(x, y)\, f(y)\, dy;$$

$$\varphi_n(x) = \sum_{s=0}^{n-1} \int_a^b [K_{n-s}(x, y) + \int_a^b R_0(x, \xi)\, K_{n-s}(\xi, y)\, d\xi]\, \varphi_s(y)\, dy.$$

При этом: $|\varphi_0(x)| \leqslant P[1 + M(b-a)]$;

$$|\varphi_n(x)| \leqslant \mu[1 + M(b-a)] \sum_{s=0}^{n-1} \int_a^b |\varphi_s(y)|\, dy.$$

Если обозначить $\max\{P, \mu(b-a), M(b-a)\} = \delta$, то ряд (2) будет сходиться при $|\lambda - \lambda_0| < (1+\delta)^{-2}$. Методами автора легко установить, что если $K(x, y; \lambda)$ — целая функция параметра $\lambda$, то ряд (2) сходится при любом $\lambda$ и представляет целую функцию параметра $\lambda$.
Ю. Л. Рабинович

**1413. Решение некоторых интегральных уравнений Вольтерра при помощи разложения в ряды.** Думитреску (Asupra rezolvării unor ecuaţii integrale Volterra prin dezvoltări în serie. Dumitrescu Eugeniu), Gaz. mat. şi fiz., 1954, A6, № 12, 542—545 (рум.)

Дается решение интегральных уравнений вида

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x N(x, y)\, \varphi(y)\, dy + f(x),$$

где $N(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j$, при помощи разложения в степенные ряды, причем предполагается, что $f(x)$ разлагается в степенной ряд. Ядро $N(x, y)$ преобразуется к виду

$$N(x, y) = \sum_{j=0}^{m} \gamma_j(x) \frac{(x-y)^i}{i!},$$

где $\gamma_j(x)$ — многочлен степени не выше $m+n$. Решение ищется методом неопределенных коэффициентов в виде степенного ряда $\sum_{i=0}^{\infty} (c_i x^i / i!)$. Сходимость получаемых рядов не исследуется. Работа содержит ряд опечаток.

Примечание референта. Л. Н. Сретенский (Матем. сб., 1931, 38, № 1—2, 1—44) прилагал метод неопределенных коэффициентов к решению и исследованию уравнений Вольтерра при значительно более общих предположениях, причем доказал сходимость полученных степенных рядов в комплексной плоскости.
Б. М. Гагаев

**1414. О перенесении альтернативы Фредгольма на алгебраические интегральные уравнения.** Шмейдлер, Моргенштерн (Zur Übertragung des Alternativsatzes der Fredholmschen Theorie auf algebraische Integralgleichungen. Schmeidler Werner, Morgenstern Dietrich), Arch. Math., 1954, 5, № 4—6, 452—457 (нем.)

Пусть

$$P(z, y) \equiv z^n(s) - R_n(z, y) - \sum_{\beta=0}^{n-1} R_\beta(z, y), \qquad (1)$$

где $R_\beta(z, y) = \sum_{\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu=\beta} z^\alpha(s) \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(s, t_1, \ldots, t_\nu) \times$

$\times\, y^{\alpha_1}(t_1) \ldots y^{\alpha_\nu}(t_\nu)\, dt_1 \ldots dt_\nu$; $\beta = 0, \ldots, n$; $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$; $K_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(s, t_1, \ldots, t_\nu)$ — вещественны и непрерывны; $K_{n0\ldots0}(s, t_1, \ldots, t_\nu) \equiv 0$. $P_0(z, y) \equiv z^n - R_n(z, y)$. Дискриминанты полиномов от $z$ $P(z, y)$ и $P_0(z, y)$ обозначим соответственно через $D = D(y)$ и $D_0 = D_0(y)$. Предполагается, что: а) для любой вещественной и непрерывной на $[0, 1]$ функции $y(s) \not\equiv 0$ $D_0(y) \neq 0$ для всех значений $s$; б) $D(y)$ не обращается в нуль для всех непрерывных функций $y(s)$, в том числе и для $y(s) \equiv 0$; в) уравнение $P(z, 0) = 0$ имеет по крайней

мере одно вещественное решение. Ограничения а) и б) авторы называют условием дискриминанта для $P(z, y)$, в) — условием вещественности.

В работе сформулирована теорема: Если для $P(z, y)$ выполнены условия дискриминанта и вещественности, то 1) либо однородное уравнение $P_0(y, y) = 0$ имеет нетривиальное решение, 2) либо уравнение $P(y, y) = 0$ имеет непрерывное решение, не обязательно вещественное, для любого выбора функций $R_0, R_1, \ldots, R_{n-1}$ в согласии с условиями дискриминанта и вещественности.

Когда однородное уравнение $P_0(y, y) = 0$ не имеет отличного от нуля непрерывного решения, существование непрерывного решения уравнения $P(y, y) = 0$ доказывается при дополнительном ограничении: уравнение $P_0(\mu y, y) = 0$ при вещественном $\mu$ может иметь решение $y(s) \not\equiv 0$ только для $\mu < 1$. Можно построить примеры алгебраических интегральных уравнений, для которых: α) выполнены условия дискриминанта и вещественности; β) уравнение $P_0(y, y) = 0$ имеет нетривиальное непрерывное решение $y_1(s)$; γ) уравнение $P(y, y) = 0$ имеет непрерывное решение $y_2(s)$. Этим условиям, например, удовлетворяет

$$P(z, y) \equiv z^4(s) - \left(\frac{5}{4}\right)^4 \frac{(s+1)}{(2^{5/4}-1)^4} \int_0^1 \ldots \int_0^1 y(t_1)\ldots y(t_4)\,dt_1 \ldots dt_4 -$$

$$- (s+1) \int_0^1 \int_0^1 y(t_1)\, y(t_2)\, dt_1\, dt_2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 (2^{5/4}-1)^2 (s+1).$$

$$y_1(s) = (1+s)^{1/4};\ y_2(s) = i\,(1+s)^{1/4}.$$

Я. В. Быков

**1415. Использование формальных свойств импульсных функций $\delta_+$ и $\delta_-$ для изучения уравнения Винера — Хопфа.** Н а м и а с (Utilisation des propriétés formelles des fonctions impulsives $\delta_+$ et $\delta_-$ pour la discussion de l'équation de Wiener-Hopf. N a m i a s V.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, **41**, № 4, 435—440 (франц.)

Продолжение работы, написанной автором совместно с Лафлёром (РЖМат, 1955, 5859). В настоящей работе с помощью теории вычетов вычисляются выражения, полученные прежде в качестве решений уравнения Винера — Хопфа. Л. А. Дикий

**1416. Связь между характеристическими и особыми значениями линейных интегральных уравнений.** Ч ж а н Ш и - с ю н ь (A relation between characteristic values and singular values of linear integral equations. C h a n g S h i h - H s u n), 中國科學 (Чжунго кэсюэ — Scientia Sinica), 1954, **3**, № 3, 237—245 (англ.)

Английский перевод статьи автора (РЖМат, 1954, 5141).

**1417. Интегральные уравнения плоских динамических задач теории упругости.** Х р и с т о ф о р о в В. В., Тр. ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1954, вып. 13, 93—102

Преобразованием Лапласа автор приводит динамические уравнения Ляме для плоского случая к виду

$$\mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\bar{u} = \bar{f} - a\ddot{\bar{u}},$$

а затем, рассматривая правую часть как массовую силу, методом, аналогичным тому, который был применен референтом в трехмерном случае (Докл. АН СССР, 1951, **76**, № 4), на основании свойств плоских статических потенциалов, изученных им (РЖМех, 1955, 1457), строит интегральные уравнения в области изображений для первой и второй внутренних задач плоской теории упругости. И. С. Аржаных

---

См. также: 1271, 1272, 1329, 1342, 1359, 1379, 1402, 1479

## ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

**1418. К вариационному исчислению.** Б л я ш к е (Zur Variationsrechnung. B l a s c h k e W i l h e l m), Istanbul üniv. fen fak. mec., 1954, **A19**, № 2, 106—107 (нем.; резюме турец.)

Ставится задача нахождения функций $F(x_1; x_2; dx_1, dx_2)$, где

$$F(x_1, x_2; c\,dx_1, c\,dx_2) = cF(x_1\, x_2; dx_1, dx_2)\ (c > 0), \quad (1)$$

выражающих время распространения возмущения в точке $(x_1, x_2)$ к точке $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$, причем элементарные волны должны быть кругами. С этой целью рассматривается вариационная задача на плоскости с основным интегралом

$$T = \int F(x_1, x_2; dx_1/dt, dx_2/dt)\,dt,$$

где $F$ удовлетворяет условию (1). На экстремалях, проходящих через точку $p$, от $p$ откладываются дуги одинаковой длины $T = pq = r$; конечные точки $q$ описывают «$T$-круги» $K(p, r)$. Синьорини (A. Signorini) поставил вопрос, относящийся к вариационным задачам, о том, чтобы все «$T$-круги» были кругами и в смысле Евклида: $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = b^2$. Преобразования, относящие точкам $p$ «$T$-круги» $K(p, r)$, образуют в смысле Ли однопараметрическую группу $B(r)$ преобразований соприкосновения с аддитивным параметром $r$. В рассматриваемом случае преобразования $B(r)$ обладают свойством переводить трехпараметрическое семейство кругов опять в круги. Все такие преобразования соприкосновения по Ли могут быть истолкованы следующим образом:

Рассматриваются в пространстве $R_3$ с метрикой $ds^2 = da_1^2 + da_2^2 - db^2$ конформные (сохраняющие углы) отображения. Они переводят по Лиувиллю сферы из $R_3$ друг в друга и образуют по Ли десятипараметрическую группу $G_{10}$. Если $G_1$ — какая-нибудь однопараметрическая подгруппа $G_{10}$, не переводящая плоскость $b = 0$ в себя и имеющая $r$ в качестве аддитивного параметра, то ей соответствует вариационная задача желаемого вида, причем так возникают все такие задачи. Таким образом, поставленный вопрос сводится к известной задаче нахождения подгруппы $G_1$ в $G_{10}$. Распространение на измерения выше чем два не встречает трудностей. Г. И. Жотиков

**1419. Об одной изопериметрической задаче.** П у ч ч и (A proposito di un problema isoperimetrico. P u c c i C a r l o), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, **17**, № 6, 345—346 (итал.)

Рассматривается изопериметрическая задача: Среди всех тел с данным основанием и объемом, имеющих вертикальную плоскость симметрии и подобные горизонтальные сечения, найти тело с наименьшей поверхностью. Эта задача связана с практическим вопросом о форме подводной части корабля при заданных палубе

и тоннаже, имеющего наименьшее сопротивление движению (оно пропорционально площади поверхности подводной части).

Устанавливается существование и единственность решения задачи. Показывается, что отыскание формы тела с наименьшей поверхностью сводится к решению задачи Коши для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка.

Выводится соотношение между периметром основания $L$, объемом тела $D$, площадью основания $\sigma$ и площадью поверхности тела $F$: $3LD = 2\sigma F$.

А. В. Погорелов

**1420. Вариационная задача с неголономными условиями. Погосов Г. С.,** Сб. статей Всес. заоч. политехн. ин-та, 1955, № 9, 70—83

Рассматривая вариационную задачу об экстремуме интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)\, dt$$

при наличии связей $f_i(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = 0$ $(i = 1, \ldots, r < n)$, автор утверждает, что в случае неголономности связей метод множителей Лагранжа дает неправильные уравнения, и предлагает взамен свои уравнения (системы (4), (14) и (18)), выведенные при гипотезе некоммутативности операций дифференцирования и варьирования (см. формулы (9)—(11) статьи). Точка зрения автора явно ошибочна, так как она противоречит самому смыслу вариации. Уравнения автора неверны. И. С. Аржаных

**1421 Д. Гомологии однородных пространств и их приложение к вариационному исчислению в целом. Альбер С. И.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Н.-и. ин-т матем. и механ., М., 1955

---

См. также: 1359, 1481, 1637

## АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

**1422. О неравенствах, удовлетворяемых выражениями, члены которых имеют чередующиеся знаки. Бернацкий** (Sur des inégalités remplies par des expressions dont les termes ont des signes alternés. Biernacki Mieczyslaw), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1953, A7, 89—102 (журнал вышел из печати в 1954 г.) (франц.)

Доказываются неравенства, аналогичные некоторым классическим неравенствам, но содержащие альтернирующие суммы при некоторых дополнительных условиях на абсолютные величины членов. Так (обобщение неравенства Чебышева), имеет место теорема 1: Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n > 0$ и $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, причем последовательность $\varepsilon_i$ разбивается на чередующиеся группы положительных и отрицательных единиц такие, что первая группа состоит из $+1$ и каждая группа, состоящая из $-1$, содержит не больше членов, чем предшествующая группа $+1$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i b_i \geqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i b_i.$$

Теорема III: В тех же предпосылках относительно $a_i, b_i, \ldots, k_i$ при $p > 1$

$$(a_1 + b_1 + \ldots + k_1)^p - (a_2 + b_2 + \ldots + k_2)^p + \ldots$$
$$\ldots \pm (a_n + b_n + \ldots + k_n)^p \geqslant (a_1^p - a_2^p + \ldots \pm a_n^p) +$$
$$+ (b_1^p - b_2^p + \ldots \pm b_n^p) + \ldots + (k_1^p - k_2^p + \ldots \pm k_n^p);$$

при $0 < p < 1$ знак неравенства должен быть изменен на обратный.

Теорема V. Если $\varphi(u)$ — функция, возрастающая и выпуклая для $u > 0$, $\varphi(0) = 0$, и $(a_i > b_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$,— система интервалов оси $u$, обладающая тем свойством, что никакая точка оси не принадлежит более чем $p$ этим интервалам, то

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \leqslant K(\varphi, p) \sum_{i=1}^{n} \{\varphi(b_i) - \varphi(a_i)\},$$

где

$$K(\varphi, p) \leqslant \sup_{u>0} \frac{pu}{\varphi^{-1}\{p\varphi(u)\}} \leqslant p.$$

Формулируется также ряд аналогичных неравенств, имеющих приложения в вопросах математической физики (оценки емкостей и т. п.) (Weinberger H., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1952, 38, 611—613). В. И. Левин

**1423. Об одном обобщении гауссова арифметико-геометрического среднего и о соответствующей последовательности систем $n$ чисел. Титце** (Über eine Verallgemeinerung des Gauss'schen arithmetisch-geometrischen Mittels und die zugehörige Folge von Zahlen-$n$-tupeln. Tietze Heinrich), Sitzungsber. Math.-naturwiss. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1952, 191—195 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Из $n$ положительных чисел $x_1^{(0)} \geqslant \ldots \geqslant x_n^{(0)}$, $x_1^{(0)} > x_n^{(0)}$, взятием $n$ элементарных симметрических средних (первое из которых — среднее арифметическое, а последнее — среднее геометрическое) получаются числа $x_1^{(1)} > \ldots > x_n^{(1)}$. Повторение этого процесса приводит к единственному предельному значению, сводящемуся к гауссову арифметико-геометрическому среднему в случае $n = 2$. С другой стороны, значения $x_j^{(0)}$ легко могут быть получены из определяемых ими значений $x_j^{(1)}$. Автор ставит вопрос, можно ли этот процесс продолжить и дальше в обратном направлении, т. е. обязательно ли произвольному множеству $n$ положительных чисел $x_j^{(0)}$, из которых не все равны друг другу, соответствует множество положительных чисел $x_j^{(-1)}$, для которых $x_j^{(0)}$ являются упомянутыми элементарными симметрическими средними. Для $n = 2$ он дает непосредственный утвердительный ответ, а для $n = 3$ он строит контр-пример.

В заключение автор ставит вопрос, существует ли при $n \geqslant 3$ хотя бы одно множество, которое можно продолжать до бесконечности в обратную сторону.

E. F. Beckenbach

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 4, 294.

**1424. Периодические восходящие цепные дроби. Фаринья** (Periodic ascending continued fractions. Farinha João), Revista Fac. Ci. Univ. Coimbra, 1953, 22, 110—113 (португ.)

Автор показывает, что если $|a_i| > 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то $k$-периодическая восходящая цепная дробь

$$\overset{\infty}{\underset{1}{\Phi}} a_i \diagdown b_i = \cfrac{b_1 + \cfrac{b_2 + \ddots}{a_2}}{a_1}$$

сходится к значению $R_k B_k [B_k - 1]^{-1}$, где $R_k = \Phi_1^k a_i \diagdown b_i$, $B_k = a_1 a_2 \ldots a_k$. H. S. Wall

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 1, 29.

**1425. Восходящие и нисходящие дроби в алгоритме непрерывных дробей с дифференциальными элементами. Пуч - Адам** (Reducidas ascendentes y reducidas descendentes en el algoritmo de las fracciones continuas de elementos diferenciales. Puig Adam P.), Rev. Real. acad. cienc. exact., fis. y natur., Madrid, 1954, 48, № 1, 11—22 (исп.)

Пусть $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ и $K(x)$ — интегралы от $a$ до $x$ соответственно от функций $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ и $k(x)$, интегрируемых на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на $n$ частичных интервалов точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_i \ldots < x_n = b$ и обозначим через

$$\underset{a}{\overset{b}{\left| \begin{matrix} f, & h \\ g, & k \end{matrix} \right|}} C \quad (C \text{ — постоянная величина})$$

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \left\{ \Delta F(x_0) + \frac{1 + \Delta H(x_0)\,|}{|\,\Delta G(x_0)} + \frac{1 + \Delta K(x_0)\,|}{|\,\Delta F(x_1)} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{1 + \Delta H_{n-1}\,|}{|\,\Delta G(x_{n-1})} + \frac{1 + \Delta K(x_{n-1})\,|}{|\,C} \right\}$$

Выражение $a_0 + \frac{b_1|}{|a_1} + \ldots + \frac{b_n|}{|a_n}$ обозначает непрерывную дробь

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}}$$

Доказывается, что функция

$$\varphi(x) = \underset{x}{\overset{b}{\left| \begin{matrix} f, & h \\ g, & k \end{matrix} \right|}} C$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати $\varphi' = g\varphi^2 + (k - h)\varphi - f$ $\varphi(b) = C$, при этом

$$\underset{x}{\overset{b}{\left| \begin{matrix} g, & k \\ f, & h \end{matrix} \right|}} \frac{1}{C} = 1: \quad \underset{x}{\overset{b}{\left| \begin{matrix} f, & h \\ g, & k \end{matrix} \right|}} C.$$

Приводится система дифференциальных уравнений для функций $p$, $q$, $r$, $s$, $P$ и $Q$, $R$, $S$, которые получаются, если перейти к пределу при $\Delta x_i \to 0$ в соотношениях:

$$\left.\begin{aligned} \frac{p_i}{q_i} &= \Delta F(x_i) + \frac{1 + \Delta H(x_i)\,|}{|\,\Delta G(x_i)} + \frac{1 + \Delta K(x_i)\,|}{|\,\Delta F(x_{i+1})} + \ldots + \frac{1 + \Delta K(x_{n-1})\,|}{|\,C} \\ \frac{r_i}{s_i} &= \Delta G(x_i) + \frac{1 + \Delta K(x)\,|}{|\,\Delta F(x_{i+1})} + \ldots + \frac{1 + \Delta K(x_{n-1})\,|}{|\,C} \end{aligned}\right\}$$

(восходящие дроби),

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_i}{Q_i} &= \Delta F(x_0) + \frac{1\Delta + H(x_0)\,|}{|\,\Delta G(x_0)} + \ldots + \frac{1 + \Delta H(x_{i-1})\,|}{|\,\Delta G(x_{i-1})} + \frac{1 + \Delta K(x_{i-1})\,|}{|\,\Delta F(x_i)} \\ \frac{R_i}{S_i} &= \Delta F(x_0)| + \frac{1 + \Delta H(x_0)\,|}{|\,\Delta G(x_0)} + \ldots + \frac{1 + \Delta K(x_{i-2})\,|}{|\,\Delta F(x_{i-1})} + \frac{1 + \Delta H(x_{i-1})\,|}{|\,\Delta G(x_{i-1})} \end{aligned}\right\}$$

(нисходящие дроби).

Одним из первых интегралов системы дифференциальных уравнений будет

$$RQ - PS = e^{H(x) + K(x)}.$$

Дается указание на электротехническое истолкование восходящих и нисходящих дробей. Э. Апарисио

**1426. Числа Бернулли в теории коммутаторов. Тоскано** (I numeri di Bernoulli nella teoria degli scarti dalla permutabilità. Toscano Letterio), Archimede, 1954, **6**, № 6, 254—257 (итал.)

Через $(HK)$ обозначается коммутатор операторов $H$ и $K$: $(HK) = HK - KH$. Устанавливается соотношение

$$mKH^{m-1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{m-1} \left[ \binom{m}{k} \beta_k \sum_{i=k+1}^{m} H^{i-k+1} (HK)^{(k)} H^{m-i} \right], \quad (1)$$

где коэффициенты $\beta_k$ — числа Бернулли, а $(HK)^{(k)}$ определяются рекуррентно:

$$(HK)^{(k)} = H(HK)^{(k-1)} - (HK)^{(k-1)}H; \quad (HK)^{(0)} = K.$$

Из (1) для линейных операторов $A$ и $X$, обладающих тем свойством, что $(AX)$ есть тождественный оператор, выводятся равенства

$$m^2 A^{m-1} X^{m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i i! \binom{m}{i}^2 \beta_i W_{m-i}, \quad (2)$$

$$m^2 X^{m-1} A^{m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} i! \binom{m}{i}^2 \beta_i W_{m-i}, \quad (3)$$

через $W_n$ обозначен оператор $A^n X^n - X^n A^n$.

Из формул (1), (2), (3) выводится ряд соотношений, используемых как в теории операторов, так и в теории чисел Бернулли. Так, принимая в (2) и (3) за $A$ операцию дифференцирования по $x$, а за $X$ умножение на $x$ и применяя их к функции 1, приходим к формулам

$$\sum_{i=0}^{m-1} \binom{m}{i} \beta_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m}{i} \beta_i = m.$$

Применение тех же операторов к функции $1/(x - \alpha)$ позволяет из (2) вывести соотношение

$$\sum_{i=0}^{m-1} \binom{m}{i} \beta_i (x^{m-i} - \alpha^{m-i})(x - \alpha)^{i-1} = m\alpha^{m-1}.$$

Если за $H$ принять операцию умножения на $x$, а за $K$ — оператор, определяемый равенством $Kf(x) = f(x + 1)$, то формула (1) приводит к известному уравнению, которому удовлетворяют полиномы Бернулли:

$$B_m(x + 1) - B_m(x) = m(x + 1)^{m-1}.$$

Положив в (1) $H = xD$ ($D$ — символ дифференцирования по $x$) и $K = x$, автор получает соотношение

$$\sum_{i=0}^{m-i} \binom{m}{i} \beta_i [(Dx)^{m-1} - (xD)^{m-i}] = m(xD)^{m-1}$$

А. Г. Школьник

**1427. Изменение арифметических средних и пределов последовательностей. Танци-Каттабьянки** (Perturbazione media-ereditaria e limit delle successioni. Tanzi Cattabianchi Luigi), Riv. mat. Univ. Parma, 1954, 5, № 1—3, 125—136 (итал.)

Пусть $\{x_n\}$ и $\{\beta_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ — последовательности вещественных чисел, $\beta_n > 0$ и $X_n = (x_0 + \cdots + x_n)/(n+1)$, $v_n = x_n + \beta_n X_n$, $B_n = (\beta_0 + \cdots + \beta_n)/(n+1)$

Доказываются следующие теоремы, частные случаи которых без доказательства дал Виджаяраган (Vijayaraghavan T., J. London Math. Soc., 1928, 3, 130—134):

1. Если $X_n$ меняется монотонно, то из $v_n \to 0$ следует $B_n X_n \to 0$; из ограниченности $\beta_n / B_n$ и $v_n \to 0$ следует $B_n X_n \to 0$ и $x_n \to 0$.

2. Если $\{X_n\}$ — не монотонная последовательность и через $r$ и $s$ обозначаются индексы, для которых $x_r X_r \geqslant 0$, $x_s X_s < 0$ и $R(s) = \max_{r<s} r$, то из $\beta_r > \gamma_r$ ($\gamma$ — постоянное $> 0$) и $v_n \to 0$ следует $nX_n \to 0$, $x_n \to 0$; из ограниченности $\dfrac{\beta_s}{s} \Big/ \dfrac{\beta_{R(s)}}{R(s)}$ и $v_n \to 0$ следует $\beta_n X_n \to 0$, $x_n \to 0$.

3. Если $A\varphi(n) < \beta_n < B\varphi(n)$, где $0 < A < B$ и $\varphi(n)/n$ монотонно не возрастает, то из $v_n \to 0$ следует $\beta_n X_n \to 0$, $x_n \to 0$.

4. Для произвольных $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ существуют последовательности $\{x_n\}$, $\{\beta_n\}$ такие, что $\beta_n > n\varepsilon_n$, $v_n \to 0$, $\overline{\lim} |x_n| = +\infty$. Э. К. Фогелс

**1428. О цепных дробях Приса. Перрон** (Über die Preece'schen Kettenbrüche. Perron Oskar), Sitzungsber. Math.-naturwiss Kl., Bayer. Akad. Wiss., 1953, 21—56 (журнал вышел из печати в 1954 г.) (нем.)

Автор дает метод вычисления некоторых цепных дробей и иллюстрирует этот метод выводом формул Стилтьеса, Роджерса, Рамануджана и Приса. Данная сходящаяся цепная дробь, содержащая параметр $x$ и имеющая значение $F(x)$, преобразуется методом Бауэра — Мюира в новую цепную дробь. Это преобразование выбирается так (если это возможно, а это возможно в рассматриваемых иллюстративных примерах), что: 1) новая цепная дробь сходится к $F(x)$, 2) вид новой цепной дроби требует, чтобы удовлетворялось функциональное соотношение

$$F(x) = \frac{P(x)\,F(x+\gamma) + Q(x)}{P(x)\,F(x+\gamma) + S(x)}.$$

Интегрирование этого функционального соотношения приводит к вычислению исходной цепной дроби.

W. T. Scott

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 1, 29.

**1429. Решение одной комбинаторной задачи. Добровольский М. Н.**, Уч. зап. Тульск. гос. пед. ин-та, 1954, № 5, 190—197

Пусть $2n$ различных элементов разбиты на $n$ пар. Обозначим через $f(n, l)$ количество перестановок этих $2n$ элементов, в которых $l$ парных элементов расположены рядом. Если $l < 0$ или $l > n$, то полагаем, что $f(n, l) = 0$. Устанавливаем, что

$$f(n, l) = \frac{(2n-l-2)!\,n!\,2^l}{l!\,(n-l)!}(n-1)n[1 + B_{l+2} + B_{l+3} + B_{l+4}(1 + B_{l+2}) + B_{l+5}(1 + B_{l+2} + B_{l+3}) + B_{l+6}(1 + B_{l+2} + B_{l+3} + B_{l+4}(1 + B_{l+2})) + \ldots],$$

где $B_l = 2(n-l+1)/(2n-l)(2n-l-1)$ при $l \leqslant n$ и $B_l = 0$ при $l > n$. В конце работы утверждается, что $f(n, l) = 2^n n!\,A_{n,l}$, где $A_{n,l}$ — некоторое целое число.

В. Д. Подсыпанин

**1430. Об $r$-й производной классического многочлена по параметру. Паламà** (Sulla derivata erresima di classici polinomi rispetto ai parametri. Palamà Giuseppe), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, ser. 3, № 4, 401—409 (итал.)

1. При обычном обозначении

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\frac{d^n(x^{\alpha+n}e^{-x})}{dx^n}$$

доказано, что для $r \leqslant n$

$$\frac{\partial^r L_n^{(\alpha)}(x)}{\partial \alpha^r} = r! \sum_{i=0}^{n-r} \frac{(-1)^{n-r-i} h_{n-i,\,r}}{(n-i)!} L_i^{(\alpha)}(x),$$

где $h_{m,r}$ — так называемые числа Стирлинга 1-го рода, определяемые соотношениями

$$h_{m,1} = (-1)^{m-1}(m-1)!, \quad h_{m,m} = 1,$$

$$h_{m,r} = h_{m-1,\,r-1} - (m-1)\,h_{m-1,\,r} \quad (m > r).$$

Установлены рекуррентные формулы

$$x\frac{\partial L_n^{(\alpha+1)}}{\partial \alpha} = (x+\alpha)\frac{\partial L_n^{(\alpha)}}{\partial \alpha} - (\alpha+n)\frac{\partial L_{n-1}^{(\alpha-1)}}{\partial \alpha} + L_{n-1}^{(\alpha)},$$

$$(n+1)\frac{\partial L_{n+1}^{(\alpha)}}{\partial \alpha} = (\alpha+2n+1-x)\frac{\partial L_n^{(\alpha)}}{\partial \alpha} - (\alpha+n)\frac{\partial L_{n-1}^{(\alpha)}}{\partial \alpha} + L_n^{(\alpha-1)}.$$

2. Если, как обычно, $(1-2tx+t^2)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n^{(\nu)}(x)$, то

$$\frac{\partial^r P_n^{(\nu)}(x)}{\partial \nu^r} = (-1)^r r! \sum_{p=r}^{n} \sum_{k=0}^{\gamma} \frac{(-1)^p h_{p-k,\,r}}{k!\,(p-2k)!}(2x)^{p-2k} P_{n-p}^{(\nu)}(x),$$

где $\gamma = \min\left\{\left[\dfrac{p}{2}\right],\ p-r\right\}$. В частности,

$$\frac{\partial P_n^{(\nu)}(\cos\theta)}{\partial \nu} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k\theta}{k} P_{n-k}^{(\nu)}(\cos\theta).$$

3. Доказана следующая общая теорема. Пусть

$$\Phi(x, \alpha, \beta, \ldots, n) = f(x, \alpha, \beta, \ldots, n)\,\varphi_x^{(n)}(x, \alpha, \beta, \ldots, n),$$

Если $\dfrac{\varphi'_\alpha}{\varphi} = -\dfrac{f'_\alpha}{f} = \psi(x, \alpha, \beta, \ldots, n)$, то $\Phi'_\alpha = f \times \sum_{k=1}^{n} C_n^k \psi_x^{(k)} \varphi_x^{(n-k)}$.

С помощью этой теоремы находятся производные (1-го порядка) по параметру от $L_n^{(\alpha)}(x)$, $P_n^{(\nu)}(x)$ и общего многочлена Якоби

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]}{dx^n}.$$

Примечание референта. Формула для $\partial P_n^{(\alpha,\beta)}(x)/\partial\alpha$, установленная в работе, была указана референтом в реферате работы Л. Тоскано (РЖМат, 1954, 5644). И. П Натансон

**1431. К дифференциальному исчислению. I. Якобсталь** (Beiträge zur Differentialrechnung. I. Jacobsthal Ernst), Kgl. norske videnskab. selskabs forhandl., 1954, 27, № 24, 146—150 (нем.)

Рассматривается дробь

$$F(x) = \frac{g(x)}{f(x)},$$

где функции $g(x)$ и $f(x)$ имеют производные достаточно высокого порядка. Вычисление $n$-й производной от $F(x)$ для больших значений $n$ громоздко. Автор ставит своей целью получить сравнительно простую формулу, дающую непосредственное представление $F^{(n)}(x)$ для любого целого $n > 0$. Формула эта имеет следующий вид:

$$f^{n+1}F^{(n)} = \sum_{\rho=0}^{n} (-1)^{\rho} \binom{n+1}{\rho+1} f^{n-\rho} (f^{\rho} g)^{(n)}.$$

Е. П. Калугина

**1432. О применении метода последовательных приближений к определению обратных функций. Жерме** (Sur l'application de la méthode des approximations successives á la détermination des fonctions inverses. Germay R. H.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1954, № 3—4, 106—114 (франц.)

Автор напоминает свой старый результат (Mem. in 8°de la Soc. roy. sci. Liège, 3 ser., 1924, 12): Пусть функции $F_{j,\mu}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ $(j = 1, \ldots, n;\ \mu = 1, 2, \ldots)$ непрерывны вместе со своими первыми производными по $y_1, \ldots, y_n$ в окрестности точки $(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ и равномерно сходятся вместе с этими производными соответственно к $F_j$, $\partial F_j / \partial y_k$. Пусть $(F_{j,\mu})_0 = F_{j,\mu}(x_1^0, \ldots, y_n^0) = 0$,

$$\left(\frac{D(F_{1,\mu}, \ldots, F_{n,\mu})}{D(y_1, \ldots, y_n)}\right)_0 \neq 0, \qquad (1)$$

$$\left(\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}\right)_0 \neq 0.$$

Тогда формулы

$$\varphi_{j,\mu+1}(x_1, \ldots, x_m) = \varphi_{j,\mu}(x_1, \ldots, x_m) - \sum_{s=1}^{n} (\Delta_{\mu+1}^0)_{s,j} F_{s,\mu}(x_1, \ldots, x_m, \varphi_{1\mu}, \ldots, \varphi_{n\mu}),$$

$\varphi_{i,1}(x_1, \ldots, x_n) = y_j^0$ ($(\Delta_{\mu}^0)_{s,j}$ — элементы якобиана, обратного (1)) определяют последовательные приближения для решения $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ системы уравнений $F_j(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $\varphi_i(x^0) = y_j^0$. Этот результат дополняется некоторыми очевидными замечаниями.

Я. Б. Лопатинский

**1433. Интегральные средние. Вота** (Medie integrali. Vota Laura), Univ. e Politecnico Torino. Rend. Sem. Mat., 1953, 12, 283—292 (итал.)

Для данной непрерывной и строго монотонной функции $x = f(t)$ автор определяет интегральное среднее от двух переменных равенствами

$$M(x, x) = x$$

и

$$M(x_1, x_2) = \frac{1}{t_1 - t_2} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt,$$

где $t_j = f^{-1}(x_j)$, $j = 1, 2$, $x_1 \neq x_2$. Рассмотрены свойства этих средних и приведены функции $f(t)$, порождающие арифметическое, геометрическое и гармоническое среднее для двух значений.

E. F. Beckenbach

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 11, 941.

**1434. Теорема о непрерывной зависимости интеграла по замкнутой поверхности от поверхности. Бонончини** (Un teorema di continuità per integrali su superficie chiuse. Bononcini Vittorio E.), Riv. mat. Univ. Parma, 1953, 4, № 4—5, 299—311 (итал.)

Пусть $S_n = (T_n, A)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, — непрерывные отображения квадрата $A$ в $R^3$, причем граница квадрата $A$ каждый раз отображается в точку и $F(S) = (S)\int (f_1 \cdot t_1 + f_2 \cdot t_2 + f_3 \cdot t_3)\, dudv$, где $f_1$, $f_2$, $f_3$ — компоненты вектор-функции, отображающей $A$ в $R^3$; $t_1$, $t_2$, $t_3$ — обобщенные якобианы. Интеграл и якобианы понимаются в смысле Чезари (Cesari L., Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1944, 13, 77—117). Доказывается, что если лебеговы площади поверхностей $T_n$ равномерно ограничены и $T_n \to T_0$, то $F(S_n) \to F(S_0)$.

А. Г. Сигалов

**1435. Теорема о непрерывной зависимости интеграла по замкнутой поверхности от поверхности. Бонончини** (Un teorema di continuità per integrali su superficie chiuse. Bononcini Vittorio E.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 86 (итал.)

Краткое сообщение о результате, установленном в работе автора (см. реф. 1956, 1434). А. Г. Сигалов

**1436. О функциональном уравнении транзитивности. Хоссу** (On the functional equation of transitivity. Hosszú Miklós), Acta scient. math., 1954, 15, № 3—4, 203—208 (англ.)

На множестве $M$ рассматривается операция $z = x * y$, удовлетворяющая уравнению транзитивности

$$(x * t) * (y * t) = x * y.$$

Исследуются свойства этой операции при дополнительном предположении, что из $x * y_1 = x * y_2$ следует $y_1 = y_2$. Показывается существование «правой единицы» $e$ со свойствами $x * e = x$, $x * x = e$ и $e * (y * x) = x * y$. Доказывается, что обратная операция $x = z \circ y$ удовлетворяет обычным групповым аксиомам.

А. Р. Швейтцер (Schweitzer A. R., Bull. Amer. Math. Soc., 1912, 18, 299—302) решил функциональное уравнение транзитивности

$$F[F(x, t), F(y, t)] = F(x, y)$$

в предположении дифференцируемости функции $F$. Автор дает решение этого уравнения, предполагая лишь непрерывность и строгую монотонность $F$ по каждому из переменных. Решение имеет вид $F(x, y) = f^{-1}[f(x) - f(y)]$, где $f(t)$ — непрерывная, строго монотонная функция, и получается как следствие из изложенного результата автора и теоремы Броуэра (Brouwer L. E. J., Math. Ann., 1909, 67, 246—267) о изоморфизме одномерной непрерывной группы группе вещественных чисел по сложению. Автор намечает, кроме того, прямое доказательство, указывая метод построения функции $\varphi(t) = f^{-1}(t)$. В заключение статьи дается решение более общего функционального уравнения $F[G(x, t), H(y, t)] = K(x, y)$ в предположении строгой монотонности и непрерывной дифференцируемости функций $F$, $G$, $H$ и $K$. Г. Н. Чеботарев

**1437. Об одном дифференциальном неравенстве. Бледсо, Норрис, Роз** (On a differential inequality. Bledsoe Woodrow W., Norri-

Michael J., Rose Gene F.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 6, 934—939 (англ.)

Пусть $F$ — столбцовая $n \times 1$-матрица, элементы которой суть функции от $x$ на $[a, b]$: $\theta$ — нулевая матрица, $M$ — функциональная матрица, все элементы которой, кроме диагональных, неотрицательны почти всюду и существенно ограничены сверху; $D^+F$ — верхняя производная справа. Доказываются следующие теоремы:

I. Пусть на сегменте $[a, b]$: 1) $F_2$ — непрерывная и ни один элемент $D^+F_2$ не равен $-\infty$, $F(a) \geqslant \theta$, 2) $D^+F \geqslant MF$ почти всюду. Тогда $F \geqslant \theta$ на $[a, b]$. Здесь $F_2$ означает отрицательную часть матрицы $F$.

II. Пусть на сегменте $[a, b]$: 1) $G$ является решением почти всюду системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка $D^+Y = MY + K$ и притом таким, что $G(a) \leqslant F(a)$; 2) отрицательная часть $(F - G)_2$ непрерывна и ни один элемент $D^+(F - G)_2$ не равен $-\infty$; 3) $D^+F \geqslant MF + K$ почти всюду. Тогда $F \geqslant G$ на $[a, b]$. Здесь $G$ и $Y$ — столбцевые функциональные $n \times 1$-матрицы, а $K$ — столбцевая матрица, элементы которой постоянны.

III. Вместо пункта 2) теоремы II требуется непрерывность $G$ и $F$ на $[a, b]$, при этом ни один элемент $D^+F$ не равен $-\infty$ на $[a, b]$. Тогда снова $F \geqslant G$ на $[a, b]$.

IV. Указываются условия, при осуществлении которых неравенство более общее вида: $D^+F \geqslant G(F, x)$ можно свести к неравенству $D^+F \geqslant MF + G(F(a), x)$.

В. С. Потапов

**1438. Поправка. Фреше** (Rectification. Fréchet M.), Rend. Circolo mat. Palermo, 1953, 2, № 1, 71—72 (франц.)

Автор указывает на ошибку в своей статье (Rend. Circolo mat. Palermo, Ser. II, 1952, 1, № 1, 11—27). Именно, решая уравнение

$$e^X e^Y = e^{X+Y} \qquad (1)$$

в матрицах $X$, $Y$ второго порядка, он считал очевидным следствием этого соотношения коммутативность матриц $e^X$ и $e^Y$, что приводит к потере целого класса решений. На эту ошибку автору указал в письме Какар (G. A. Kalar), в диссертации которого, по словам Фреше, содержится полное решение уравнения (1) в матрицах второго порядка и исследуется случай матриц большего числа измерений. (Ошибку Фреше заметил также Дживенс (Givens W., Math. Rev., 1953, 14, № 3), давший противоречащий пример. *Реф.*). В статье референта (РЖМат, 1955, 2563) также указывается ошибка Фреше и дается полное решение уравнения (1) в матрицах второго порядка. Г. Н. Чеботарев

**1439 К. 800 задач по математике для университетов. Геллерстедт** (800 övningsuppgifter i matematik för universitet och högskolor. (800 problems in mathematics for universities). Gellerstedt Sven. Stockholm, Almqvist and Wiksell, 1954, V+200 pp., 12.50 kr.) (швед.)

**1440 К. Сочинения, т. II. Функции действительного переменного и разложения в ряды, задача Дини — Неймана, аналитические функции. Дини** (Opere. Vol. II. Funzioni di variabile reale e sviluppi in serie—problema di Dini — Neumann — funzioni analitiche. Dini Ulisse. Roma, Edizioni Cremonese, 1954, 509 pp. 4500 Lire.) (итал.)

В этом втором из запланированных трех томов работы сгруппированы следующим образом: работы по функциям действительного переменного; работы о разложениях в ряды по сферическим функциям; работы по разложениям в другие ряды; работы по теории потенциала и по граничным задачам для $\Delta_2 u = F$; работы по теории аналитических функций. Введения к первым трем группам написаны Сансоне и Скорца — Драгони, к четвертой — Пиконе и к последней — Чечони.

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 1, 1.

**1441 К. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Демидович Б. П.,** Изд. 2-е испр. и доп., М., Гостехиздат, 1954, 511 стр., 11 р. 10 к.

Характерная черта задачника в целом — наличие задач и примеров, иллюстрирующих основные определения и теоремы анализа. Отметим в связи с этим отдел I «Введение в анализ», в котором содержатся задачи на вещественные числа, последовательности, пределы и разнообразные задачи на функции, в том числе задачи на функциональные уравнения. Встречаются некоторые неточности формулировок. Отдел II «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» содержит, помимо обычных задач на технику дифференцирования и на ее приложения, некоторое количество теоретических задач на производные, на теоремы Ролля, Лагранжа, Коши, на неравенства и др. Отдел III «Неопределенный интеграл». Отдел IV «Определенный интеграл». Отдел V «Ряды». Отдел VI «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных». Отдел VII посвящен интегралам, зависящим от параметра. Отдел VIII «Кратные и криволинейный интегралы». Последний параграф содержит задачи по векторному анализу.

В данное, 2-е издание задачника было добавлено значительное количество чисто выкладочных задач, но все же задачник полностью сохранил свой первоначальный характер. Ф. В. Широков

**1442 К. Дифференциальное и интегральное исчисления. Лав, Рейнвилл** (Differential and integral calculus. Love E., Rainville D., 5th ed., New York, 1954, 1—526) (англ.)

Книга содержит элементарное изложение основ высшей математики, примерно в объеме курса математического анализа наших технических высших учебных заведений. В нее входят: элементы теории пределов; производная и ее приложения, включая максимум и минимум функций; неопределенный интеграл; определенный интеграл и его геометрические приложения; кривизна плоской кривой; раскрытие неопределенностей; асимптоты прямолинейные и криволинейные; методы приближенного решения уравнений; элементарные несобственные интегралы; некоторые приложения определенного интеграла к механике; ряды, включая степенные; приближенное интегрирование; частные производные; двойные и тройные интегралы; простейшие типы дифференциальных уравнений первого порядка; линейные дифференциальные уравнения; дифференциальные уравнения прямолинейного движения материальной точки (отдельные типы).

Методически книга построена по следующему плану: теория пределов сжата до минимума и излагается, в основном, догматически (в приложении даются доказательства лишь некоторых основных теорем). Весьма быстро вводятся понятия производной (гл. 2, стр. 18) и интеграла (гл. 6, стр. 84), причем вначале соответствующие формулы даются только для простейших алгебраических функций. Далее подробно рассматриваются элементарные трансцендентные функции (тригонометрические, обратные круговые, показательная, логарифмическая, гиперболические) и устанавливаются формулы дифференцирования и интегрирования этих функций. Более трудные приложения определенного интеграла отнесены к концу книги. Большое внимание уделено практическим приложениям.

В книге имеется большое количество подробно решенных задач и приводится около 3900 задач и примеров для самостоятельных упражнений (частично с ответа-

ми). Книга богато иллюстрирована. Даются сводка формул неопределенного интегрирования (72 формулы) и таблицы следующих функций: натуральных логарифмов, показательной, гиперболических, тригонометрических и их десятичных логарифмов, тригонометрических для аргумента, выраженного в радианах. Помещен предметный указатель. Б. П. Демидович

**1443 К. Элементы теории функций. Рей - Пастор** (Elementos de la teoria de funciones. (Elements of the theory of functions). Rey Pastor J., 3rd ed., Madrid — Buenos Aires, Ibero-Americana, 1953, 560 pp.) (исп.)

Эта книга объединяет строгий курс анализа, основы теории функций комплексного переменного, достаточно подробное введение в теорию функций действительного переменного (до интеграла Лебега и далее) и введение в ряды Фурье. Стиль, пожалуй, более сжат, чем обычно в учебниках на английском языке, но автор, очевидно, глубоко продумал изложение материала. Он мастер в искусстве понятного сжатия доказательств и вследствие этого смог изложить много вопросов, зачастую опускаемых в курсах такого рода. Изложение традиционное, но с многочисленными улучшениями в расположении материала и в деталях. Среди большого числа деталей, привлекших внимание референта, отметим особенно прозрачный пример двух функций, не отличающихся на константу, но имеющих всюду совпадающие производные (бесконечные значения допускаются) (стр. 142), и искусный подход к аппроксимации непрерывных функций многочленами (стр. 414). В последней главе рассматривается с некоторой детализацией $R^g$ интеграл автора, определяемый с помощью верхних и нижних римановых сумм при разбиениях на открытые, замкнутые и нуль-множества (вместо интервалов). Абсолютный $R^g$ интеграл совпадает с интегралом Лебега, а условный $R^g$ интеграл (определение которого, повидимому, недостаточно подробно) более широк. R. P. Boas

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 941.

**1444 К. Курс математического анализа (Для втузов). Ч. I. Берман т А. Ф.**, Изд. 8-е, стереотип., М., Гостехиздат, 1955, 467 стр. с черт., 10 р. 15 к.

## ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

**1445. *K*-матрицы, которые не суммируют ограниченные расходящиеся последовательности. Коппинг** (*K*-matrices which sum no bounded divergent sequence. Coppling J.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 1, 123—127 (англ.)

Матрица $A=(a_{nk})$ называется $K_r$-матрицей, если $\sup_n \Sigma_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$. Если же матрица преобразует любую сходящуюся последовательность в сходящуюся последовательность, то она называется $K$-матрицей. Доказывается теорема: если $K$-матрица $A$ имеет левостороннюю обратную матрицу, которая является $K_r$-матрицей, то $A$ не суммирует ограниченные расходящиеся последовательности. Указываются некоторые приложения этой теоремы. Для того чтобы нормальная матрица $A$ суммировала расходящиеся последовательности, очевидно, необходимо, чтобы ее двусторонняя обратная матрица $B$ не являлась $T$-матрицей. Отмечая это условие, автор без основания утверждает, что из него вытекает следующее: если $A$ есть $T$-матрица, а $B$ есть $K_r$-матрица, то $A$ не суммирует ограниченные расходящиеся последовательности. В. М. Даревский

**1446. О расходящихся рядах. Заманский** (Sur les séries divergentes. Zamansky Marc), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 24, 2291—2293 (франц.)

Излагается общий метод получения теорем включения и теорем эквивалентности для методов суммирования. Этот метод применяется к средним Нёрлунда $N$ и средним $N^*$. Средние $N^*$ определяются следующим образом. Пусть $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ — непрерывные положительные функции, $\varphi(x)=0$ для $x<0$, $\varphi(+\infty)=+\infty$. Для ряда $\Sigma_{k=1}^{\infty} u_k$ полагаем:

$$N_t^*(\varphi)=\sum_{k\leqslant t}\left[1-\frac{\varphi(k)}{\varphi(t)}\right]u_k.$$

М. Д. Калашников

**1447. Теоремы о произведении двух методов суммирования с приложениями. Раджагопал** (Theorems on the product of two summability methods with applications. Rajagopal C. T.), J. Indian Math. Soc., 1954, **18**, № 3, 89—105 (англ.)

Пусть $A$, $B$ — регулярные методы суммирования последовательностей (или функций). Последовательность $\{s_n\}$ (или функция $s(t)$) суммируема $AB$, если ее $A$-трансформация суммируема $A$. Доказывается:

1. Пусть $A$, $B$ — регулярные методы суммирования последовательностей. Из суммируемости $A$ последовательности $\{s_n\}$ следует ее суммируемость $AB$, если $B$ — регулярный метод Хаусдорфа, а $A$ — регулярное преобразование при помощи степенных рядов

$$A\{s_n, x\}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n s_n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n}, \quad p_n\geqslant 0,\ 0<x<\rho<\infty,$$

где $\rho$ — радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} p_n \rho^n=\infty$ и суммируемость $A\{s_n\}$ к $S$ определяется равенством $A\{s_n x\}\to S$ при $x\to\rho-0$. При этом предполагается, что для всех $u$, $0<u<1$,

$$A_u\{s_n x\}\equiv\frac{1}{f(x)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x-ux)}{n!}x^n u^n s_n, \quad 0<x<\rho,$$

сходится, $A_u\{s_n x\}\ll F(x)$, $0<x<\rho$, $A_u\{s_n x\}\to S$ при $x\to\rho-0$, $|A_u\{s_n x\}|\leqslant M$ ($M$ — постоянная).

2. Пусть $A$, $B$ — регулярные методы суммирования функций $s(x)$, измеримых по Борелю в каждом конечном интервале $x\geqslant 0$. Из суммируемости $A$ $s(x)$ следует ее суммируемость $AB$, если $B$ — регулярное непрерывное преобразование Хаусдорфа, а $B$ — регулярное интегральное преобразование

$$A\{s(t), x\}=t\int_0^{\infty}\psi(xt)s(x)\,dx, \quad t>0,$$

где $\psi(x)$ — положительная монотонно возрастающая функция $x>0$ и суммируемость $s(x)$ к $S$ определяется равенством $A\{s(x), t\}\to S$ при $t\to+0$. При этом предполагается, что $A\{s(x), t\}$ абсолютно сходится для всех $t>0$ и $|A\{s(x), t\}|\leqslant M$ для $0<t<\infty$. Даны приложения полученных результатов к интегральным преобразованиям функций и рядов.

М. Д. Калашников

**1448. Обобщение абелева метода суммирования для интегралов. Ватанабе** (Eine Verallgemeinerung des Abelschen Limitierungsverfahren bei Integralen. Watanabe Yoshikatsu), J. Gakugei, Tokushima Univ., 1954, **4**, 21—29 (нем.)

Упор делается больше на примеры, чем на формулировки теорем. Предполагается, что $s(x)=\int_a^x f(u)\,du$,

$g(u)$ — вещественная положительная монотонная функция $\to\infty$ при $u\to\infty$ и

$$A(\lambda, g)=\int_a^\infty e^{-\lambda g(u)} f(u)\,du=\lambda\int_a^\infty e^{-\lambda g(x)} g(u)\,s(u)\,du.$$

Автор изучает влияние различного выбора $g(u)$ на поведение $A(\lambda, g)$ при $\lambda\to 0$ по вещественным положительным значениям и при $\lambda\to 0$ внутри секторов, лежащих в полуплоскости, в которой вещественная часть $\lambda$ положительна. R. P. Agnew

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 8, 698.

**1449. О свойстве переносимости для обобщенных методов суммирования Чезаро и Абеля для интегралов.** Ватанабе (Über die Verträglichkeit-Eigenschaft der gewissermassen erweiterten Cesàroschen und Abelschen Limitierungsverfahren bei Integralen. Watanabe Yoshikatsu), J. Gakugei, Tokushima Univ., 1954, 4, 30—38 (нем.)

Сохраняя обозначение предыдущего реферата, предположим, что

$$C_k(x, g)=k\int_a^x\left(1-\frac{g(u)}{g(x)}\right)^{k-1}\frac{g'(u)}{g(x)}\,s(u)\,du=$$
$$=\int_a^x\left(1-\frac{g(u)}{g(x)}\right)^{k} f(u)\,du.$$

Приведен класс функций $g(u)$ такой, что $\lim_{x\to\infty} C_1(x, g)$ существует для каждой функции этого класса, всякий раз когда он существует для $g(u)=u$. Приведен и другой класс такой, что этот предел существует для каждой функции этого класса тогда и только тогда, когда он существует для $g(u)=u$. Показано, что если $\lim_{x\to\infty} C_k(x, g)=L$, то $\lim_{\lambda\to 0} A(\lambda, g)=L$. R. P. Agnew

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 8, 699.

**1450. О $C$-суммировании бесконечных рядов.** Юртсевер (Über die $C$-Summierbarkeit der unendlichen Reihen. Yurtsever Berki), Communications Fac. Sci. Univ. Ankara. Sér. A., 1953, 5, 1—11 (нем.; резюме турец.)

Пусть $A$ — линейный метод для суммирования последовательности $s_n$, ряд $\Sigma a_n$ суммируем $A$, если последовательность $s_n$ частных сумм суммируема $A$. Формула Абеля частного суммирования

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k=s_n b_{n+1}+\sum_{k=0}^n s_k(b_k-b_{k+1})$$

дает непосредственно, что ряд $\Sigma a_k b_k$ суммируем $A$, когда последовательность $s_n b_{n+1}$ и ряд $\Sigma s_k(b_k-b_{k+1})$ будут оба суммируемы $A$. Этот результат доказывается для специального случая, в котором $A$ является методом Чезаро $C_1$. Теперь предположим, что метод $A$ линейный и регулярный, $\Sigma a_n$ суммируем $A$, $s_n=O(1)$ и $\Sigma|b_k-b_{k+1}|<\infty$. Тогда

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k=bs_n+\varepsilon_n+x_n,$$

где $b=\lim b_n$, $\varepsilon_n=s_n(b_{n+1}-b)=o(1)$ и

$$x_n=\sum_{k=0}^n s_k(b_k-b_{k+1})=o(1)+\sum_{k=0}^\infty s_k(b_k-b_{k+1}),$$

на основании предположений выводится, что $\Sigma a_k b_k$ суммируем $A$. Специальный случай этого результата получается, если $A$ представляет $C_1$. R. P. Agnew

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 1, 28.

**1451. Свертывание методов Чезаро.** Мустафа (Convolution of Cesàro methods. Moustafa M. D.), J. London Math. Soc., 1955, 30, № 1, 85—100 (англ.)

Сверткой матриц $A=(a_{n,k})$ и $B=(b_{n,k})$ называется матрица $C=(c_{n,k})$ с элементами $c_{n,k}=\Sigma_{i=0}^k a_{n,i}b_{n,k-i}$ $(n, k=0, 1, 2, \ldots)$. Операция свертывания записывается так: $C=A*B$. Положим $A*A=A^{2*}$, $(A*A)*A=A^{3*}$ и т. д. Устанавливаются некоторые результаты относительно свертывания методов Чезаро, в частности следующие:

1. Если $A$ — матрица метода $(C, 1)$, то метод, определяемый матрицей $A^{r*}$, включает $(C, r)$ (при $r=2$ результат был получен Вермсом (Vermes P., J. d'anal. math., 1952, 2, 160—177).

2. Пусть $\rho, \pi, r$ — положительные величины. Для того чтобы свертывание методов $(C, \pi)$ и $(C, \rho)$ приводило к методу, включающему $(C, r)$, необходимо выполнение условий: $r\leqslant\pi+1$, $r\leqslant\rho+1$, $r\leqslant\pi+\rho$. Если $\min(\rho, \pi)$ — целое число, то первые два из указанных условий являются достаточными.

3. Можно указать такие три $T$-матрицы $A$, $B$ и $C$, что $A$ и $B$ эквивалентны, а $A*C$ и $B*C$ не эквивалентны. В. М. Даревский

**1452. Некоторые соотношения между методами суммирования Абеля, Бореля, Чезаро, Гёльдера и Хаусдорфа.** Амир (Якимовский) (Some relations between the methods of summability of Abel, Borel, Cesaro, Hölder, and Hausdorff. Amir (Jakimovski) Amnon), J. Analyse Math., 1954, 3, 346—381 (англ.)

Пусть $\sigma_n^\alpha$ будет $(C, \alpha)$ преобразование последовательности $s_n$. Основное содержание статьи состоит в рассмотрении тауберовых теорем для различных методов суммирования $A$ последующих типов.

(1) Если $s_n$ суммируема $A$ и удовлетворяет условию Таубера

$$\sigma_n^\alpha-\sigma_n^\beta=o(1) \qquad (1)$$

(или $O(1)$), тогда $s_n$ суммируема (по возможности слабым) методом $B$. Приведены примеры: 1) Если $s_n$ суммируема по Абелю, то необходимым и достаточным условием для того, чтобы $s_n$ была суммируема $(C, \alpha)$, $\alpha>-1$, является, чтобы для некоторого $\beta>\alpha$, $\sigma_n^\alpha-\sigma_n^\beta\to 0$. 2) Пусть $s_n$ суммируема по Борелю, $\beta>\alpha>-1$ и $\sigma_n^\alpha-\sigma_n^\beta=O(1)$. Тогда $s_n$ суммируема $(C, \alpha+)$ (т. е. суммируема $(C, \alpha+\varepsilon)$ для любого $\varepsilon>0$). В частности, при $\alpha=0$, $\beta=1$ (1) обращается в условие Кронекера $n^{-1}(a_1+2a_2+\cdots+na_n)\to 0$.

Автор называет $s_n$ суммируемой $I(\alpha, \beta)$ $(\beta>\alpha>-1)$, к сумме $s$, если

$$\sigma_0^\alpha+\sum_{n=1}^\infty\frac{\sigma_n^\alpha-\sigma_n^\beta}{[I(\beta)-I(\alpha)]\,n}=s,\quad I(\alpha)=\int_0^1\frac{1-u^\alpha}{1-u}\,du. \qquad (2)$$

$I(\alpha, \beta)$ является регулярным методом суммирования Хаусдорфа, порождаемым при помощи последовательности моментов

$$\mu_0=1,\quad \mu_n=n^{-1}[I(\beta)-I(\alpha)]^{-1}\cdot\left\{\frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}}-\frac{1}{\binom{n+\beta}{n}}\right\},$$
$$n=1, 2, \ldots$$

Используя теоремы Хаусдорфа о сравнении методов суммирования Хаусдорфа, автор показал, что $I(\alpha, \beta)$ эквивалентен $(C, \alpha+1)$. Метод доказательства теоремы

($I$) состоит в следующем. Показано, что $A$-суммируемость $s_n$ влечет суммируемость $AI(\alpha, \beta)$, т. е. $A$-суммируемость ряда (2). Пользуясь условием типа (1) и стандартной теоремой Таубера для метода $A$, автор выводит сходимость ряда (2), и, следовательно, $s_n$ суммируется $(C, \alpha+1)$. Комбинируя последнее с условием (1), показывается $(C,\alpha)$ или $(C.\ \alpha+)$ суммируемость $s_n$. Замечены некоторые неточности в § 7: к допущению, что $\Sigma a_n$ суммируем по Борелю должно быть добавлено (7.3) и (7.4); ошибочно утверждать, что $(C, \alpha+)$ суммируемость $s_n$ влечет ограниченность $\sigma_n^\alpha$.

G. G. Lorentz

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 1, 28.

**1453. Заметка о множителях сходимости и суммируемости. Чжоу Хун Цзин** (Note on convergence and summability factors. Chow Hung Ching), J. London Math. Soc., 1954, 29, № 4, 459—476 (англ.)

Обозначим через $S_n^\gamma$ чезаровские средние порядка $\gamma$ ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \qquad (1)$$

Говорят, что ряд (1) $|C, \gamma|$-суммируем, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} |S_n^\gamma - S_{n-1}^\gamma| < \infty, \quad \gamma > -1.$$

Положим $\Delta^\beta b_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^{-\beta-1} b_{\nu+n}$, где $A_n^\gamma = \binom{n+\gamma}{n}$. Доказываются следующие теоремы:

1. Пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$ и $\lambda_n$ — положительные числа такие, что $\{\lambda_n/n\}$ — невозрастающая последовательность. Если $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\lambda_n |S_n^\beta| < \infty$, то для $|C, \alpha|$-суммируемости ряда $\Sigma a_n \varepsilon_n$ необходимо и достаточно, чтобы:

$$1)\ \ \varepsilon_n = O(n^{\alpha-\beta}\lambda_n),\ \ 2)\ \Delta^\beta(n^{-1}\varepsilon_n) = O(n^{-\beta-1}\lambda_n).$$

2. Если $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$, $q \geqslant 0$ и $S_n^\beta = O(n^q)$, то для $|C, \alpha|$-суммируемости ряда $\Sigma a_n \varepsilon_n$ необходимо и достаточно, чтобы

$$1)\ \ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta-\alpha-1+q} |\varepsilon_n| < \infty,$$

$$2)\ \ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta+q} |\Delta^\beta(n^{-1}\varepsilon_n)| < \infty.$$

Указанные теоремы обобщают известные результаты Бозанкет (Bosanquet L. S., J. London Math. Soc., 1945, **20**, 39—48). И. Е. Жак

**1454. О множителях сходимости и суммируемости для последовательности. Бозанкет** (On convergence and summability factors in a sequence. Bosanquet L. S.), Mathematika, 1954, **1**, № 1, 24—44 (англ.)

Положим для заданной последовательности $u_n$ и целого $m$

$$S^m(u_n) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^m u_\nu,$$

где $A_n^m = \binom{n+m}{n}$, если $n \geqslant 0$, и $A_n^m = 0$, если $n < 0$. $\Delta u_n = u_n - u_{n+1}$, $\Delta^0 u_n = u_n$, $\Delta^m u_n = \Delta\Delta^{m-1}u_n$. $\Delta^{-1}u_n = C - \Sigma_{\nu=0}^{n+1} u_\nu$, где $C$ — произвольная постоянная. Доказывается:

1. Пусть $k$, $\rho$ — неотрицательные целые числа, $p$, $q$ — действительные числа, причем при $\rho \geqslant 1$, $p+q \neq -\rho, -\rho+1, \ldots, -1$. Если

$$1)\ \varepsilon_n = O(n^{\rho-k+q}),\ \ 2)\ \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-q} |\varepsilon_\nu| = O(n),$$

$$3)\ \ \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-q} |\Delta^k \varepsilon_\nu| = O(n),$$

то из равенства

$$4)\ \ S^k(s_n) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j A_n^{k-j} + o(n^{k+p})$$

следует существование постоянных $\rho_j$ таких, что

$$5)\ \ S^p(s_n\varepsilon_n) = \sum_{j=1}^{\rho} \beta_j A_n^{\rho-j} + o(n^{\rho+p+q}).$$

Утверждение теоремы остается справедливым, если в равенствах 1)—4) поменять местами $O$ и $o$.

2. Если $k$, $\rho$ — целые неотрицательные числа, $p$, $q$ — действительные числа, то для того, чтобы из 4) следовало 5), необходимо выполнение условий 1), 2), 3).

Утверждение теоремы остается верным, если в равенствах 1)—4) поменять местами $O$ и $o$.

3. Пусть $k \geqslant 0$, $\rho \geqslant 1$ ($k$, $\rho$ — целые числа), $p$, $q$ — действительные числа, причем $p+q = -\rho, -\rho+1, \ldots, -1$. Для того чтобы из 4) следовало 5), необходимо и достаточно выполнение условий

$$\text{I)}\ \varepsilon_n = O(n^{\rho-k+q}), \qquad \text{II)}\ \varepsilon_n = O(n^q),$$

$$\text{III)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{k+p} |\Delta^k(n^{-p-q-1}\varepsilon_n)| < \infty,$$

за исключением случая $k=0$, $\rho \geqslant 1$, когда условие II) должно быть опущено.

При замене в 4) $o$ через $O$ в I) и II) следует $O$ заменить через $o$. Кроме того, в работе показано, что при $1 \leqslant \rho < k$ или $k = 0$ условие III) можно записать в форме, не зависящей от $p$. М. Д. Калашников

**1455. Остаточный член в одной тауберовой теореме. Фрейд** (Restglied eines Tauberschen Satzes. Freud G.), Acta math., 1954, 5, № 3—4, 274—289 (нем.; резюме русс.)

Работа является продолжением исследований автора по остаточным членам в тауберовых теоремах для преобразования Лапласа—Стилтьеса $F^*(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\tau^*(t)$ (РЖМат, 1954, 5159). В теореме 1 дается обобщение тауберовой теоремы Литтльвуда (Littlewood J. E., Proc. London Math. Soc., 1911, 9, ser. 2, 434—448), когда классическое условие $a_n \geqslant -k/n$ заменяется более широким: Пусть $\tau^*(t)$ — функция, заданная на $(0, \infty)$, ограниченной вариации на всяком отрезке конечной длины и удовлетворяющая следующим условиям: $F^*(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\tau^*(t)$ существует для $s > 0$ и при $s \to +0$ $F^*(s) = A + O(R(s))$, где $R(s)$ — монотонная неубывающая функция, определенная для $s > 0$, $R(+0) = 0$ и $R(ks) < e^{c_1 k} R(s)$ $(k = 2, 3, \ldots)$. Пусть далее существуют положительная постоянная $L$ и монотонная неубывающая функция $\beta_2(t)$, для которых при $s \to +0$

$$\int_0^\infty e^{-st}\, d\beta_2(t) = \frac{1}{s}(1 + O\{R(s)\})$$

и

$$\gamma_2(t) = L\beta_2(t) + \int_0^t u\, d\tau^*(u)$$

есть монотонная неубывающая функция $t$. При таких условиях имеет место соотношение

$$\int_0^x (x-t)^m\, d\tau(t) = A\frac{x^m}{m!}\left[1 + O\left\{\left(\log\frac{1}{R\left(\frac{1}{x}\right)}\right)^{-m-1}\right\}\right]$$

Теорема 2 является обобщением на случай преобразования Лапласа—Стилтьеса нижеследующего утверждения для степенных рядов, сформулированного автором в виде частного случая (формула 15а): Пусть для $\delta > 0$ $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ns} = A + O(s^{\delta})$ и $\liminf \frac{na_n}{\log n} \geqslant 0$, тогда ряд $\Sigma a_n$ сходится к сумме $B$. А. Г. Постников

**1456. Простое доказательство тауберовой теоремы Литтльвуда.** И д з у м и (A simple prof of Littlewood's Tauberian theorem. I z u m i S h i n - i c h i), Proc. Japan. Acad., 1954, **30**, № 10, 927—929 (англ.)

Дается новое доказательство известной тауберовой теоремы Литтльвуда (Харди, Расходящиеся ряды, 1951, Изд-во ин. лит. М.—Л., стр. 196, теорема 90):

Если $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится для $|x| < 1$ к $f(x)$, $\lim_{x \to 1} f(x) = s$, и $|a_n| \leqslant A/n$, то $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

И. И. Огиевецкий

**1457. О полноте полиномов для распределения Пуассона.** А л д а В а ц л а в, Чехосл. матем. ж., 1953, **3**, № 1, 83—85 (резюме англ.)

Рассматривается пространство $l^{(2)}$, состоящее из всех последовательностей $\{a_x\}_{x=0}^{\infty}$, для которых $\Sigma_{x=0}^{\infty} |a_x|^2 \times \lambda^x (x!)^{-1} < \infty$ при $\lambda > 0$.

Т е о р е м а: Пусть $\lambda > 0$ и последовательность $\{a_x\}_{x=0}^{\infty} \in l^{(2)}$. Если для $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\sum_{x=0}^{\infty} a_x x^n \lambda^x (x!)^{-1} = 0,$$

то $a_x = 0$ для всякого $x$. Этим устанавливается полнота степеней $x$ в рассматриваемом пространстве.

С. А. Еремин

## СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

**1458. Об одном отношении гамма-функций.** Х у б е р (Über einen Gammaquotienten. H u b e r A.), Anz. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1954, **91**, № 1—15, 7—10 (нем.)

В выражениях шаровых функций $P_{\nu}^{\mu}(z)$ и $Q_{\nu}^{\mu}(z)$ через гипергеометрические ряды встречаются члены, содержащие отношение гамма-функций

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\lambda\right)}{\Gamma(1 + i\lambda)}.$$

При больших значениях $\lambda > 2$ можно применять формулу Стирлинга, согласно которой

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\lambda\right)}{\Gamma(1 + i\lambda)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{i\left(\frac{1}{8\lambda} - \frac{\pi}{4}\right)};$$

при малых $\lambda$ удобнее всего сначала применить формулу удвоения аргумента

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\lambda\right)}{\Gamma(1 + i\lambda)} = \sqrt{\pi}\, 2^{-2i\lambda} \frac{\Gamma(1 + 2i\lambda)}{\Gamma^2(1 + i\lambda)},$$

а затем воспользоваться интегралом Мальмстена

$$\log \Gamma(1 + z) = \int_0^{\infty} \left[z - \frac{1 - e^{-tz}}{1 - e^{-t}}\right] \frac{e^{-t}}{t}\, dt, \quad \operatorname{Re} z > -1,$$

в результате чего получается соотношение

$$\frac{\Gamma(1 + 2i\lambda)}{\Gamma^2(1 + i\lambda)} = \sqrt{\frac{\operatorname{th} \lambda\pi}{\lambda\pi}} \cdot e^{i\sigma(\lambda)},$$

$$\sigma(\lambda) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} S_{2k+1} \frac{2^{2k} - 1}{2k + 1} \lambda^{2k+1},$$

где $S_{k+1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k-1}$.

Пользуясь затем формулой суммирования Эйлера, автор получает разложение, по которому можно вычислять значения $\sigma(\lambda)$ при $\lambda > 1$. Н. С. Кошляков

**1459. Интегралы с $E$-функциями и модифицированными функциями Бесселя второго рода.** Р а г а б (Integrals involving $E$-functions and modified Bessel functions of the second kind. R a g a b F. M.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1954, **2**, 52—56 (англ.)

Вычисляются интегралы

$$\int_0^{\infty} \lambda^{m-1} K_n(\lambda) E(p; a_r : q; \rho_s : z/\lambda)\, d\lambda,$$

$$\int_0^{\infty} \lambda^{m-1} K_n(\lambda) E(p; a_r : q; \rho_s : \lambda^2 z)\, d\lambda$$

и эти результаты применяются к вычислению некоторых интегралов, содержащих произведения бесселевых функций. A. Erdélyi

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 10, 871.

**1460. Интегралы, содержащие $E$-функции и бесселевы функции.** Р а г а б (Integrals involving $E$-functions and Bessel functions. R a g a b F. M.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 4, 414—423; Indagationes Math., 1954, **16**, № 4, 414—423 (англ.)

Функция $E\left(\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ \rho_1, \ldots, \rho_q\end{matrix} z\right)$ или, короче, $E(p; \alpha_r : q; \rho_s; z)$ определяется следующим образом (MacRobert T. M., Functions of a complex variable, 1947, 348—358) при $p \geqslant q + 1$ $p - 1$ кратным интегралом:

$$E(p; \alpha_r : q; \rho_s : z) = A \prod_{n=1}^{q} \int_0^1 \lambda_n^{\alpha_n - 1} (1 - \lambda_n)^{\rho_n - \alpha_n - 1} d\lambda_n \times$$

$$\times \prod_{n=q+1}^{p-2} \int_0^1 e^{-\lambda_n} \lambda_n^{\alpha_n - 1}\, d\lambda_n \int_0^{\infty} e^{-\lambda_{p-1}} \lambda_{p-1}^{\alpha_{p-1} - 1} \times$$

$$\times (1 + \lambda_1 \ldots \lambda_{p-1} z^{-1})^{-\alpha_p} d\lambda_{p-1},$$

$$A = \Gamma(\alpha_p) \left\{\prod_{n=1}^{q} \Gamma(\rho_n - \alpha_n)\right\}^{-1}, \quad |\operatorname{amp} z| < \pi,$$

$$\operatorname{Re} \alpha_n > 0, \quad n = 1, 2, \ldots, p - 1, \quad \operatorname{Re}(\rho_n - \alpha_n) > 0,$$

$$n = 1, 2, \ldots, q, \quad \prod_{k=n}^{m<n} a_k \equiv 1, \quad \text{при } p = q + 1$$

$$E(p; \alpha_r : q; \rho_s : z) =$$

$$= A \int_0^1 \ldots \int_0^1 \prod_{n=1}^{p-1} \lambda_n^{\alpha_n - 1} (1 - \lambda_n)^{\rho_n - \alpha_n - 1} (1 + \lambda_1 \lambda_2 \ldots$$

$$\ldots \lambda_{p-1} z^{-1})^{-\alpha_p} d\lambda_1, \ldots, d\lambda_{p-1}$$

с теми же ограничениями относительно $z$, $\alpha$ и $\rho$ (при $p = 1$, $q = 0$ $E(1; \alpha : z) = \Gamma(\alpha)(1 + z^{-1})^{-\alpha}$); при $p \leqslant q$, $z \neq 0$

$$E(p; \alpha_r : q; \rho_s : z) =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_1) \ldots \Gamma(\alpha_p)}{\Gamma(\rho_1) \ldots \Gamma(\rho_q)} {}_pF_q\left(\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ \rho_1, \ldots, \rho_q\end{matrix} - \frac{1}{z}\right).$$

Впрочем и при $p \geqslant g+1$ $E$-функция может быть выражена через обобщенные гипергеометрические функции (MacRobert, стр. 353). В работе найдены (при некоторых условиях относительно параметров) выражения в $E$-функциях для интегралов

$$\int_0^\infty e^{-\lambda}\,\lambda^{k-1}\,E(p;\ \alpha_r : q;\ \rho_s : z/\sqrt{\lambda})\,d\lambda, \qquad (1)$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2}\lambda^{k-1}\,E(\gamma,\ \delta :\lambda^2)\,E(p;\ \alpha_r : q;\ \rho_s : z/\lambda)\,d\lambda \qquad (2)$$

и интегралов, получающихся из (1) заменой $z/\sqrt{\lambda}$ на $z\sqrt{\lambda}$ и из (2) заменой $z/\lambda$ на $z\lambda$. Полученные (довольно громоздкие) формулы позволяют (ввиду того, что $z^{n/2}J_n(2/\sqrt{z}) = E(0;:1;\ n+1:z)$ и $\sqrt{2\pi z}\,e^z K_n(z) = \cos n\pi E(2;\ 1/2+n,\ 1/2-n:0;:2z)$) найти некоторые интегралы, содержащие бесселевы функции.

М. Н. Олевский

**1461. О разложении Фурье — Бесселя специального вида. Кито** (On a Fourier — Bessel expansion of special kind. Kito Fumiki), Proc. Fac. Eng. Keio Univ., (1952), 5, 41—44 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Пусть

$$Q(k_s) = J_n(k_s x)\,G_n'(k_s a) - J_n'(k_s a)\,G_n(k_s x),$$

где $k_s$ — последовательные нули функций $J_n'(kb)\,G_n'(ka) - J_n'(ka)\,G_n'(kb)$, $b > a > 0$, $n$ — целое положительное и $G_n(x) = -(\pi/2)\,Y_n(x)$. Показывается, что для «произвольной» функции $f(x)$ действительного переменного $\sum_1^\infty A_s Q(k_s) = \{f(x+0) + f(x-0)\}/2$, $a < x < b$.

N. D. Kazarinoff

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 10, 867.

**1462. Метод вычисления обобщенного интеграла Ломмеля. Кульми** (Méthode de calcul des intégrales de Lommel généralisées. Coulmy Geneviève), Ann. telecommuns, 1954, 9, № 11, 305—312 (франц.)

Предлагается несколько способов вычисления обобщенного интеграла Ломмеля

$$I_{p,q} = \int_a^b x^\gamma J_p(\alpha x)\,J_q(\beta x)\,dx, \qquad (1)$$

где $a$ и $b$ — постоянные, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — любые числа, положительные и отрицательные, $p$ и $q$ — целые.

В первой части на основании рекуррентного соотношения

$$I_{p,q} = \frac{2}{\alpha}\,\frac{p+1}{p+q+\gamma+1}\,M_{p+1,q} + \frac{p-q-\gamma+1}{p+q+\gamma+1}\,I_{p+2,q} + \frac{2k(p+1)}{p+q+\gamma+1}\,I_{p+1,q+1},$$

полученного интегрированием по частям интеграла (1), выводится общее разложение

$$I_{p,q} = \frac{2}{\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m} G_{m,n}(p,q,\gamma)\,M_{p+m,q+n}(\alpha,\beta,\gamma,a,b), \qquad (2)$$

где

$$M_{p+m,q+n}(\alpha,\beta,\gamma,a,b) = b^\gamma J_{p+m}(\alpha b)\,J_{q+n}(\beta b) - a^\gamma J_{p+m}(\alpha a)\,J_{q+n}(\beta a),$$

где $G_{m,n}(p,q,\gamma) = 0$, когда $m+n$ — четное, и

$$G_{m,n}(p,q,\gamma) = (2\beta/\alpha)^n (p+m) \prod_{\lambda=0}^{(m-n-3)/2} (p-q-\gamma+1+2\lambda) \times \frac{\prod_{\xi=1}^{n} \sum^{[m-n+\xi-\sin^2(\xi\pi/2)]/2}_{\nu_\xi=\nu_{\xi-1}+\sin^2[\pi(\xi-1)/2],\,\nu_1=0} [p+2\nu_\xi+\sin^2(\xi\pi/2)]}{\prod_{\mu=0}^{(m+n-1)/2}(p+q+\gamma+1+2\mu)}$$

когда $m+n$ — нечетное. Предлагая для вычисления интеграла (1) использовать разложение (2), автор кратко обсуждает вопросы сходимости, точности, области применимости, а также механизации предлагаемого метода. При рассмотрении частных случаев разложения (2) ($\gamma$ — целое) приводятся как новые, так и уже известные соотношения. Во второй части предлагается еще несколько методов.

Е. Н. Деканосидзе

**1463. Об области сходимости ряда Лежандра. Орц-Арасиль** (On the region of convergence of a Legendre series. Orts Aracil Jose M.), Mem. Real Acad. Ci. Art. Barcelona, 1953, **31**, 329—340 (исп.)

Доказывается, что ряд по полиномам Лежандра $P_n(z)$ $\Sigma_0^n a_n P_n(z)$, в котором коэффициенты, вообще говоря, комплексны, сходится в некотором эллипсе. Область сходимости ряда по многочленам Чебышева также является эллипсом. Рассматриваются ограничения на эти ряды и следствия из соотношения $P_n(z) = \Sigma\alpha_n^{(k)} T_k(z)$, где $\alpha_n^{(k)}$ вещественны, положительны и $\Sigma\alpha_n^k = 1$.

E. Frank

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 1, 955.

**1464. О многочленах Ломмеля и Бесселя. Диккинсон** (On Lommel and Bessel polynomials. Dickinson David), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 6, 946—956 (англ.)

Многочленами Ломмеля называются коэффициенты $R_{n,\nu}(x)$ в соотношениях ($J_s$ — бесселевы функции):

$$J_{\nu+n}(x) = J_\nu(x)\,R_{n,\nu}(x) - J_{\nu-1}(x)\,R_{n-1,\nu+1}(x)$$

(Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, 1949, М., Изд-во ин. лит., ч. I, §§ 9.6—9.73). Автор определяет видоизмененные многочлены Ломмеля $h_{n,\nu}(x)$ равенством: $h_{n,\nu}(x) = R_{n,\nu}(1/x)$. Эти многочлены можно представить через обобщенные гипергеометрические функции:

$$h_{n,\nu}(x) = (\nu)_n (2x)^n\,{}_2F_3(-n/2,\ (-n+1)/2;\ \nu,\ -n,\ 1-\nu-n;\ -1/x^2)$$

(обозначения см. РЖМат, 1953, 317).

Пусть $\nu > 0$, $j_{\nu,n}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) — занумерованные в порядке возрастания ненулевые корни функции $J_\nu(x)$, где $j_{\nu,1}$ — наименьший положительный корень: $d\alpha_\nu(x)$ — функция скачков, возрастающая в точке $j_{\nu-1,n}$ на $j_{\nu-1,n}^{-2}$. Автор доказывает следующие соотношения ортогональности для функций $h_{n,\nu}(x)$:

$$\int_{j_{\nu-1,0}^{-1}}^{j_{\nu-1,1}^{-1}} h_{n,\nu}(x)\,h_{m,\nu}(x)\,d\alpha_\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \dfrac{1}{2^{n+1}(\nu)_{n+1}} & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Как указывает автор, эти соотношения были установлены независимо от него Уонниром и Поллаком. Многочлены $h_{n,\nu}(x)$ связаны с многочленами Бесселя $y_n(x)$

(РЖМат, 1953, 317; 1955, 2278) следующим образом

$$h_{n,\,s+1/2}(x) = 2^{-1}\,[i^{-n}\,y_{n+s}(ix)\,y_{s-1}(-ix) + i^{n}\,y_{n+s}(-ix)\,y_{s-1}(ix)].$$

Л. М. Глускин

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

**1465. Теорема о преобразовании Фурье. Кавата** (A theorem on Fourier transform. Kawata Tatsuo), Kodai Math. Sem. Repts, 1954, № 1, 22—24 (англ.)

Пусть $F(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ — неубывающая ограниченная функция. Класс функций $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, для которых $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dF(x) < \infty$, обозначается $L_2(F)$. Функция $f(x)$ называется $L_2(F)$-непрерывной, если $f(x+u) \in L_2(F)$ для любого $u$ и

$$\lim_{u\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+u) - f(x)|^2\,dF(x) = 0.$$

Теорема. Если функция $f(x)$ $L_2(F)$-непрерывна и интегрируема с квадратом в смысле Лебега на каждом конечном интервале, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $A > 0$ и функция $K_A(\theta)$ ограниченной вариации на $[-A, A]$ такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - \int_{-A}^{A} e^{-ix\theta}\,d\,K_A(\theta)|^2\,dF(x) < \varepsilon.$$

Доказательство основано на рассмотрении функции

$$f_R(x, A) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_R(y)\,\frac{\sin^2 A(y-x)}{A(y-x)^2}\,dy,$$

где $f_R(x) = f(x)$ при $|x| \leqslant R$, $f_R(x) = 0$ при $|x| > R$.

Примечание референта. В доказательстве имеется ошибка, так как неверно утверждение автора, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} |f_R(x+u) - f_R(x)|^2\,dF(x) < \infty.$$

Однако доказательство легко может быть исправлено.

Б. И. Коренблюм

**1466. Степень роста трансформаций Фурье. Боас** (Order of magnitude of Fourier transforms. Boas R. P., Jr), Michigan. Math. J., 1953—1954, 2, № 2, 141—142 (англ.)

Доказывается теорема: Если трансформации Фурье $f(x)$ и $g(x)$ при $|x| \to \infty$ будут $O(\exp T|x|^{\rho} - x^2/2)$ $(0 < \rho < 2)$, то они обе имеют вид $\Psi(x)\exp(-x^2/2)$, где $\Psi(x)$ — целая функция порядка не выше $\rho$ нормального типа.

В. С. Рогожин

**1467. Некоторые теоремы о двойственных себе функциях. Бос** (Certain theorems on self-reciprocal functions. Bose B. N.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1954, 46, № 2, 109—127 (англ.)

Функция $f(x)$ называется принадлежащей $R_m$, если она удовлетворяет уравнению $f(x) = \int_0^{\infty} \sqrt{xy}\,J_m(xy) \times f(y)\,dy$. Пусть $\Psi_i(p) = \int_0^{\infty} S_i(p, t) f(t)\,dt$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, где $S_0(p, t) = (t^2+p^2)^{-m-1}$, $m > 0$; $S_i(p, t) = (pt)^{n_i} K_m(pt)$ $(i = 1, 2, 3)$; $m \geqslant 1/2$; $n_1 = 1/2$, $n_2 = m$, $n_3 = m+1$.

В первой части работы доказываются следующие четыре предложения — A, C, E, G (и их обращения): если $p^{k_i}\Psi_i(p) \in R_{mi}$, то (в предположении, что $x^{-k_i} f(x)$ — непрерывна и абсолютно интегрируема в $(0, \infty)$) $x^{-k_i} f(x) \in R_m$, $(i = 0, 1, 2, 3)$; здесь $k_0 = k_2 = m + \frac{1}{2}$, $k_1 = 2m$, $k_3 = m - \frac{1}{2}$; $m_0 = m$, $m_1 = m_2 = m_3 = 3m$.

Доказывается еще и следующее предложение: пусть $g(x, p)$, $h(x, p)$ — непрерывные функции в области $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant p < \infty$, симметричные относительно $x$ и $p$, и $g(y, p) = \int_0^{\infty} \sqrt{xy}\,J_m(xy)\,h(x, p)\,dx$, $m \geqslant 0$; пусть $f(t)$ — непрерывная и абсолютно интегрируемая функция в $(0, \infty)$ и пусть $\int_0^{\infty} |g(p, t)|\,dt$ и $\int_0^{\infty} |h(p, t)|\,dt$ существуют и интегрируемы в $(0, \infty)$. Тогда, если $f(x) \in R_m$, то и $\psi(p) \equiv \int_0^{\infty} g(x, p) f(x)\,dx \in R_m$. Доказательство обратного утверждения проведено лишь для весьма частного вида функций $h(x, p)$.

Вторая часть статьи посвящена распространению на случай функций двух переменных теоремы C (и ей обратной) и некоторых ранее установленных теорем (РЖМат, 1955, 5921; Mitra S. C., Bose B. N., Acta math., 1953, 88, 227—240; в работе ошибочно дана ссылка на 87 том); указывается, что подобные обобщения имеют место и для теорем A, E и G. Не везде, где это необходимо, в формулировки теорем включены требования, обеспечивающие законность перемен порядка интегрирования, используемых в доказательствах; приводимые в работе леммы сформулированы недостаточно отчетливо. Имеются опечатки.

М. Н. Олевский

**1468. Об обобщении преобразования Лапласа. Эрдейи** (On a generalisation of the Laplace transformation. Erdélyi A.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1954, **10**, № 2, 53—55 (англ.)

Автор отмечает, что интегральное преобразование

$$\varphi_m^k(st) = \int_0^{\infty} (2st)^{-1/2}\,W_{k,\,m}(2st)\,f(t)\,dt, \qquad (1)$$

которое рассматривал Варма (Varma R. S., Proc. Edinburgh Math. Soc., 1949, (2) 8, 126—127), и преобразование

$$\int_0^{\infty} e^{-st/2}\,W_{k,\,m}(st)\,(st)^{-k} f(t)\,dt, \qquad (2)$$

которое рассматривал Мейер (Meijer C. S., Proc. Amsterdam Akad. Wet., 1940, 44, 727—737, 831—839), могут быть изучены на основе теории преобразования Лапласа. Именно, преобразование (2) с точностью до несущественного множителя сводится к преобразованию Лапласа от интеграла или производной дробного порядка функции $f(t)$. Аналогичное замечание справедливо и для преобразования (1).

Далее автор пользуется операторами, введенными Кобером (Kober H., Quart. J. Math. Oxford, 1940, **11**, 193—211).

$$I^{+}_{\eta,\,\alpha} f(x) = \{\Gamma(\alpha)\}^{-1} x^{-\eta-\alpha} \int_0^x (x-u)^{\alpha-1} u^{\eta} f(u)\,du$$

$$K_{\eta,\,\alpha} f(x) = \{\Gamma(\alpha)\}^{-1} x^{\eta} \int_x^{\infty} (u-x)^{\alpha-1} u^{-\eta-\alpha} f(u)\,du,$$

где $f(x)$ есть функция из лебегова класса $L_2(0, \infty)$ и $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}\eta > -1/2$. Если ввести функцию $K(z) = K^{-}_{\eta,\,\alpha}(z^{\rho} e^{-z})$, где $\operatorname{Re}\eta - 1/2$ и $\operatorname{Re}\rho - 1/2$ не являются целыми отрицательными числами, то имеют место формулы

$$g(x) = \int_0^{\infty} K(x, y) f(g)\,dy = \int_0^{\infty} e^{-xy}(xy)^{\rho}\,I^{+}_{\eta,\,\alpha} f(y)\,dy,$$

$$K^{-}_{\eta+\alpha;\,\alpha}\,g(x) = \int_0^{\infty} e^{-xy}(xy)^{\rho} f(y)\,dy$$

для всякой функции $f(y)$ класса $L_2(0, \infty)$. Н. Обрешков

**1469. Наглядный пример решения «сумматорного» уравнения с помощью преобразования Фурье.** Окабе (An illustrative example of solving a sum equation by Fourier transforms. Okabe Jun-ichi), Repts Res. Inst. Appl. Mech., 1953, 2, № 7, 155—160) (англ.)

Рассматриваются вынужденные колебания бесконечного числа равных частиц массы $\mu$, расположенных на равных расстояниях $a$ друг от друга на струне, плотность которой $\rho$, а натяжение $T$. Поперечное смещение $n$-й частицы определяется уравнением, которое автор называет «сумматорным» и которое условно записывает так:

$$\psi_n(t) = \sigma_n(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \{\text{действий } \psi_{n-m}(t - ma/c) \text{ и } \psi_{n+m}(t - ma/c) \text{ на } \psi_n(t) \text{ в результате свободных колебаний струны}\}.$$

Здесь $\sigma_n(t)$ — заданная функция, а $c \equiv \sqrt{T/\rho}$. Используя преобразование Фурье ступенчатых функций и вводя безразмерное время, автор получает

$$\bar{\psi}_n(\zeta) = \bar{\sigma}_n(\zeta) + \sum_{m=1}^{\infty} \| \bar{\psi}_{n+m}(\zeta) \exp\{(2\lambda - 1) m\zeta\} + \bar{\psi}_{n+m}(\zeta) \exp(-m\zeta) \|,$$

где $\bar{\psi}$ и $\bar{\sigma}$ — преобразование Фурье функций $\psi$ и $\sigma$, а знак $\|$ означает результат действия функций, заключенных внутри этих скобок, на свободные колебания $n$-й частицы. Используя результаты своих предшествующих работ, автор приходит далее к рекуррентным соотношениям, которые позволяют исключить $\bar{\psi}_{n+m}(\xi)$ из выражения для $\bar{\psi}_n(\zeta)$ и представить его в виде

$$\bar{\psi}_n(\zeta) = \bar{\sigma}_n(\zeta) \times \frac{x \operatorname{ch}\zeta + \sqrt{x^2 - 4} \operatorname{sh}\zeta + 2 \operatorname{ch}\lambda\zeta}{x \operatorname{ch}\zeta + \sqrt{x^2 - 4} \operatorname{sh}\zeta + (x - \sqrt{x^2 - 4})\, e^{-\xi} + 4 \operatorname{ch}\lambda\zeta},$$

где $x = -2\operatorname{ch}\zeta - (a\zeta + \beta)\operatorname{sh}\zeta$, а $\alpha$, $\beta$ и $\lambda$ зависят от параметров системы. Переходя затем от преобразований Фурье к оригиналу, автор обычным приемом выражает $\psi_a(\tau)$ с помощью контурного интеграла.

М. А. Айзерман

## ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

**1470. О вычислении электростатической энергии ограниченного гетерополярного кристалла.** Кристов (Über die Berechnung der elektrostatischen Aufbauenergie endlicher heteropolarer Kristalle. Christov Chr.), Ann. Physik, 1954, 15, № 2, 112—123 (нем.)

Вычисляется электростатическая энергия $E(n)$ ограниченного кристалла NaCl, имеющего форму куба и содержащего $n^3$ ионов, причем предполагается, что расстояния между соседними ионами всегда одинаковы, т. е. не зависят от положения ионов по отношению к границам кристалла. В отличие от результатов Эмерслебена (Emersleben O., Z. phys. Chem., 1952, 199, 70) показано, что $E(n)$ может быть представлена в виде

$$E(n) = A(n) + B(n), \qquad (1)$$

где $A(n)$ — полусходящийся ряд, а $B(n)$ — быстро сходящийся ряд экспоненциальных функций и функций Неймана. При выводе (1), наряду с хорошо известными формулами Маделунга для электростатических потенциалов кристаллических плоскостей и цепочек, используется формула Буля:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n+i} f(i+h) = (-1)^h \sum_{\lambda=0}^{m} a_\lambda f^{(\lambda)}(h) - (-1)^h R_m(h),$$

в которой $f^{\lambda}(h)$ — производные порядка $\lambda$ некоторой функции $f$, $a_\lambda$ — численные коэффициенты, выражаемые через полиномы Эйлера $E_\lambda(x)$, взятые при $x = 1$, $R_m(h)$ — остаточный член. Расчетами, проведенными по формуле (1) с учетом первых не равных нулю членов ряда $A(n)$ для $n = 2, 4, \ldots, 12$ и сравнением результатов с результатами, полученными Эмерслебеном путем непосредственного суммирования, показано, что, несмотря на полусходящийся характер ряда $A(n)$, формула (1) может дать весьма большую точность даже при малых $n$ ($n = 2, 4$). В. Ф. Конусов

**1471. Применение волновых функций Зоммерфельда комплексного порядка к теории антенн.** Папас (An application of Sommerfeld's complex order wave functions to antenna theory. Papas Charles H.), J. Math. and Phys., 1954, № 3, 33, 269—275 (англ.)

В системе сферических координат $r$, $\theta$, $\varphi$ рассматривается электромагнитное поле, для которого отличны от нуля компоненты $E_r$, $E_\theta$ и $H_\varphi$, не зависящие от $\varphi$. Считая, что от времени зависит только множитель $e^{-i\omega t}$ и положив $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$, где $\varepsilon$ — диэлектрическая постоянная, $\mu$ — магнитная проницаемость, для компоненты $H_\varphi$ из уравнений Максвелла получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rH_\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(H_\varphi \sin\theta)\right] + k^2 r H_\varphi = 0.$$

Если $H_\varphi = i\omega\varepsilon\partial u/\partial\theta$, то уравнение принимает вид $\frac{\partial}{\partial\theta}[(\Delta + k^2)u(r, \theta)] = 0$, где $\Delta$ — оператор Лапласа. Мы можем выбрать $u(r, \theta)$ так, чтобы имело место уравнение

$$(\Delta + k^2)u(r, \theta) = 0. \qquad (1)$$

Электромагнитное поле выражается через $u$ формулами:

$$E_r = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right); \quad E_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru)}{\partial\theta\,\partial r}; \quad H_\varphi = i\omega\varepsilon\frac{\partial u}{\partial\theta}. \qquad (2)$$

Далее вводится граничное условие $E_\theta|_{r=a} = 0$ или

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru)\Big|_{r=a} = 0. \qquad (3)$$

Кроме того, функции $u(r)$ удовлетворяют при $r = \infty$ условию излучения

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0. \qquad (4)$$

Общее решение уравнения (1) при условиях (3) и (4) имеет вид:

$$u_a^* = \sum A_\nu h_\nu^{(1)}(kr) P_\nu(\cos\theta), \qquad (5)$$

где $P_\nu(\cos\theta)$ — функции Лежандра, а $h_\nu^{(1)}(kr)$ — сферические функции Ганкеля первого рода, связанные с цилиндрическими функциями Ганкеля соотношением

$$h_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\pi/2z}\,H_{\nu+1/2}^{(1)}(z).$$

В дальнейшем автор применяет полученное им раньше выражение для магнитного поля в цилиндрических координатах $\rho$ и $z$ в коаксиальной области $a \leqslant \rho \leqslant b$, $z \leqslant 0$ через коаксиальный линейный ток $I(z)$ и радиальную компоненту $E(\rho)$ электрического поля.

$$H_\varphi^{(-)}(\rho, z) = \frac{I(z)}{2\pi\rho} +$$

$$+ i\omega\varepsilon \int_a^b E(\rho')\,\rho'\,d\rho' \sum \frac{R_n(\rho)\,R_n(\rho')}{\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}}\, e^{\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}\,z}, \quad (6)$$

где $\lambda_n$ определяются уравнением

$$J_0(\lambda_n a)\,N_0(\lambda_n b) - N_0(\lambda_n a)\,J_0(\lambda_n b) = 0,$$

а собственные функции $R_n(\rho)$ определяются дифференциальным уравнением

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2} + \lambda_n^2\right) R_n(\rho) = 0$$

и граничными условиями $\left(\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\right) R_n(\rho) = 0$ при $\rho = a,\ b$, откуда вытекают условия ортогональности $R_n(\rho)$ на $(a, b)$. Переходя к теории антенн, автор рассматривает антенну, состоящую из коаксиальной линии $(a \leqslant \rho \leqslant b,\ z \leqslant 0)$, бесконечного экрана $z = 0$, $\rho \geqslant a$ и головки, имеющей форму полусферы: $r = a$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Область антенны определяется условиями $r \geqslant a$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Электромагнитное поле в этой области выражается формулами (2), где $u$ определяется формулой (5). К нему непрерывно примыкает поле, определенное в коаксиальной области $a \leqslant \rho \leqslant b$, $z \leqslant 0$. При $z = 0$, $\theta = \pi/2$ получаем: $r = \rho$, $rE(r) = \Sigma_\nu A_\nu \nu(\nu+1) h_\nu^{(1)}(kr) P_\nu(0)$, причем $E(r) = 0$ при $r \geqslant b$, откуда:

$$A_\nu = \frac{\int_{ka}^{kb} rE(r)\,h_\nu^{(1)}(kr)\,d(kr)}{\nu(\nu+1)P_\nu(0)N_\nu(ka)},$$

$$H_\varphi^{(+)}(r, \theta) =$$

$$= i\omega\varepsilon \int_{ka}^{kb} r'E(r')d(kr') \sum \frac{h_\nu^{(1)}(kr)\,h_\nu^{(1)}(kr')}{\nu(\nu+1)P_\nu(0)N_\nu(ka)} \frac{d}{d\theta} P_\nu(\cos\theta).$$

Условие непрерывности $H$ при $z = 0$ приводит к интегральному уравнению для $E(r)$ вида:

$$\frac{J(0)}{2\pi\rho} + i\omega\varepsilon \int_a^b E(\rho')\rho'd\rho' \sum \frac{R_n(\rho)\,R_n(\rho')}{\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}} =$$

$$= i\omega\varepsilon k \int_a^b r'E(r')dr' \sum \frac{h_\nu^{(1)}(k\rho)h_\nu^{(1)}(k\rho')}{\nu(\nu+1)P_\nu(0)N_\nu(ka)} \frac{d}{d\nu} P_\nu(0).$$

Если принять в первом приближении, что $E(\rho) = 1/\rho$, то можно получить формулу

$$Y(0) = \frac{2\pi i\omega\varepsilon k}{(\ln(b/a))^2} \sum \frac{\left(\int_a^b h_\nu^{(1)}(k\rho)d\rho\right)^2}{\nu(\nu+1)N_\nu(ka)} \frac{\frac{d}{d\theta}P_\nu(0)}{P_\nu(0)}.$$

Эта формула дает приближенное значение величины $Y(0)$, выражающей полную проводимость рассматриваемой антенны. Ю. Л. Рабинович

---

См. также: 973, 1003, 1004, 1041, 1043, 1044, 1238, 1242, 1257, 1309, 1524, 1690, 1691, 1692, 1693 К, 1694 К.

## ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

**1472. Замечание о линейных топологических пространствах. Андо** (Note on linear topological spaces. Andô Tsuyoshi), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 6, 435—436 (англ.)

Пусть $E$ и $F$ — хаусдорфовы локально выпуклые пространства, $L(E, F)$ — векторное пространство всех непрерывных линейных отображений $E$ в $F$, $\mathfrak{S}$ — произвольное семейство ограниченных множеств из $E$, направленное относительно включения $\subset$ и покрывающее $E$, и $\mathfrak{S}$-топология на $L(E, F)$ — (хаусдорфова локально выпуклая) топология, в которой базис окрестностей нуля образуют множества $(A|V) = \{u \in L(E,F)\colon u(A) \subset V\}$, где $A$ пробегает все $\mathfrak{S}$, а $V$ — все окрестности нуля в $F$. Если $L(E, E)$ и $L(F, F)$, снабженные $\mathfrak{S}$-топологиями, изоморфны как алгебры и гомеоморфны, то и $E$ и $F$ изоморфны как векторные пространства и гомеоморфны. Д. А. Райков

**1473. Некоторые положения теории топологических тензорных произведений. Гротендик** (Quelques points de la théorie des produits tensoriels topologiques. Grothendieck A.), 2° symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América, Villavicencio-Mendoza, julio 1954, Montevideo, Centro coop. cient., UNESCO América Latina, 1954, 173—177 (франц.)

Для любых банаховых пространств $E$ и $F$ можно ввести понятие тензорного произведения в чисто алгебраическом смысле, обозначаемое в дальнейшем $E \otimes F$. В этом произведении автор вводит две нормы, пополнение по которым дает одно из двух банаховых пространств $E \hat{\otimes} F$ или $E \check{\otimes} F$. Если $F$ есть $L_1$, то $E \otimes L_1$ есть пространство абсолютно интегрируемых функций со значениями из $E$. Если $F$ есть пространство непрерывных функций на бикомпакте, то $E \otimes F$ есть пространство непрерывных функций со значениями из $E$. Линейное преобразование $u$ пространства $E$ в пространство $F$ автор называет интегральным, если оно может быть реализовано цепочкой $E \to L^\infty \to L_1 \to F''$, где $F''$ — второе сопряженное к $F$. Преобразование $u$ называется прединтегральным слева, если $E$ есть фактор-пространство пространства $L$ такого, что соответствующее преобразование $L \to F$ интегрально. Преобразование $u(E \to F)$ называется прединтегральным справа, если $F \subset C$, так что соответственно $E \to C$ интегрально. Формулируются следующие результаты, за доказательствами которых автор отсылает к другим своим работам.

Теорема 1. Тождественное преобразование гильбертова пространства в себя прединтегрально.

Теорема 2. Пусть $u$ — эрмитова билинейная форма в пространстве $C(M)$ непрерывных функций на биком-

пакте $M$, тогда существует положительная мера $\mu$ на $M$, с вариацией $\leqslant h\|u\|$, такая, что $u$ подчинена форме $\int fgd\mu$. При этом $\pi/2 < h < \mathrm{sh}(\pi/2)$.
Ю. А. Шрейдер

**1474. Некоторые замечания о выпуклости сферы. Татаркевич** (Quelques remarques sur la convexité des sphères. Tatarkiewicz Krzysztof), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1952, **A6**, 19—30 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.; резюме польск., русс.)

Некоторые замечания о структуре поверхности сферы в банаховом пространстве. Г. П. Акилов

**1475. Максимальные выпуклые множества. Хаммер** (Maximal convex sets. Hammer Preston C.), Duke Math. J., 1955, **22**, № 1, 103—106 (англ.)

Рассматривается линейное пространство $L$. Полупространством в $L$ относительно точки $x \in L$ называется максимальный конус в $L$ с вершиной $x$, не содержащий саму точку $x$. Автор показывает, что полупространства в $L$ образуют минимальный базис пересечений для выпуклых подмножеств $L$. Топология (либо условия, ее заменяющие) в $L$ не предполагается. Отметим следующий результат: Множество $C \subset L$ является выпуклой оболочкой множества $E$ своих экстремальных точек тогда и только тогда, когда для каждого $y \in C$ и каждого полупространства $S$ относительно $y$ множество $L \setminus S$ пересекает $E$. Здесь, в отличие от теоремы М. Г. Крейна и референта об экстремальных точках, уже в самом условии теоремы предполагается существование достаточного множества экстремальных точек. Далее для рассмотрения примеров полупространств автор пользуется понятиями, предполагающими топологию в $L$. Автор указывает, что имеются полупространства, в рассматриваемом здесь смысле, не содержащие внутренних точек. Д. П. Мильман

**1476. Обобщение аппроксимационной теоремы Вейерштрасса. Мак** (Eine Verallgemeinerung des Weierstrassschen Approximationssatzes. Maak Wilhelm), Arch. Math., 1955, **6**, № 3, 188—193 (нем.)

При помощи классической теоремы Вейерштрасса устанавливается следующее ее обобщение. Пусть $\mathfrak{M}$ — абстрактное множество, $f(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ — комплекснозначные функции на нем, причем $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ ограничены. Предположим, что для некоторых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ из неравенства $\max_\nu |\varphi_\nu(x) - \varphi_\nu(y)| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Тогда для любого $\eta > 0$ существует полином $P(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)$ от $2n$ переменных с комплексными коэффициентами, такой, что для всех $x \in \mathfrak{M}$

$$|f(x) - P(\varphi_1(x), \overline{\varphi_1(x)}; \ldots; \varphi_n(x), \overline{\varphi_n(x)})| < \varepsilon + \eta.$$

При помощи этой теоремы автор получает доказательство теоремы Стоуна, а также (используя одну теорему Н. Н. Боголюбова) аппроксимационной теоремы для равномерных почти периодических функций и некоторых их обобщений. Отметим, что, если условие теоремы выполняется для каждого $\varepsilon > 0$ при соответствующем выборе $\delta > 0$, то она может быть легко получена из теоремы Стоуна, если метризовать $\mathfrak{M}$ посредством метрики $\rho(x, y) = \max_\nu |\varphi_\nu(x) - \varphi_\nu(y)|$ с последующим отождествлением точек.
Ю. М. Березанский

**1477. О кольцах непрерывных функций с компактным носителем. Фудзивара** (Sur les anneaux des fonctions continues à support compact. Fujiwara Kaichirô), Math. J. Okayama Univ., 1954, **3**, № 2, 175—184 (франц.)

Кольцо $C_k(\Omega)$ всех непрерывных функций $f(x)$ на локально компактном пространстве $\Omega$, обращающихся в нуль каждая вне некоторого компакта, с нормой $\|f\| = \max|f(x)|$ и с инволюцией $f^*(x) = \overline{f(x)}$, обладает следующими свойствами: 1) оно относительно полно, т. е. каждый элемент $f \in C_k(\Omega)$ содержится в полном идеале (само $C_k(\Omega)$ неполно); 2) для каждого элемента $f \in C_k(\Omega)$ имеется «относительная единица» — такой элемент $e_f \in C_k(\Omega)$, что $fe_f = f$. Доказывается, что всякое абстрактное нормированное (неполное) коммутативное кольцо с инволюцией, относительно полное и обладающее для каждого элемента относительной единицей, изоморфно некоторому кольцу $C_k(\Omega)$. Г. Е. Шилов

**1478. О спектре коммутаторов. Патнам** (On the spectra of commutators. Putnam C. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 6, 929—931 (англ.)

Доказываются следующие теоремы:

1) Пусть $A$ и $B$ — ограниченные операторы в пространстве Гильберта и коммутатор $C = AB - BA$ удовлетворяет условию $AC = CA$. Тогда существует последовательность ограниченных операторов $C_1$, $C_2$, ..., такая, что $\|C - C_n\| \to 0$ и $\mathrm{sp}(C_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

2) Если, кроме того, $BC = CB$, то $\mathrm{sp}(C) = 0$. Символ $\mathrm{sp}(D)$ обозначает множество точек спектра оператора $D$. Из теоремы 2 следует, что ограниченный оператор $A$, коммутирующий с $AA^* - A^*A$, есть оператор нормальный. М. С. Лившиц

**1479. О некоторых свойствах квадратичных форм в пространствах $L^q$ ($q \leqslant 2$). Вайнберг М. М.**, Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 5, 845—848

Пусть $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ($q \leqslant 2 \leqslant p$); $L^r$ — пространство функций, суммируемых с $r$-й степенью на ограниченном множестве $\mathfrak{L}$ в $s$-мерном пространстве Евклида; $A$ — вполне непрерывный оператор из $L^q$ в $L^p$. Рассматриваются билинейная форма $J = (u, v) = \int_{\mathfrak{L}} Au \cdot v dx$ ($u, v \in L^q$) и соответствующая квадратичная форма $J(u, u)$. $A$ можно, в частности, рассматривать как оператор в $L^2$. В $L^2$ он предполагается самосопряженным.

Теорема 1. Если $A$ имеет лишь конечное число отрицательных характеристических чисел, то 1) квадратичная форма $J(u, u)$ слабо непрерывна в $L^q$ и, следовательно, достигает верхней и нижней граней в любом шаре $D(\|u\| \leqslant r)$ пространства $L^q$; 2) для всякого $u \in L^q$ $\lim\limits_{n\to\infty} J_n(u, u) = J(u, u)$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$. Здесь

$$J_n(u, u) = \int_{\mathfrak{L}} A_n u \cdot u dx, \quad A_n u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1} (\varphi_k, u)\, \varphi_k,$$

$\lambda_k$ и $\varphi_k$ — характеристические числа и собственные функции оператора $A$ ($|\lambda_i| \leqslant |\lambda_{i+1}|$),

$$\mu_n = \max_D [J(u, u) - J_n(u, u)].$$

Теорема 3. В условиях теоремы 1 для всякой функции $u \in L^q$ имеет место теорема Гильберта—Шмидта: $Au = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-1} (\varphi_i, u)\, \varphi_i$, где ряд сходится в метрике $L^p$. М. К. Гавурин

**1480. Характеризация гильбертова пространства. Касахара** (A characterization of Hilbert space. Kasahara Shouro), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 9, 846—848 (англ.)

Для того чтобы вещественное банахово пространство $E$ было гильбертовым, необходимо и достаточно, чтобы существовало $\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 1/2)$ такое, что для любых $x$, $y\in E$ выполняется неравенство

$$\lambda\|x\|^2+(1-\lambda)\|y\|^2\geqslant\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2+\\+\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^2,$$

где $\alpha\leqslant\lambda\leqslant 1-\alpha$ и $\lambda$ зависит от $x$ и $y$. Доказательство опирается на теорему Какутани о распространении линейных операций в банаховом пространстве (Kakutani S., Japan. J. Math., 1939, 16, 93—97).

Г. П. Акилов

**1481. Об оценке количества критических точек функционалов. Борисович Ю. Г.**, Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 2, 205—207

Автор рассматривает введенное М. А. Красносельским понятие рода множества применительно к множествам в сепарабельном гильбертовом пространстве $H$ со слабой топологией в нем. Пусть $T_c$ — единичный шар в $H$, наделенный слабой топологией. Замкнутое множество $E\subset T_c$ имеет род $r_AE=1$, если ни одна его связная компонента не содержит пары точек $x$, $Ax$, где $A$ — инволютивное $(A^2x=x)$ непрерывное отображение $T_c$ на себя.

Множество $E\subset T_c$ (не обязательно замкнутое) имеет род $r_AE=n$, если оно содержится в $n$ и не содержится в $n-1$ замкнутых множествах рода 1.

Изучены некоторые свойства понятия рода множества и дано приложение развитой теории к оценке количества критических точек. Как известно, задача условного экстремума слабо непрерывного функционала $f(x)$ на гиперповерхности $R\subset H$, определенной уравнениями $\varphi_i(x)=0$, $i=1, 2, \ldots, n$, где $\varphi_i$ — заданные функционалы, сводится к отысканию точек $x\in R$, в которых для некоторой системы действительных чисел $\lambda_i$ имеет место равенство $\Gamma x=\Sigma_1^n\lambda_i\Gamma_i x$, где $\Gamma$, $\Gamma_i$ — градиенты соответственно $f$, $\varphi_i$.

Оказывается, если $\Gamma$ — градиент слабо непрерывного, четного, положительного, равномерно дифференцируемого на каждом шаре функционала $f(x)$, $f(x)=0$ и $\Gamma x=0$ только при $x=0$, причем $f(x)\to+\infty$ при $\|x\|\to\infty$, $(Lx, x)=c>0$, где $L$ — линейный самосопряженный оператор в $H$, имеющий $n$ положительных собственных значений (с учетом их кратности), то на каждой поверхности $(Lx, x)=c$ существует не менее $2n$ критических точек $x_i$.

В случае совпадения $p+1$ критических значений появляется континуальное множество критических точек рода $\geqslant p+1$. Сама поверхность $(Lx, x)=c>0$ имеет род не меньше $n$ относительно инволюции $Ax=-x$.

Э. С. Цитланадзе

**1482. Об изометрических аналитических функциях в абстрактных пространствах. Симода** (On isometric analytic functions in abstract spaces. Shimoda Isae), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 8, 718—720 (англ.)

Изучаются функции, переводящие комплексное банахово пространство $E$ в комплексное пространство $E'$. Такая функция называется аналитической в области $D\subset E$, если она сильно непрерывна и обладает дифференциалом Гато в этой области. Аналитические функции $h_n(x)$, определенные на всем пространстве $E$ и обладающие свойством $h_n(\alpha x)=\alpha^n h_n(x)$, где $\alpha$ — произвольное число, называются однородными полиномами степени $n$. Основные результаты:

Теорема 1. Если $f(x)$ аналитична при $\|x\|<R$ и удовлетворяет условию $\|f(x)\|<K\|x\|^m$, то имеет место разложение в ряд $f(x)=h_m(x)+h_{m+1}(x)+\cdots$ по однородным полиномам.

Теорема 2. Если $f(x)$ аналитична при $\|x\|<R$ и удовлетворяет условию $\|f(x)\|=\|x\|^m$, то $\|h_m(x)\|=\|x\|^m$.

Теорема 3. Если $f(x)$ аналитична во всем пространстве $E$ и удовлетворяет условию $\|f(x)\|\leqslant K\|x\|^m$, то $f(x)$ есть абстрактный полином степени не выше $m$ (см. Хилл Э. Функциональный анализ и полугруппы, стр. 90). В частности, если $f(x)$ изометрична, т. е. $\|f(x)\|=\|x\|$, то $f(x)$ есть линейная функция.

Доказательства основаны на возможности представить функцию, аналитическую внутри сферы $\|x\|<R$, в виде ряда по однородным полиномам $f(x)=\Sigma_{n=0}^{\infty}h_n(x)$, причем

$$h_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\alpha x)}{\alpha^{n+1}}d\alpha,$$

где $C$ — круг в комплексной плоскости $|\alpha|=r$ и $1<r<R/\|x\|$. С помощью соответствующих примеров автор показывает, что в условии теоремы 3 нельзя заменить аналитичность во всем пространстве $E$ аналитичностью в ограниченной области.

Ю. А. Шрейдер

**1483. Об областях определения нелинейных аналитических функционалов. Пеллегрино, Варсано** (Sulle regioni di definizione dei funzionali analitici non lineari. Pellegrino Franco, Varsano Sami), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 176—180 (итал.)

Пусть $S$ — пространство локально аналитических бирегулярных функций (см. Lvy P., Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle, Paris, 1951, 361—363). Функции, принадлежащие $(A, \sigma)$-окрестности некоторой функции $y_0$ из $S$, равномерно ограничены в $A$. Если $A$ не содержит бесконечности, то $\bigcup_y[A]\equiv\sigma(y_0)$, где $y$ пробегает $(A, \sigma)$-окрестность $y_0$. Пусть $R$ — нелинейная область в $S$, $A_y$ — множество всех баз $(A, \sigma)$-окрестностей $y$, лежащих в $R$. Если $A\subset A_y$, от через $\bar\sigma$ обозначим верхнюю грань значений $\sigma$, для которых $(A, \sigma)$-окрестность $y$ лежит в $R$. Тогда $(A, \bar\sigma)$-окрестность $y$ лежит в $R$. Такая окрестность называется максимальной окрестностью с базой $A$. Если две (окрестности $(A_1, \sigma_1)$ и $(A_2, \sigma_2)$ функции $y$ лежат в одной и той же области $R$ и если $A_1\supset A_2$, а $(A_1\sigma)$ — максимальная окрестность, то $\sigma_1\geqslant\sigma_2$. Если одна окрестность содержит другую и вторая максимальна, то $A_2\supset A_1$ и $\sigma_2\geqslant\sigma_1$. Если же $A_2$ не содержит при этом бесконечности, то $\sigma_1=\sigma_2$ и окрестность $(A_1, \sigma_1)$ максимальна. Рассматриваются продолжения локально аналитических функционалов. Область определения полиномиального или целого локально аналитического функционала можно продолжить до области, являющейся объединением линейных областей, а любой функционал, определенный в объединении линейных областей, полиномиален или целый. Если при этом $\bigcup A$ не покрывает сферы, то он может быть определен во всей области $\bigcup(A)$ одним разложением Фантапие. Если $\bigcap A\neq 0$, то область $R\equiv\bigcup(A)$ лежит в линейной области.

Н. Я. Виленкин

**1484. О некоторых пространствах аналитических функций. I. II. Гротендик** (Sur certains espaces de fonctions holomorphes. I, II. Grothendieck Alexandre), J. reine und angew. Math., 1953, **192**, № 1, 35—64; № 2, 77—95 (франц.)

Автор развивает и обобщает результаты, содержащиеся в работах Кёте и Тильмана (РЖМат, 1955, 1377, 1378). Рассматриваются абстрактные локально-аналити-

ческие функции одного или нескольких комплексных аргументов со значениями в некотором векторном локально-выпуклом пространстве $E$. Устанавливаются некоторые их свойства — аналог теоремы Коши, формулы Коши, ряда Тейлора и т. п. Подобные рассмотрения встречались в литературе (см., например, Гельфанд, Райков, Шилов, Успехи матем. наук, 1946, 1, № 2, 49—146, и Хилл «Функциональный анализ и полугруппы», М., Изд-во ин. лит., 1951) для более узких классов линейных пространств. Автор изучает пространства, построенные из таких функций, устанавливает двойственность между определенными пространствами такого рода и линейные отображения таких пространств. Пусть $\Omega_1$ — подмножество римановой сферы $\Omega$, причем $\Omega_1 \neq \Omega$. Пространство $P(\Omega_1, E)$ состоит из функций $u(z)$, локально-аналитических на некотором открытом множестве $H \supset \Omega_1$ ($H$ зависит от $u(z)$) со значениями в локально-выпуклом пространстве $E$. Используя построения Кёте из вышеупомянутой работы, автор вводит в $P(\Omega_1, E)$ топологию, которая в случае, когда $\Omega_1$ — открытое множество, дает сходимость, совпадающую с обычной сходимостью на всяком ограниченном замкнутом множестве, лежащем в $\Omega_1$. Основной результат:

Теорема 2 bis. Пусть $\Omega_1$ и $\Omega_2$ — взаимно дополнительные непустые подмножества римановой сферы $\Omega$, $E$ — локально-выпуклое векторное пространство и $E'$ — сопряженное к нему пространство (т. е. пространство линейных функционалов над $E$). Тогда двойственным к $P(\Omega_1, E)$ является подпространство пространства $P(\Omega_2, E')$, состоящее из тех локально-аналитических на $\Omega_2$ функций, которые имеют локально-равномерно-непрерывный образ в $E'$. В случае, когда $\Omega_1$ — открытое множество, сформулированная теорема была доказана Сильвой (Silva J., Portug. math., 1950, 9, 1—130). Указываются условия на $E$, при которых двойственным к $P(\Omega_1, E)$ является все $P(\Omega_2, E')$. В частности, этот факт имеет место, когда $E$ метризуемо и полно. Если $E = \Omega$, то получаем пространства обычных локально-аналитических функций, двойственные соотношения в которых были изучены Кёте и Тильманом.

Теорема 3. Пусть $E$ и $F$ — два локально-выпуклых пространства, причем $F$ полно, а $E$ таково, что в нем замкнутая круговая выпуклая оболочка каждого компактного множества компактна. Пусть $L_s(E, F)$ — пространство линейных непрерывных отображений $E$ в $F$ с топологией простой сходимости. Пусть $\Omega_1$ и $\Omega_2$ — непустые взаимно дополнительные множества римановой сферы. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между классом ограниченных линейных отображений $P(\Omega_1, E)$ в $F$ и некоторым подклассом функций пространства $P(\Omega_2, L_s(E, F))$. Во второй части работы изучается внутренняя топологическая структура построенных пространств, а также различных множеств в них. Доказывается, в частности, критерий компактности множеств в этих пространствах, являющийся аналогом теоремы Монтеля, критерии слабой компактности и т. д. Для установления некоторых результатов автор пользуется вложением своих пространств в пространства бесконечно дифференцируемых функций, рассматривавшиеся Шварцем (Schwartz L., Théorie des distributions, t. 1, 2, Actual. Sci. et Ind., № 1091, 1122, Paris, Hermann).

Г. Ц. Тумаркин, С. Я. Хавинсон

**1485. Об одном обобщении спектральной теории линейных операторов (на основе показательной функции).** Фаге М. К., Докл. АН СССР, 1954, 95, № 4, 721—724

Из представления резольвенты $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ ограниченного оператора $A$ при $|\lambda| > \|A\|$ в виде

$$R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \lambda^{-n-1} \tag{1}$$

следует формула

$$A^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \lambda^n R(\lambda)\, d\lambda, \tag{2}$$

где $C$ — замкнутый контур, содержащий круг $|\lambda| \leqslant \|A\|$. Если оператор $A$ самосопряжен, то функция $R(\lambda)$ регулярна во всей плоскости $\lambda$, за исключением ограниченного множества $S$ точек вещественной оси (спектра оператора $A$), и из формулы (2) с помощью деформации контура $C$ и предельного перехода можно получить спектральное разложение оператора $A$ и его итераций. Автор ставит задачу о получении подобным путем аналога спектрального разложения для несамосопряженных операторов, спектр которых состоит из одной точки $\lambda = 0$. В этом случае непосредственное использование формулы (2) приводит к тривиальному результату $A^n = A^n$, так как контур $C$ можно стянуть к точке $\lambda = 0$. Рассматривая ряд (1) как преобразование Бореля функции

$$E(z) = e^{zA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n A^n}{n!}, \tag{3}$$

так что

$$E(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{\lambda z} R(\lambda)\, d\lambda, \tag{4}$$

автор ограничивается случаем, когда оператор $A$ является обращением дифференциального оператора $L$ порядка $m$ в конечном интервале $0 \leqslant x \leqslant a$ с условиями Коши $y^{(k)}(0) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$. Далее вводится характеристическая функция

$$R^*(x, s, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(m+1)n]!\, A_n(x, s)}{n!} \frac{1}{\lambda^{(m+1)n+1}}$$

ядра $A(x, s)$ как преобразование Бореля функции $E(x, s; z^{m+1})$, где $A_n(x, s)$ — ядро интегрального оператора $A^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, а

$$E(x, s; z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n A_n(x, s)}{n!}$$

— ядро интегрального оператора $e^{zA} - I$. В отличие от резольвентного ядра $R(x, s; \lambda)$, характеристическая функция $R^*(x, s; \lambda)$ уже не является целой функцией от $\lambda^{-1}$, так что в формулах

$$A_n(x, s) = \frac{1}{2\pi i} \frac{n}{(mn+n)!} \oint_C R(x, s; \lambda)\, \lambda^{mn+n} d\lambda,$$

$$E(x, s; z^{m+1}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C R(x, s; \lambda) e^{\lambda z}\, d\lambda$$

контур интегрирования нельзя стянуть к точке $\lambda = 0$, как в (2), (4) и, следовательно, деформация пути в сочетании с предельным переходом в этих формулах может привести к некоторым интегральным представлениям для $A_n(x, s)$ и $E(x, s; z^{m+1})$. Таким путем в частном случае, когда $L = y^{(m)}$, получена

Теорема. Для краевой задачи, определяемой оператором $L = y^{(m)}$ с начальными условиями $y^{(k)}(0) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$, существует функция $f(x, s; t)$, определенная и аналитическая по $t$ на интервале $0 \leqslant t < (m+1)\left(\frac{x-s}{m}\right)^{m/(m+1)} = r_0(x-s)$, обращающаяся в $\infty$, как $[t - r_0(x-s)]^{-1/2}$ на его правом

конце $r_0(x-s)$, и такая, что итерации $A_n(x, s)$ функции влияния $A(x, s)$ и ее показательная функция $E(x, s; z^{m+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-s)^{mn-1} z^{mn+n}}{(mn-1)!\, n!}$ (без начального члена $I$) имеют интегральные представления

$$A_n(x, s) = \frac{n!}{(mn+n)!} \int_0^{r_0(x-s)} f(x, s; t)\, dt^{mn+n},$$

$$E(x, s; z^{m+1}) =$$

$$= \int_0^{r_0(x-s)} f(x, s; t)\, d\left\{\frac{1}{m+1}(e^{tz} + e^{tz\varepsilon} + \ldots + e^{tz\varepsilon^m})\right\},$$

где $\varepsilon$ — первообразный корень $(m+1)$-й степени из единицы. Эти формулы автор считает аналогом спектрального разложения. В формуле (16) заметки допущена погрешность, исправленная автором в Докл. АН СССР, 1954, 97, № 4, 572. И. М. Глазман

**1486. Об одном классе операторов в пространстве интегрируемых функций.** Орлич (On a class of operations over the space of integrable functions. Orlicz W.), Studia math., 1954, 14, № 2, 302—309 (англ.)

Пусть $M[u]$ — выпуклая функция, не убывающая на $[0, \infty)$, обращающаяся в нуль только при $u = 0$ и такая, что $\lim_{u\to 0+} u^{-1}M[u] = 0$, $\lim_{u\to\infty} u^{-1}M[u] = \infty$. Тогда символ $L^M$ означает пространство Орлича, образуемое измеримыми функциями $x = x(t)$, для каждой из которых существует постоянная $k > 0$ такая, что $\int_a^b M[k\,|\,x(t)\,|]\, dt < \infty$; норма $\|x\|_M$ функции $x$ определяется как нижняя грань чисел $l > 0$, для которых

$$\int_a^b M[l^{-1}\,|\,x(t)\,|]\, dt \leqslant 1.$$

Автор доказывает сначала несколько теорем об аппроксимации интегрируемых функций, с помощью которых он получает следующую основную теорему. Пусть оператор $U(x) = U(x, t)$, отображающий $L$ в $L$, удовлетворяет следующим условиям:

a) $U(0) = 0$; b) $\|U(x_1) - U(x_2)\|_L \leqslant K\|x_1 - x_2\|_L$; c) если функция $x$ ограничена, то $U(x, t)$ также есть ограниченная функция и

$$\operatorname{ess\,sup}_t \|U(x_1, t) - U(x_2, t)\| \leqslant \operatorname{ess\,sup}_t \|x_1(t) - x_2(t)\|.$$

Тогда $U(x) \in L^M$ для $x \in L^M$ и $\|U(x_1) - U(x_2)\|_M \leqslant K_1\|x_1 - x_2\|_M$ для $x_1, x_2 \in L^M$. A. Alexiewicz

**1487. Условия нормальности обыкновенного линейного дифференциального оператора.** Расулов М. Л., Тр. Азерб. ун-та, сер. физ.-матем., 1953, № 3, 110—118

Выводятся необходимые и достаточные условия нормальности дифференциального оператора $L$, порождаемого в $L^2(a, b)$ дифференциальной операцией

$$l = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(x)\frac{d^k}{dx^k} \quad (p_0(x) \neq 0,\ a \leqslant x \leqslant b),$$

заданной на конечном интервале, и системой $n$ линейно-независимых краевых условий

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} f^{(k-1)}(a) + \beta_{ik} f^{(k-1)}(b) = 0.$$

В соответствии с общим определением оператор $L$ называется нормальным, если

$$\mathfrak{D}_{LL^*} = \mathfrak{D}_{L^*L}, \tag{1}$$

$$LL^*f = L^*Lf \tag{2}$$

при $f \in \mathfrak{D}_{LL^*}$. Из последнего соотношения следует совпадение операций $l^*l$ и $ll^*$, откуда вытекает тождество

$$p_{n-s} \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^{k+m} \binom{k+m}{n} \overline{p}^{(k+n)}_{n-(k+m)} =$$

$$= p^{(r)}_{n-m} \sum_{k=0}^{n-s} (-1)^{k+s} \binom{k+s}{s} \overline{p}^{(k)}_{n-(k+s)} \tag{3}$$

$(r = 0, 1, \ldots, s;\ s = 0, 1, \ldots, n;\ m = 0, 1 \ldots, n)$.

Приведенное условие (3) очевидно достаточно для выполнения соотношения (2). Для нахождения условий, обеспечивающих соотношение (1), вводятся матрицы $A_1 = \|\alpha_{ik}\|$, $A_2 = \|\beta_{ik}\|$, $A = \|A_1, A_2\|$, а с помощью формулы Лагранжа

$$\int_a^b \{lf \cdot \overline{g} - f \cdot \overline{l}\,^* g\}\, dx = \|\overline{g(a)}, \ldots, \overline{g^{(n-1)}(a)}, g(b), \ldots,$$

$$\ldots, \overline{g^{(n-1)}(b)}\| \cdot P \cdot \|f(a), \ldots, f^{(n-1)}(a), f(b), \ldots, f^{(n-1)}(b)\|^*$$

вводится квадратная матрица $P$ порядка $2n$, зависящая от значений коэффициентов операции $l$ и их производных на концах интервала. Для нормальности оператора $L$ необходимо и достаточно выполнение условия (3), условия $A(P^*)^{-1}A^* = 0$ и условия «ранг $B$ = ранг $C = n$», где $B$ и $C$ — некоторые квадратные матрицы порядка $2n$, зависящие от матрицы $A$ и от значений коэффициентов операции $l$ и их производных на концах интервала (в статье дается явное выражение для $B$ и $C$). В выкладках и формулах имеется значительное количество опечаток. И. М. Глазман

**1488. Алгебры дифференцируемых функций.** Майерс (Algebras of differentiable functions. Myers S. B.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 6, 917—922 (англ.)

Рассматривается кольцо $C^r(M)$, $1 \leqslant r < \infty$, $r$ раз непрерывно дифференцируемых функций на компактном дифференцируемом многообразии $M$ класса $C^r$. Основные результаты: 1. Если $M_1$, $M_2$ — компактные дифференцируемые многообразия класса $C^r$ и если кольца $C^r(M_1)$ и $C^r(M_2)$ изоморфны, то существует дифференцируемый гомеоморфизм класса $C^r$ многообразия $M_1$ на $M_2$, причем обратный гомеоморфизм также принадлежит классу $C^r$. 2. Если на $M$ класса $C^r$ задан риманов тензор $g_{ij}$ класса $C^{r-1}$, то относительно нормы

$$\|f\| = \max_{x\in M} |f(x)| + \max_{x\in M} \left(g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)^{1/2}$$

$C^r(M)$ есть вещественное, полупростое нормированное кольцо с единицей, полное при $r = 1$. Если два таких нормированных кольца $C^r(M)$ и $C^r(N)$ эквивалентны, т. е. изоморфны и нормы их эквивалентны, то существует изометрия класса $C^r$ многообразия $M$ на многообразие $N$. М. А. Наймарк

**1489. К теории сингулярных дифференциальных операторов.** Глазман (On the theory of singular differential operators. Glazman I. M.), Amer. Math. Soc. Translation № 96, 1953, 43 pp. (англ.)

Перевод из журнала «Успехи матем. наук», 1950, 5, № 6, 102—135.

**1490. Полное частичное упорядочение и гипотеза Важони.** К р а с к а л (Well-partial-ordering and Vazsonyi's conjecture. K r u s k a l J o s e p h B., Jr), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 35 (англ.)

Пусть $X$ — частично упорядоченное множество, $A \subset X$. Множество $U$ называется вершиной (upper) $A$, если для любого $y \in A$ либо $y \in U$, либо $y \leqslant x \in U$. $X$ называется вполне частично упорядоченным, если вершина любого непустого $A \subset X$ совпадает с вершиной конечного $F \subset A$. Граф (Биркгоф Г., Теория структур, Изд. ин. лит., гл. I, § 5) называется деревом, если он связен и не имеет петель. Граф имеет третий порядок, если в каждой вершине сходится не более трех ребер. Множество графов можно частично упорядочить: $G_1 \leqslant G_2$, если $G_1$ гомеоморфно погружается в $G_2$. Автор доказал гипотезу Важони о полной частичной упорядоченности пространства деревьев. Соответствующий результат о графах третьего порядка получить не удалось.

А. Н. Балуев

**1491. Произведения линейных полуупорядоченных пространств. Н а к а н о** (Product spaces of semi-ordered linear spaces. N a k a n o H i d e g o r ô), J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., 1953, Ser. 1, **12**, № 4, 163—210 (англ.)

В начале статьи изучаются билинейные функционалы в $K$-пространствах. Билинейный функционал $\varphi(x, y)$ называется ограниченным, если для любых $x, y \geqslant 0$

$$\sup \sum_{k,l} |\varphi(x_k, y_l)| < +\infty,$$

где верхняя грань берется по всевозможным конечным разбиениям $x = \sum x_k$, $y = \sum y_l$ на положительные слагаемые $x_k$, $y_l \geqslant 0$. При естественном упорядочении множество ограниченных билинейных функционалов, определенных на заданной паре $K$-пространств, является $K$-пространством. Пусть $X$ и $Y$ — два $K$-пространства, а $\overline{x}$ и $\overline{y}$ — вполне линейные функционалы (по терминологии автора, универсально непрерывные), заданные на $X$ и $Y$ соответственно. Произведение этих двух функционалов, определяемое равенством $\overline{xy}(x, y) = \overline{x}(x)\,\overline{y}(y)$, оказывается ограниченным билинейным функционалом и играет важную роль во всей работе. Произведением $K$-пространств $X$ и $Y$ называется $K$-пространство $W$ такое, что: 1) каждой паре элементов $x \in X$, $y \in Y$ соответствует элемент $w = (xy)^W \in W$, причем соответствие $(x, y) \to (xy)^W$ билинейно и вполне линейно по каждому аргументу (вполне линейность по аргументу $x$ означает, что если $x = \inf x_\alpha$ и $y \geqslant 0$, то $(xy)^W = \inf (x_\alpha y)^W$); 2) замыкание множества всех элементов вида $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x_k, y_k)^W$, где $\alpha_k \geqslant 0$, $x_k, y_k \geqslant 0$, совпадает с положительным конусом $K$-пространства $W$. Дальнейшая часть работы посвящена изучению произведения $K$-пространств; в частности, рассматривается вопрос о введении нормы в произведении, если исходные $K$-пространства нормированы; рассматривается также и случай модулярных $K$-пространств.

Б. З. Вулих

**1492. Показатели модулированных полуупорядоченных линейных пространств. Я м а м у р о** (Exponents of modulared semi-ordered linear spaces. Y a m a m u r o S a d a y u k i), J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 1953, Ser. 1, **12**, № 4, 211—253 (англ.)

Полуупорядоченное линейное пространство $R$ называется модулированным, если в нем определен функционал $m(a)$ ($a \in R$), называемый модулем и обладающий следующими свойствами: $0 \leqslant m(a) \leqslant \infty$ для всех $a \in R$; если $m(\xi a) = 0$ для всех чисел $\xi > 0$, то $a = 0$; для каждого $a \in R$ можно указать такое число $\xi > 0$, что $m(\xi a) < \infty$; $m(\xi a)$ — выпуклая функция относительно $\xi > 0$; из $|a| \leqslant |b|$ вытекает $m(a) \leqslant m(b)$; если $a \cap b = 0$, то $m(a + b) = m(a) + m(b)$; из условия $0 \leqslant a_\lambda \downarrow a$ следует, что $m(a) = \sup_\lambda m(a_\lambda)$.

Модулированные полуупорядоченные линейные пространства изучались подробно Накано (Nakano H., Modulared semi-ordered linear spaces, Tokyo Math. Book Series, Vol. I, Maruzen, 1950). Показатели, определенные автором, являются обобщением соответствующих понятий, введенных Накано. Изучаются свойства показателей и связанные с ними свойства модулей. Приведем некоторые определения и несколько доказанных в работе утверждений.

В силу выпуклости $m(\xi a)$ как функции от $\xi$ у нее существует правая производная $\pi(\xi \mid a) = \lim_{\varepsilon \to 0} [(m((\xi + \varepsilon)a) - m(\xi a))/\varepsilon]$ при $m(\xi a) < \infty$ и $\pi(\xi | a) = \infty$ при $m(\xi a) = \infty$. Определяется несколько типов показателей. Показатели элементов: $\chi^\pi(a) = \inf \alpha$ ($\chi_\pi(a) = \sup \alpha$), где infimum (supremum) распространен на те $\alpha \geqslant 1$, для которых $\pi(1 \mid \xi a)/\xi^\alpha$ есть убывающая (возрастающая) функция $\xi$; $\chi^m(a) = \inf \alpha\,(\chi_m(a) = \sup \alpha)$, где infimum (supremum) распространен на те $\alpha \geqslant 1$, для которых $m(\xi a)/\xi^\alpha$ есть убывающая (возрастающая) функция $\xi$. Показатели множества $M \subset R$: $\chi^\pi(M) = \sup_{x \in M} \chi^\pi(x)$, $\chi_\pi(M) = \inf_{x \in M} = \chi_\pi(x)$, $\chi^m(M) = \sup_{x \in M} \chi^m(x)$, $\chi_m(M) = \inf_{x \in M} \chi_m(x)$. Если $M = R$, то соответствующие показатели всего пространства обозначаются просто $\chi^\pi$, $\chi_\pi$, $\chi^m$, $\chi_m$. Элемент $a \in R$, для которого существуют такие числа $\alpha, \gamma > 1$, что $m(\alpha\xi a) \leqslant \gamma m(\xi a)$ для всех $\xi > 0$, называется ограниченным сверху. Если существуют такие $\gamma > \alpha > 1$, что $m(\alpha\xi a) \geqslant \gamma m(\xi a)$ для всех $\xi > 0$, то элемент $a \in R$ называется ограниченным снизу. Через $\overline{R}^m$ обозначается пространство таких линейных функционалов $\overline{a}$, определенных на $R$, что $\sup_{m(x) \leqslant 1} |\overline{a}(x)| < \infty$ и из условия $a_\lambda \downarrow 0$ следует, что $\inf_\lambda |\overline{a}(a_\lambda)| = 0$. $\overline{R}^m$ становится модулированным полуупорядоченным линейным пространством, если в нем определить модуль $\overline{m}(\overline{a})$ равенством: $\overline{m}(\overline{a}) = \sup_{x \in R} \{\overline{a}(x) - m(x)\}$. Показатели в $\overline{R}^m$ обозначаются через $\chi^{\overline{\pi}}$, $\chi_{\overline{\pi}}$, $\chi^{\overline{m}}$, $\chi_{\overline{m}}$. В модулированном полуупорядоченном линейном пространстве $R$ можно определить две нормы. Первая норма:

$$\|a\| = \inf_{\xi > 0} [(1 + m(\xi a))/\xi]$$

и вторая норма:

$$|||a||| = \inf_{m(\xi a) \leqslant 1} [1/|\xi|].$$

Т е о р е м а 3.3. Для того чтобы элемент $a \in R$ был ограничен сверху, необходимо и достаточно, чтобы показатель $\chi^m(a)$ был конечен.

Т е о р е м а 3.4. Для того чтобы элемент $a \in R$ был ограничен снизу, необходимо и достаточно, чтобы показатель $\chi_m(a)$ был строго больше единицы.

Т е о р е м а 3.5. Если $\pi(1 \mid \xi a)/m(\xi a)$ как функция от $\xi$ убывает, то $\chi^\pi_\bullet(a) = \chi^m(a)$; если эта функция возрастает, то $\chi_\pi(a) = \chi_m(a)$.

Т е о р е м а 5.1. Имеет место соотношение

$$\frac{1}{\chi^m} + \frac{1}{\chi_{\overline{m}}} = \frac{1}{\chi_m} + \frac{1}{\chi^{\overline{m}}} = 1.$$

Теорема 5.3. Для любого элемента $a \in R$ такого, что $\chi^{\pi}(a) < \infty$, существует такой линейный функционал $a \in R^m$, что

$$\frac{1}{\chi^{\pi}(a)} + \frac{1}{\chi_{\pi}(a)} = 1.$$

Теорема 6.1. Справедливы соотношения: $|||a|||^{\chi_m} \geqslant m(a)$, $|||a|||^{\chi^m} \leqslant m(a)$, если $|||a||| \leqslant 1$, и $|||a|||^{\chi^m} \geqslant m(a)$, $|||a|||^{\chi_m} \leqslant m(a)$, если $|||a||| \geqslant 1$. Кроме того, $|||a+b|||^{\chi_m} \leqslant |||a|||^{\chi_m} + |||b|||^{\chi_m}$, $|||a+b|||^{\chi^m} \geqslant |||a|||^{\chi^m} + |||b|||^{\chi^m}$, если только $|a| \cap |b| = 0$.

Теорема 6.3. Имеют место неравенства:

$$\|a\| \leqslant p^{1/p} p'^{1/p'} |||a||| \qquad (a \in R),$$

если $p \leqslant 2$, и

$$\|a\| \leqslant q^{1/q} q'^{1/q'} |||a||| \qquad (a \in R),$$

если $q \geqslant 2$, и всегда

$$\min\{p^{1/p} p'^{1/p'},\ q^{1/q} q'^{1/q'}\} |||a||| \leqslant \|a\| \leqslant 2 |||a|||,$$

если только $p = \chi^m$, $q = \chi_m$, $p' = \chi_{\overline{m}}$, $q' = \chi^{\overline{m}}$ конечны. Как замечает автор, часть результатов может быть получена без предположения о полуупорядоченности линейного модулированного пространства $R$. Опечатки: на стр. 237, 9 строка сверху, напечатано $q \leqslant 2$ вместо $q \geqslant 2$; там же, 11 строка снизу, напечатано $p \leqslant 1$ вместо $p \leqslant 2$ и ссылка на теорему 4.1 вместо ссылки на теорему 5.1. Имеются и другие опечатки. Библ. 19 назв.

Я. Б. Рутицкий

**1493. Эндоморфизмы в частично упорядоченных линейных пространствах. Бонсалл** (Endomorphisms of partially ordered vector spaces. Bonsall Frank Featherstone), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 2, Amsterdam, 1954, 87 (англ.)

Пусть $V$ — частично упорядоченное множество с единицей, $A$—эндоморфизм в $V$ (реф. 1494). Положим: $p_e(x) = \inf_{\xi \in R, \xi e \geqslant x} \xi$. Тогда существует положительный линейный функционал $\varphi(x)$ такой, что $\varphi(Ax) = \rho\varphi(x)$, где $\rho = \lim_{n\to\infty} \{p_e(A^n e)\}^{1/n}$. Доказательство отсутствует. Утверждается, что из этой теоремы вытекают некоторые результаты Крейна и Рутмана о пространствах с конусом положительных элементов.

А. Н. Балуев

**1494. Выпуклые функционалы и идеалы в частично упорядоченных линейных пространствах. Бонсалл** (Sublinear functionals and ideals in partially ordered vector spaces. Bonsall F. F.), Proc. London Math. Soc. 1954, 4, № 16, 402—418 (англ.)

Рассматривается частично упорядоченное линейное пространство $V$ с конусом $V^+$ положительных элементов, удовлетворяющих аксиомам: 1) из $x, y \in V^+$ и $\alpha \geqslant 0$ следует: $x+y, \alpha x \in V^+$; 2) из $x, -x \in V^+$ следует: $x = 0$. Линейное подмножество $I$ называется идеалом, если из $i \in I$ и $-i \leqslant x \leqslant i$ следует: $x \in I$. Гомоморфизмом называется такое линейное отображение $T$ пространства $V$ в $V_1$, что $TV^+ \subset V_1^+$. $e \in V^+$ называется единицей, если для любого $x \in V$ найдется $\xi$ такое, что $-\xi e \leqslant x \leqslant \xi e$. Исследуется структура идеалов в $V$. Отметим следующие результаты: если $V$ имеет единицу, $I$ — нетривиальный идеал в $V$, то существуют максимальный идеал $M$ и положительный линейный функционал $\varphi$ такие, что $I \subset M$, $\varphi(M) = 0$, $\varphi(e) = 1$. Опираясь на полученные результаты, автор дает новое доказательство теоремы Хана — Банаха о продолжении линейного функционала и обобщает теорему Крейна — Мильмана об экстремальных точках регулярно выпуклого множества функционалов.

Пусть $T$ — эндоморфизм в $V$, $I$ — идеал. $I$ допускает $T$, если $T(I) \subset I$. Если ни один нетривиальный идеал не допускает $T$, то либо $V = 0$, либо $V$ изоморфно пространству $R$ вещественных чисел. Если $V$ имеет единицу, не изоморфно $R$ и не есть 0, то всякий эндоморфизм допускается некоторым максимальным идеалом. Пусть $T$ — эндоморфизм, не совпадающий с умножением на постоянную, а $\mathfrak{A}$ — класс всех эндоморфизмов, коммутирующих с $T$. Тогда существует нетривиальный идеал, допускающий все эндоморфизмы из $\mathfrak{A}$. Пусть $p(x) = \inf_{x \leqslant \xi e} \xi$, а $T$ — эндоморфизм, для которого существует $\lambda$ такое, что $p(Tx) \leqslant \lambda p(x)$. Тогда существует положительный линейный функционал $\varphi$ такой, что $\varphi(Tx) = \lambda\varphi(x)$, $\varphi(e) \neq 1$. Из последнего результата вытекает, в частности, следующее: пусть $p(x)$ — выпуклый функционал в линейном пространстве $X$ и $T$ — линейное преобразование $X$ в себя, для которых существует такое $\lambda$, что $p(Tx) \leqslant \lambda p(x)$. Тогда существует линейный функционал $\varphi$ со свойствами $\varphi(x) \leqslant p(x)$, $\varphi(Tx) = \lambda\varphi(x)$.

А. Н. Балуев

**1495. О производящем операторе сильно эргодической полугруппы операторов. Миядера** (On the generation of a strongly ergodic semi-group of operators. Miyadera Isao), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 5, 335—340 (англ.)

Краткое изложение результатов автора (реф. 1496).

Д. А. Васильков

**1496. О производящем операторе сильно эргодической полугруппы операторов. Миядера** (On the generation of a strongly ergodic semi-group of operators. Miyadera Isao), Tôhoku Math. J., 1954, **6**, № 1, 38—52 (англ.)

Рассматривается семейство ограниченных линейных операторов $T(\xi)$ $(0 < \xi < \infty)$ в комплексном банаховом пространстве $X$, удовлетворяющее условиям: (a) $T(\xi+\eta) = T(\xi)T(\eta) = T(\eta)T(\xi)$, (b) $T(\xi)$ сильно измеримо в $(0, \infty)$, (c) $\|T(\xi)\|$ ограничена при $\xi = \infty$. Полугруппа $\{T(\xi)\}$ называется сильно эргодической в смысле Абеля в нуле, если $\int_0^1 \|T(\xi)\| d\xi < \infty$ и $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \times \int_0^\infty e^{-\lambda\xi} T(\xi) x d\xi = x$ для всех $x \in X$. Автор вводит множество $\Sigma$ точек (C, 1)-непрерывности полугруппы: $\Sigma = \{x;\ \lim_{\xi\to 0} \xi^{-1} \int_0^\xi T(\eta) x d\eta = x\}$. Если положить $N(x) = \sup_{\xi>0} \|\xi^{-1} \int_0^\xi T(\eta) x d\eta\|$ $(x \in \Sigma)$, то $\Sigma$ оказывается банаховым пространством с нормой $N(x)$. Полугруппа $\{T(\xi)\}$ называется сильно (C, 1)-эргодической в нуле, если $\int_0^1 \|T(\xi)\| d\xi < \infty$ и $\Sigma = X$. Бесконечно малый производящий оператор $A$ полугруппы $\{T(\xi)\}$ определяется равенством $Ax = \lim_{h\to 0} h^{-1}[T(h) - I]x$ для тех $x$, для которых левая часть существует и принадлежит $\Sigma$.

Основные результаты:

Пусть $\{T(\xi)\}$ удовлетворяет условиям (a) — (c) и сильно эргодична в смысле Абеля в нуле. Тогда (I) при $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ оператор $R(\lambda; A)$ $R(\lambda; A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda\xi} T(\xi) x d\xi$ отображает $X$ в $\Sigma$, причем $(\lambda - A)R(\lambda; A)x = x$ $(x \in \Sigma)$, $R(\lambda; A)(\lambda - A)x = x$ $(x \in D(A))$; (II) $D(A)$ плотно в $X$; (III) существует такое $M$, что $\|\lambda R(\lambda; A)\| \leqslant M$ $(\lambda > 1)$; (IV) на $(0, \infty) \times X$ существует неотрицательная функция $f(\xi, x)$, обладающая свойствами: (a′) $f(\xi, x)$ измерима по $\xi$ при любом $x \in X$, (b′) $f(\xi) = \sup_{x\in X}(f(\xi, x)/\|x\|)$ интегрируема в промежутках $[0, \varepsilon]$, ограничена и измерима в $[\varepsilon, \infty]$ $(\varepsilon > 0)$, (c′) $\sup_{x\in X}(f(\xi, R(1; A)x)/\|x\|$ ограничен в $[0, \infty)$, (d′) при всех $x \in X$ производные от $R(\lambda; A)$ по $\lambda$ удовле-

творяют неравенствам $\|R^{(k)}(\lambda; A)x\| \leqslant (-1)^k F^{(k)}(\lambda, x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где $F(\lambda, x) = \int_0^\infty e^{-\lambda\xi} f(\xi, x)\, d\xi$ $(\lambda > 0)$; (V) $N(x) = \sup_{k\geqslant 1,\, \lambda>0} \|k^{-1} \sum_{i=1}^{k} [\lambda R(\lambda; A)]^i x\|$ $(x \in \Sigma)$. Обратно, если $\Sigma$ — линейное подмножество в $X$, оператор $A$ с областью определения $D(A)$ и областью значений $\Sigma$ удовлетворяет условиям (I) — (IV), функция $N(x)$, определенная согласно (V), конечна в $\Sigma$, множество $\Sigma$ с нормой $N(x)$ оказывается банаховым пространством и в нем $D(A)$ плотно, то существует полугруппа $\{T(\xi);\ 0 < \xi < \infty\}$, удовлетворяющая условиям (a) — (c) и сильно эргодическая в смысле Абеля в нуле, для которой $A$ служит производящим оператором, а $\Sigma$ — множеством точек (C, 1)-непрерывности; при этом $N(x) = \sup_{\xi>0} \|\xi^{-1} \int_0^\xi T(\eta)\, x\, d\eta\|$ на $\Sigma$. Пусть $\{T(\xi)\}$ удовлетворяет условиям (a) — (c) и сильно (C, 1)-эргодична в нуле. Тогда (I′) $A$ есть замкнутый линейный оператор, спектр которого заключен в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$; (II′) $D(A)$ плотно в $X$; (III′) существует такое $M$, что $\sup_{k\geqslant 1,\, \lambda>0} \|k^{-1} \sum_{i=1}^{k} [\lambda R(\lambda; A)]^i x\| \leqslant M\|x\|$ для всех $x \in M$; кроме того, $A$ обладает свойством (IV). Обратно, если оператор $A$ с областью определения $D(A)$ и областью значений $\Sigma$ обладает свойствами (I′) — (III′) и (IV), то существует полугруппа $\{T(\xi);\ 0 < \xi < \infty\}$, удовлетворяющая условиям (a) — (c) и сильно (C, 1)-эргодическая в нуле, для которой $A$ служит производящим оператором. Результаты, относящиеся к чезаровскому случаю, весьма близки к результатам Филлипса (РЖМат, 1955, 3840).

Опечатки к статье см. Tôhoku Math. J., 1954, 6, № 2—3.

Д. А. Васильков

**1497. О производящих операторах сильно эргодических полугрупп операторов. II. Миядера** (On the generation of strongly ergodic semi-groups of operators. II. Miyadera Isao), Tôhoku Math. J., 1954, 6, № 2—3, 231—242 (англ.)

Рассматривается полугруппа ограниченных линейных операторов $T(\xi)$ в комплексном банаховом пространстве $X$, удовлетворяющая условиям: (a) $T(\xi + \eta) = T(\xi)\, T(\eta)$ $(\xi, \eta \geqslant 0)$, $T(0) = I$, (b) $T(\xi)$ сильно измерима на $(0, \infty)$, (c) $\int_0^1 \|T(\xi)\, x\|\, d\xi < \infty$ при любом $x \in X$. Полугруппа относится к классу (0, A) или $(0, C_\alpha)$, если она удовлетворяет соответственно условию (d) $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda\xi} T(\xi)\, x\, d\xi = x$ $(x \in X)$ или (e) $\lim_{\tau\to 0} \alpha\tau^{-\alpha} \int_0^\tau (\tau - \xi)^{\alpha-1} T(\xi)\, x\, d\xi = x$ $(x \in X)$. Если при этом вместо (c) выполняется (c′) $\int_0^1 \|T(\xi)\|\, d\xi < \infty$, то $\{T(\xi)\}$ относится соответственно к классу (1, A) или $(1, C_\alpha)$. Бесконечно малый производящий оператор $A$ полугруппы определяется как обычно и вводится полный бесконечно малый производящий оператор — наименьшее замкнутое расширение оператора $A$ (см. РЖМат, 1955, 3840).

Устанавливаются условия, при которых замкнутый линейный оператор является полным производящим оператором некоторой полугруппы класса (0, A) или $(0, C_\alpha)$. Кроме того, устанавливаются условия, при которых существует полугруппа класса (0, A) или $(0, C_\alpha)$ с заданным производящим оператором, если пользоваться определением производящего оператора, предложенным автором (см. реф. 1496). Основные результаты, относящиеся к случаю (0, A):

Замкнутый линейный оператор $A$ есть полный производящий оператор некоторой полугруппы $\{T(\xi)\}$ класса (0, A) такой, что $\int_0^\infty \|T(\xi)\, x\|\, d\xi < \infty$ для всех $x \in X$, тогда и только тогда, когда (I) спектр $A$ лежит в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$; (II) $D(A)$ плотно в $X$; (III) существует $M$ такое, что $\|\lambda R(\lambda; A)\| \leqslant M$ при действительных $\lambda \geqslant 1$, где $R(\lambda; A)$ — резольвента оператора $A$; (IV) существует неотрицательная функция $f(\xi, x)$ на $(0, \infty) \times X$, обладающая свойствами: (a′) $f(\xi, x)$ непрерывна по $\xi$ и интегрируема на $(0, \infty)$ при любом $x \in X$. (b′) $\|R^{(k)}(\lambda; A)\, x\| \leqslant (-1)^k F^{(k)}(\lambda; x)$ для всех $x \in X$, $\lambda > 0$ и целых $k \geqslant 0$, где $F(\lambda, x) = \int_0^\infty e^{-\lambda\xi} f(\xi, x)\, d\xi$. При этом для всех $x \in X$ и $\xi > 0$ $\|T(\xi)\, x\| \leqslant f(\xi, x)$ и $T(\xi)\, x = \lim_{\lambda\to\infty} \exp[\xi(-\lambda + \lambda^2 R(\lambda; A))]\, x$. Далее сохраняется формулировка, приведенная в реферате 1496, если в ней полугруппу, удовлетворяющую условиям (a) — (c) и сильно эргодическую в смысле Абеля в нуле, заменить полугруппой класса (0, A) с $\int_0^\infty \|T(\xi)\, x\|\, d\xi < \infty$ $(x \in X)$ и в (IV) свойства (a′) — (d′) функции $f(\xi, x)$ заменить свойствами (a′) и (b′) из настоящего реферата. Результаты, относящиеся к случаю $(0, C_\alpha)$, получаются с помощью следующего предложения: полугруппа класса (0, A) принадлежит к классу $(0, C_\alpha)$ ($\alpha$ целое $> 0$) тогда и только тогда, когда существуют такие постоянные $M$ и $\omega \geqslant 0$, что

$$\sup_{\lambda>0,\, k\geqslant\alpha} \left\| \frac{\alpha}{k(k-1)\ldots(k-\alpha+1)} \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{i=1}^{k-\alpha+1} \frac{(k-i)!}{(k-\alpha+1-i)!} [\lambda R(\lambda + \omega; A)]^i \right\| \leqslant M,$$

где $R(\lambda; A)$ определена равенством $R(\lambda; A)\, x = \int_0^\infty e^{-\lambda\xi} T(\xi)\, x\, d\xi$.

Д. А. Васильков

**1498. О сильно (C, α)-эргодических полугруппах операторов. Миядера** (A note on strongly (C, α)-ergodic semi-group of operators. Miyadera Isao), Proc. Japan Acad., 1954, 30, № 9, 797—800 (англ.)

Пусть $\{T(\xi) : 0 < \xi < \infty\}$ — полугруппа ограниченных линейных операторов в некотором комплексном банаховом пространстве $X$, удовлетворяющая следующим условиям: 1) $T(\xi)$ сильно измерима на интервале $(0, \infty)$; 2) $\int_0^1 \|T(\xi)\, x\|\, d\xi < \infty$ для любого $x \in X$. Без ограничения общности можно предположить, что $\|T(\xi)\|$ ограничена при $\xi \to \infty$. $T(\xi)$ называется сильно эргодической по Абелю в нуле, если

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda\xi} T(\xi)\, x\, d\xi = x \qquad (1)$$

при всех $x \in X$. Если выполнено более сильное условие:

$$\lim_{\xi\to\infty} \alpha\xi^{-\alpha} \int_0^\xi (\xi - \eta)^{\alpha-1} T(\eta)\, x\, d\eta = x, \qquad (2)$$

при всех $x \in X$, то $T(\xi)$ называется сильно (C, α)-эргодической в нуле.

Теорема. Пусть $\alpha$ — целое положительное число. Для того чтобы полугруппа $T(\xi)$, сильно эргодическая по Абелю в нуле, была сильно (C, α)-эргодической в нуле, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое $M > 0$, что

$$\sup_{\lambda>0,\, k\geqslant\alpha} \left\| \frac{\alpha}{k(k-1)\ldots(k-\alpha+1)} \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{i=1}^{k-\alpha+1} \frac{(k-i)!}{(k-\alpha+1-i)!} [\lambda R(\lambda; A]^i \right\| \leqslant M.$$

Здесь $A$ — производящий оператор полугруппы и $R(\lambda; A)$ его резольвента. Этот результат обобщает теорему, полученную ранее независимо автором (реф. 1496) и Филлипсом (РЖМат, 1955, 3840). С. В. Фомин

**1499. Теория обобщенных функций. Темпл** (The theory of generalized functions. Temple G.), Proc. Roy. Soc., 1955, **A228**, № 1173, 175—190 (англ.)

Излагаются основы теории обобщенных функций. Исходя из того, что в обобщенном анализе непрерывные функции должны иметь «производные» всех порядков, автор эвристически устанавливает некоторые свойства обобщенных функций и приходит к трем эквивалентным конструктивным определениям обобщенных функций по Шварцу (Schwartz L., Théorie des distributions, t. 1, p. 24), по Микусинскому (Mikusiński J. G., Fundam. Math., 1948, 35, 235) и по Бохнеру (Bochner S., Vorlesungen über Fouriersche Integrale, 1932, 110—144). Автор излагает теорию по Микусинскому. Последовательность функций $\{g_m(x)\}$, заданных в $R^n$, называется регулярной, если 1) $g_m(x)$ имеют производные всех порядков. 2) $(g_m, \varphi) = \int_{R^n} g_m \varphi dx$ сходится для любой функции $\varphi \in D$ (обозначение Шварца, см. цит. соч. стр. 21) к некоторому пределу $\Gamma(\varphi)$. 3) $\Gamma(\varphi)$ непрерывно по $\varphi$ в $D$ (Шварц, цит. соч. стр. 24). Две регулярные последовательности $g_m(x)$ и $\{h_m(x)\}$ называются эквивалентными, если $(g_m - h_m, \varphi) \to 0$ при $m \to \infty$ для любой $\varphi \in D$. Обобщенная функция $g$ определяется как множество эквивалентных регулярных последовательностей $\{g_m\}$, которые в свою очередь изображают $g$. Автор показывает, что это определение эквивалентно определению Шварца. Далее автор вводит предельный переход в множестве обобщенных функций и доказывает две центральные теоремы о том, что обобщенные функции имеют производные всех порядков и что последовательность $\{g_m\}$ обобщенных функций, сходящуюся к обобщенной функции $g$, можно дифференцировать почленно любое число раз, затем вводятся интегрирование обобщенных функций, ряды Фурье для обобщенных функций на торе и интеграл Фурье для обобщенных функций на пространстве $\mathcal{S}$ (см. Шварц, цит. соч. стр. 89) и показывается, что ряды и интегралы Фурье сходятся к соответствующим функциям.

Ф. В. Широков

**1500. Задача Коши для линейного параболического уравнения в функциональном пространстве. Ходжаев Л. Ш.**, Докл. АН СССР, 1954, 99, № 1, 31—33

Устанавливается существование и единственность решения задачи Коши для неоднородного параболического уравнения порядка $2p$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=0}^{2p} \sum_{k_1 + \ldots + k_n = j} a_{k_1 \ldots k_n}(t) \frac{\partial^j u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = \rho(x, t)$$

в пространстве линейных непрерывных функционалов $(u, \varphi)$ над конечно-дифференцируемыми финитными функциями $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенству

$$|(u, \varphi(x - x_0))| \leqslant C_1 \exp C |x_0|^{2p/(2p-1)}. \qquad (1)$$

Примечание референта. Автор указывает, что в некоторых случаях (например, для $\rho(x) = (\exp\exp|x|)\sin\mu(x)$, где $\mu(x)$ возрастает быстрее, чем $\exp\exp|x|$), соответствующие решения не могут получиться по схеме И. М. Гельфанда и референта (РЖМат, 1955, 3291), поскольку такие функционалы не будут элементами пространства $T(K_{(2p)'})$ функционалов над быстро убывающими функциями. В действительности результаты автора полностью содержатся в указанной схеме, так как всякий функционал, удовлетворяющий неравенству (1), продолжается на пространство $K_{(2p)'}$. Функция $\rho(x)$, указанная выше, также определяет линейный непрерывный функционал на $K_{(2p)'}$ по общему правилу

$$(\rho, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} (\exp\exp|x|)\sin\mu(x)\varphi(x)\,dx.$$

Г. Е. Шилов

**1501. О некоторых свойствах уравнений в свертках. Мальгранж** (Sur quelques propriétés des équations de convolution. Malgrange Bernard), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 23, 2219—2221 (франц.)

Пусть $K$ есть одно из двух линейных топологических пространств: $H$ — пространство всех целых аналитических функций $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ или $E$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $K'$ — пространство, сопряженное к $K$. Для каждого $\mu \in K'$ выражение $F(\mu) = (\mu, e^{-2\pi i(\lambda, z)})$ есть целая аналитическая функция от $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ экспоненциального типа (для $K = E$ возрастающая не быстрее степени $|\lambda|$ при $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ вещественных). Свертка $\mu * f = [\mu, f(z + \zeta)]$ определена для любого $f \in K$, поэтому имеет смысл и свертка $\mu * \nu$ для любых $\mu$ и $\nu$ из $K'$, при этом $F(\mu * \nu) = F(\mu) \cdot F(\nu)$. Основные результаты:

(1) Равенство $\nu = \mu * \sigma$ ($\nu, \mu, \sigma \in K'$) имеет место тогда и только тогда, когда частное $F(\nu)/F(\mu)$ — целая функция.

(2) Всякое решение $f \in K$ уравнения $\mu * f = 0$ является пределом (по топологии $K$) линейных комбинаций функций вида $z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n} e^{(a, z)}$, решений этого уравнения. В частности, это имеет место для линейных дифференциальных уравнений $Df = 0$, поскольку, как известно, они могут быть записаны в форме $\mu * f = 0$, где $\mu$ — линейная комбинация дельта-функции и ее производных.

(3) Для того чтобы имело место равенство $\nu = D\mu$, необходимо и достаточно, чтобы $\nu$ была ортогональна всем решениям вида, указанного в (2), уравнения $D^* f = 0$. Последний результат был для оператора Лапласа указан ранее Шварцем (Schwartz L. Théorie des distributions, t. 2, p. 73). Г. Е. Шилов

**1502. Аналитические почти периодические функции. Голдман** (Analytic almost-periodic functions. Goldman Oscar), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, **40**, № 5, 294—296 (англ.)

Вводится следующее обобщение аналитической функции при помощи построений, подобных переходу к полярной системе координат. Пусть $R$ — мультипликативная группа положительных чисел, $G$ — компактная связная абелева группа, $h(r)$ — фиксированный непрерывный гомоморфизм $R$ в $G$, причем $h(R)$ плотно в $G$. Непрерывная комплекснозначная функция $f(r, u)$ точки $(r, u)$, меняющейся в некоторой открытой области группы $R \times G$, называется аналитической в этой области, если функция $f(r_1 e^x, u_1 h(e^y))$ комплексного переменного $z = x + iy$ при любой $(r_1, u_1) \in R \times G$ аналитична в естественной области определения. Положим

$$f_1'(r, u) = \frac{d}{dx} f(re^x, u)\Big|_{x=0}, \quad f_2'(r, u) = \frac{d}{dy} f(r, uh(e^y))\Big|_{y=0}.$$

Следующим образом обобщаются условия Даламбера—Эйлера: для того чтобы непрерывная функция $f(r, u)$ была аналитической, необходимо и достаточно, чтобы

существовали непрерывные производные $f_1'$ и $f_2'$ и выполнялось условие $f_1' + if_2' = 0$. Вводится также понятие контурного интеграла от $f(r, u)$.

Ю. М. Березанский

**1503 К. Линейные операторы в гильбертовом пространстве. Шмейдлер** (Lineare Operatoren im Hilbertschen Raum. Schmeidler Werner. Stuttgart, B. G. Teubner, 1954, vi + 89 S., 7.80 DM) (нем.)

Книга состоит из трех глав. Первая глава представляет собой подробное рассмотрение гильбертова пространства последовательностей, которое служит мотивировкой для формулируемого далее общего определения гильбертова пространства. Одно из условий общего определения по существу предполагает, что размерность пространства в точности равна $\aleph_0$. Подчеркивается понятие слабой сходимости последовательностей.

Во второй главе рассматриваются операторы; бо́льшая часть ее посвящена вполне непрерывным операторам. Так как большинство результатов является специальными случаями теории вполне непрерывных операторов Рисса, то изучающий, склонный к современной абстракции, найдет в книге Банаха более доступное изложение этих вопросов. [Между прочим, автор в предисловии упоминает как возможно новую следующую теорему: вполне непрерывный оператор $A$ не имеет отличных от нуля собственных значений тогда и только тогда, когда $\lim_n \| A^n x \|^{1/n} = 0$ для всех $x$. Этот результат следует, в теории Рисса, из того факта, что отличное от нуля комплексное число принадлежит спектру вполне непрерывного оператора тогда и только тогда, когда оно является собственным значением, и из того признанного нетривиальным факта, что спектральный радиус оператора $A$ равен $\lim_n \| A^n \|^{1/n}$. Следует также отметить, что утверждения автора о спектрах отличаются от соответствующих утверждений в большинстве других современных трактатах по этому вопросу, причина этого состоит в определении спектра оператора $A$ в терминах $I - \lambda A$, а не $A - \lambda I$.]

В третьей главе рассматриваются спектральные теоремы. Для ограниченного эрмитового оператора $A$ и для вещественного $\lambda$ автор определяет $E(\lambda)$ как оператор проектирования на нулевое пространство положительной части $A - \lambda I$. Построение положительной части основано на существовании квадратного корня, которое доказывается во второй главе с помощью биномиального ряда. Далее спектральная теорема распространяется на ограниченные нормальные операторы и неограниченные самосопряженные операторы путем известного сведения к случаю ограниченного эрмитова оператора. Изложение достаточно сжатое. Книга заканчивается коротким разделом, содержащим примеры и приложения (например, к кристаллографии и к квантовой механике). P. R. Halmos

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 10,880.

**1504 К. Спектральная теория в гильбертовом пространстве. Накано** (Spectral theory in the Hilbert space. Nakano Hidegorô. Tokyo, Japan Society for the Promotion of Science, 1953, iv + 300 p., 3.00 doll.) (англ.)

Книга представляет весьма субъективный свод известных фактов (и некоторых их обобщений), относящихся к операторам в гильбертовом пространстве. Резко выраженный субъективизм автора проявляется не только в его новой в некоторых случаях трактовке предмета, но также и в том, что он настойчиво применяет свою собственную довольно необычную терминологию. Так, например, мощность множества он называет «плотностью» множества, под «идеалом» в булевом кольце автор понимает дуальный идеал, спектральная мера становится «спектральностью», а совокупность внутренних точек (interior) множества автор называет его «открывающим множеством» (opener). Такая терминология, сочетающаяся с тяжелым стилем изложения и частыми нарушениями идиоматических оборотов английской речи делает книгу весьма трудной для чтения. Книга состоит из шести глав: I. Гильбертовы пространства. II. Спектральная теория. III. Анализ расширений (Dilatator analysis). IV. Нормальные операторы. V. Унитарные инварианты. VI. Эргодические теоремы (Между прочим, «расширение» («dilatator») есть замкнутый оператор с плотной областью определения, удовлетворяющий условию коммутативности относительно некоторого булева кольца проекционных операторов). Кульминационный пункт книги — глава V, в которой автор предлагает свое собственное толкование теории кратности спектра. Имея в виду эту теорию, после того как введен обычный предварительный технический аппарат, автор формулирует все свои определения и доказывает все свои теоремы, относящиеся к фиксированному булеву кольцу проекционных операторов, и в связи с этим систематически использует сопряженное пространство Стоуна. Эти два аспекта предлагаемого автором изложения (реализация и дуализация) составляют то принципиально новое, что имеется в книге. Специалист в данной области смог бы извлечь пользу из изучения книги в деталях и из наблюдения за систематическим применением технического аппарата, который известен, но еще не тривиален. P. R. Halmos

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 5, 440

**См. также:** 918, 1048, 1162 Д, 1222, 1271, 1329, 1331, 1333, 1372, 1373, 1374, 1381, 1407, 1687 Д

## ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**1505. Основные проблемы теории вероятностей в свете диалектического материализма. Ренъи** (Základní problémy počtu pravděpodobnosti ve světle dialektického materialismu. Rényi Alfréd), Časop. pěstov. mat., 1954, **79**, № 3, 189—218 (чеш.) (A Filozofiai Evkönyv, Budapest, 1952, стр. 63—97)

Популярное изложение предмета теории вероятностей и понятий случайного события, вероятности. Автор выясняет взаимосвязь понятий случайного и необходимого, уделяет значительное внимание критике современных идеалистических взглядов на понятие вероятности (Мизес, Финетти и др.). В заключение приводится изложение элементов аксиоматического построения понятия вероятности, предложенного А. Н. Колмогоровым, и выясняется роль диалектической философии в формировании такого подхода. Б. В. Гнеденко

**1506. Существование нормы несовместно со сходимостью по вероятности. Дюге** (L'existence d'une norme est incompatible avec la convergence en probabilité. Dugué Daniel), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 12, 1307 (франц.)

Сходимость по вероятности не может порождаться

никакой нормой, так как из того, что $X_n$ по вероятности сходится к нулю, не следует, как показывает построенный автором пример, что $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ сходится по вероятности к нулю. А. В. Скороход

**1507. О разложении распределений. Тейкер** (On the factorization of distributions. Teicher H.), Ann. Math. Statistics, 1954, **25**, № 4, 769—774 (англ.)

Пусть $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ — функции распределения. Если

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y)\,dF_2(y),$$

то будем говорить, что $F$ разлагается на компоненты $F_1$ и $F_2$. В работе приводятся примеры семейств распределений, компоненты разложения которых принадлежат этим же семействам. Такие семейства распределений называются фактор-замкнутыми. Вопрос о разложении функций распределения на компоненты рассматривался ранее в работах Леви (Levy P., Theorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, 1937; J. Math. pures et appl., 1928, **17**, 17—30). А. В. Скороход

**1508. Границы для функции распределения с заданными моментами до четвертого порядка. Зилен** (Bounds on a distribution function that are functions of moments to order four. Zelen Marvin), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1954, **53**, № 6, 377—381 (англ.)

Даны явные выражения границ функции распределения в интервале $[a, b]$, если заданы первые два, три и четыре момента. Б. А. Севастьянов

**1509. О совместимости функций распределения. Басс** (Sur la compatibilité des fonctions de répartition. Bass Jean), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 8, 839—841 (франц.)

Рассматривается проблема: существует ли функция распределения $F(x, y, z)$ трех случайных величин $X$, $Y$, $Z$, «граничные» значения которой $F(x, y, \infty)$, $F(x, \infty, z)$, $F(\infty, y, z)$ совпадают с тремя данными функциями распределения $F_1(x, y)$, $F_2(x, z)$, $F_3(y, z)$. Общий случай может быть сведен к тому, когда $X$, $Y$, $Z$ ограничены и нормированы. В этом последнем случае проблема эквивалентна следующей: описать область $\Omega$ трехмерного пространства, которой могут принадлежать точки с координатами, являющимися ковариациями трех случайных величин. Указанная область $\Omega$ изучается. В. С. Королюк

**1510. О проекции распределения вероятности. Реньи** (Valószinüség — eloszlások vetületeiröl. Renyi Alfréd), Magyar tud. akad. mat. és. fiz. ostz. közl., 1953, **3**, № 1, 59—69 (венг.)

Теорема Крамера и Вольда (Cramer H., Wold H., J. London, Math. Soc., 1936, II, 290—294) утверждает, что функция распределения $F(x, y)$ любого двумерного распределения вероятности определяется однозначно, если известны его проекции на любую прямую, проходящую через начало координат. (Теорему также можно обобщить на $n$ измерений). Автор доказывает в этом направлении следующую интересную новую теорему: Если точка $P(\xi, \eta)$ находится в круге $\xi^2+\eta^2 \leqslant R^2$ с вероятностью 1 и если функция распределения $F$ случайной величины $\zeta_\varphi = \xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi$ дана для бесконечного множества значений $\varphi \pmod{\pi}$, тогда функция распределения точки $(\xi, \eta)$ определена однозначно. Следствием этой теоремы является непосредственное обобщение следующей теоремы Радона: Пусть $D$ — ограниченная область и $f(x, y)$ — непрерывная функция, определенная на $D$. Если интеграл от $f(x, y)$, взятый по любому отрезку, входящему в $D$, равен нулю, то $f \equiv 0$ (Radon J., Ber. Math. Phys. Kl. Sächs, Ges. Wiss. Leipzig, 1917, **59**, 262—277). Во 2-й части работы сообщается доказательство Хайоша теоремы о том, что дискретное распределение на плоскости, сосредоточенное в $n$ точках, полностью определяется своими проекциями на любые $n+1$ прямые, проходящие через начало координат. (Теорема не может быть улучшена). Автор доказывает аналогичную теорему для распределения пространственных материальных точек с одинаковой массой. Такое распределение определяется своими ортогональными проекциями на любые $n+1$ плоскости попарно не параллельных друг другу. Эту теорему также нельзя улучшить.

P. Medgyessy

**1511. Об анализе внутренних свойств распределения. Эльфан** (Sur l'analyse intrinsèque d'une distribution. Helphen Étienne), C. r. Acad sci., 1954, **239**, № 20, 1265—1266 (франц.)

Вводится «внутренняя» характеристическая функция распределения вероятностей $\psi(s)$, определяемая для дискретного случая равенством $\Sigma_i p_i^{1+s}$ и для непрерывного случая с плотностью $f(x)$ равенством $\psi(s) = \int f^{1+s}(x)\,dx$, и аналогично в двумерном случае $\psi(s) = \iint f^{1+s}(x, y)\,dx\,dy$.

Всякое преобразование оси $x$, оставляющее неизменным меры множеств («перестановка»), оставляет неизменной $\psi(s)$; обратно — в широких условиях $\psi(s)$ определяет $f(x)$ с точностью до «перестановки»; в этих случаях говорят, что $\psi(s)$ внутренним образом определяет $f(x)$. Автор указывает, что двумерный закон Гаусса внутренне эквивалентен одномерному закону Лапласа. Дается определение «внутренних» моментов и указывается возможность их статистической оценки.

Н. В. Смирнов

**1512. Об одном классе случайных величин. Спицер** (On a class of random variables. Spitzer Frank), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 3, 494—505 (англ.)

Комплексная случайная величина $Z$ называется регулярной, если она имеет конечные моменты всех порядков и если $Ef(Z) = f(EZ)$, для любого полинома $f(z)$ где $E$ — символ математического ожидания. Две вещественные случайные величины $X$ и $Y$ называются взаимно сопряженными, если $Z = X + iY$ есть регулярная случайная величина; при этом $X$ и $Y$ могут быть взаимно зависимы. Взаимно сопряженными, в частности, являются две взаимно независимые случайные величины с одним тем же нормальным законом распределения. Чтобы получить признаки взаимной сопряженности величин, вводятся формальные ряды

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} E[(\alpha X + \beta Y)^n],$$

где $\alpha$ и $\beta$ — комплексные переменные. Для взаимной сопряженности величин $X$ и $Y$ ($EX = EY = 0$) тогда необходимо и достаточно, чтобы при любом комплексном $\alpha$ было $\Phi(\alpha, i\alpha) = 1$. В случае взаимно независимых $X$ и $Y$ вводятся в рассмотрение формальные ряды

$$\Phi_x(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!} EX^n, \quad \Phi_y(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\beta)^n}{n!} EY^n;$$

для взаимной сопряженности $X$ и $Y$ тогда необходимо и достаточно, чтобы при любом комплексном $\alpha$ было $\Phi_x(\alpha)\,\Phi_y(i\alpha) = 1$. В качестве примера указывается случай, когда $X$ и $Y$ имеют соответственно (отличные от нормального) распределения с характеристическими функциями $\cos t$ и $(\cosh t)^{-1}$. Доказывается, что в случае взаимной независимости величины $X$ и $Y$ не могут быть обе ограниченными. Вещественная случайная ве-

личина $X$ называется самосопряженной, если она взаимно сопряжена с величиной $Y$, распределенной так же как $X$ и взаимно независимой с $X$. Доказывается теорема: Для того чтобы величина $X$ была самосопряженной, необходимо и достаточно, чтобы ее характеристическая функция $\varphi(t)$ удовлетворяла условию

$$\left(\frac{d^n}{dt^n}\right)\log\varphi(0)=0 \quad [n\equiv 0, 1, 3\,(\mathrm{mod}\,4)].$$

Дается ряд примеров. Показывается, что если $\varphi_1(t)\varphi_2(t)=\varphi_3(t)$ и если какие-либо две из этих трех функций служат характеристическими функциями самосопряженных величин, то то же самое имеет место и для третьей. Среди всех безгранично делимых законов распределения только нормальные законы соответствуют самосопряженным величинам. В заключительном параграфе теория распространяется на многомерный случай. А. Я. Хинчин

**1513. Слабая и полная сходимость последовательности $\{F_n(x)\}$ и соответствующей ей последовательности $\{G_n^{(p)}(x)\}$. Лёффель** (Convergence faible et complète d'une suite $\{F_n(x)\}$ et de la suite associée $\{G_n^{(p)}(x)\}$. Loeffel Hans), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 24, 2293—2294 (франц.)

Если $F(x)$ — любая (не обязательно нормированная) функция распределения, то для любого $p\,(0<p\leqslant 1)$

$$G^{(p)}(x)=\int_0^1 F\left(\frac{x}{\alpha}\right)d\,(\alpha^p)$$

также есть функция распределения и

$$G^{(p)}(x)=\begin{cases} px^p\int_x^\infty \dfrac{F(u)}{u^{p+1}}\,du & (x>0),\\ p(-x)^p\int_{-\infty}^x \dfrac{F(u)}{(-u)^{p+1}}\,du & (x<0).\end{cases}$$

Теорема 1. Если последовательность функций распределения $\{F_n(x)\}$ слабо сходится к функции распределения $F(x)$, то соответствующая последовательность $\{G_n^{(p)}(x)\}$ слабо сходится к функции $G^{(p)}(x)$ $(0<p\leqslant 1)$.

Теорема 2. Пусть $F_n(x)$ — последовательность функций распределения и $G_n^{(p)}(x)$ слабо сходится к $G^{(p)}(x)$ при некотором $p$ $(0<p\leqslant 1)$; тогда $F_n(x)$ слабо сходится к $F(x)$ и $F(x)$ во всех своих точках непрерывности определяется формулой $F(x)=\frac{1}{p}[pG^{(p)}(x)-xG^{(p)\prime}(x)]$ [в тексте вместо $G^{(p)\prime}(x)$ ошибочно напечатано $G^{(p)}(x)$]. Обе теоремы сохраняют силу и при замене слабой сходимости полной сходимостью. Доказательства отсутствуют, имеются лишь краткие указания на метод. А. Я. Хинчин

**1514. О гипотезе Феллера относительно уравнения Колмогорова. Невё** (Sur une hypothèse de Feller à propos de l'équation de Kolmogoroff. Neveu Jacques), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 6, 590—591 (франц.)

Рассматриваются непрерывные при $t>0$ полугруппы $T_t$ линейных операторов в пространстве непрерывных функций, заданных на замкнутом числовом отрезке. Предполагается, что: 1) $T_t$ переводит неотрицательные функции в неотрицательные; 2) $T_t 1=1$; 3) если $f(x)=0$ в окрестности $x_0$, то $T_h f(x_0)=o(h)$. Формулируется теорема, утверждающая, что бесконечно малый производящий оператор полугруппы $T_t$ есть обобщенный дифференциальный оператор второго порядка. Доказательства отсутствуют. Аналогичные результаты были опубликованы (с доказательствами) В. Феллером (Ann. Math., 1954, **60**, № 3, 417—438; 1955, **61**, № 1, 90—105). Соответствующая гипотеза была высказана Феллером еще раньше. Е. Б. Дынкин

**1515. Интеграция множества характеристических функций по параметру. Лёффель** (Intégration d'un ensemble de fonctions caractéristiques par rapport à un paramètre. Loeffel Hans), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 20, 1964—1966 (франц.)

Заметка в основном посвящена связи между характеристическими функциями $\varphi(t)$ и $t^{-1}\int_0^t\varphi(u)\,du$. Все результаты содержатся в статье референта (Изв. Томского матем. ин-та, 1938, 2, 1—7). А. Я. Хинчин

**1516. Проблемы хранения. Хаммерсли** (Storage problems. Hammersley J. M.), Math. Ann., 1955, **128**, № 5, 475—478 (англ.)

Пусть склад оптовой торговли пополняется через случайные промежутки времени с характеристической функцией $\varphi(t)$, а требования со стороны розничной торговли поступают по закону Пуассона с плотностью $\lambda$. Размер требования со стороны розничной торговли есть случайная величина с характеристической функцией $\psi(t)$, не зависящая от момента требования и от моментов и размеров других требований. Обычными приемами получено следующее выражение характеристической функции $w(t)$ общей суммы требований между двумя пополнениями склада: $w(t)=\varphi\{i\lambda[1-\psi(t)]\}$. Б. А. Севастьянов

**1517. Заметка о рекуррентных событиях. Патанкар** (A note on recurrent events. Patankar V. N.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, **51**, № 1, 96—102 (англ.)

Получено асимптотическое выражение для ковариации чисел появлений $N_r$ и $N_r'$ двух рекуррентных событий при $r$ испытаниях. Этот результат применяется для вычисления асимптотического выражения ковариации чисел появлений $n_i$ и $n_j$ состояний $e_i$ и $e_j$ при $n$ испытаниях, связанных в эргодическую конечную цепь Маркова. Б. А. Севастьянов

**1518. Об однородном во времени процессе рождения. Гхосал** (On time-homogeneous birth-process. Ghosal A.), Sci. and Culture, 1954, **19**, № 12, 608—609 (англ.)

**1519. Совместное распределение численности различных поколений в каскадном процессе. Гуд** (The joint distribution for the sizes of the generations in a cascade process. Good I. J.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, **51**, № 1, 240—242 (англ.)

Выписывается производящая функция для совместного распределения числа частиц в разных поколениях в ветвящемся случайном процессе с дискретным неоднородным временем. Отсюда выводится несколько следствий, встречавшихся ранее у других авторов. Б. А. Севастьянов

**1520. Корреляционная теория процессов со случайными стационарными $n$-ми приращениями. Яглом А. М.**, Матем. сб., 1955, **37**, № 1, 141—196

Эта статья, во многом завершающая и дополняющая собою ряд предшествующих работ автора, посвящена в основном систематическому распространению на процессы со стационарными случайными $n$-ми приращенными тех понятий, методов и результатов, которыми характеризуется современная теория стационарных случайных процессов. Такое распространение (с соответствующими изменениями) действительно удается, как показывает автор, во всех случаях, так что вся

теория стационарных процессов может рассматриваться как простейший частный случай общих концепций, изучаемых в настоящей статье. Вместе с тем отмечается, что ряд разрозненно рассматривавшихся различными учеными специальных расширений идеи стационарного процесса, избиравшихся обычно в связи с запросами приложений, укладывается в рамки развиваемой автором общей теории. Прежде всего (§ 1) устанавливаются спектральные разложения как для автокорреляционной функции, так и для самого процесса, и вводятся понятия спектральной функции и спектральной плотности. Далее (§ 2) исследуется возможность представления данного процесса в виде скользящей суммы, построенной на элементах некоторого процесса с некоррелированными приращениями. Как и в случае стационарных процессов, для возможности такого представления необходимой и достаточной оказывается абсолютная непрерывность спектральной функции. Подобно случаю стационарных процессов, результаты теории скользящего суммирования дают естественный подход к вопросам линейной экстраполяции процессов со стационарными случайными $n$-ми приращениями. Таким образом, в теорию этих процессов без изменения переносятся экстраполяционные теоремы А. Н. Колмогорова и М. Г. Крейна. Остальные два параграфа в основном посвящены выводу явных формул экстраполяции и фильтрации для некоторых важных специальных классов процессов со стационарными случайными $n$-ми приращениями. Для случая рациональной спектральной плотности при этом рассматриваются и процессы, заданные на конечном интервале. В статье содержатся и многомерные обобщения ряда понятий и результатов. Все доказательства приводятся полностью. Библ. 36 назв. А. Я. Хинчин

**1521. Модели двумерных стационарных случайных процессов. Хейн** (Models for two-dimensional stationary stochastic processes. Heine Y.), Biometrika, 1955, **42**, № 1—2, 170—178 (англ.)

Рассматриваются двумерные стационарные случайные процессы $\xi(x, y)$, удовлетворяющие уравнению с постоянными коэффициентами

$$\left(a\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2h\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+b\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\right.$$
$$\left.+2g\frac{\partial}{\partial x}+2f\frac{\partial}{\partial y}+c\right)\xi(x, y)=\varepsilon(x, y),$$

где $\varepsilon(x, y)$ — случайные импульсы с нулевым математическим ожиданием, двумерная корреляционная функция которых имеет вид $\sigma^2\delta(x)\cdot\delta(y)$. Корреляционная функция процесса $\xi(x, y)$ будет иметь вид

$$R(x, y)=\sigma^2\int\int_{-\infty}^{\infty}G(u, v)\,G(u-x, v-y)\,du\,dv,$$

где $G(x, y)$ — функция Грина исходного уравнения, удовлетворяющая условию затухания на бесконечности. Функция $R(x, y)$ должна затухать на бесконечности и, кроме того, должна быть всюду конечной, а в точке $x=y=0$ — отличной от нуля. Рассматриваются основные типы эллиптических, гиперболических, параболических и вырожденных уравнений. С помощью двумерного преобразования Лапласа находятся их функции Грина и определяются соответствующие корреляционные функции. А. С. Монин

**1522. О редукции некоторых основных задач статистической механики к классическим задачам теории вероятностей. Блан-Лапьер, Тортра** (Sur la réduction de certains problèmes fondamentaux de la mécanique statistique à des problèmes classiques du calcul des probabilités. Blanc-Lapierre André, Tortrat Albert), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 22, 2115—2117 (франц.)

В сжатом виде описываются схемы редукции основных математических задач статистической механики к задачам учения о предельных теоремах теории вероятностей. При этом используются как основанные на аналитическом аппарате Фоулера методы Бартлетта и Блан-Лапьера, так и чисто вероятностные, не требующие специального аналитического аппарата методы референта. Заметка не содержит новых результатов. А. Я. Хинчин

**1523 К. Основы теории процессов Маркова. Сарымсаков Т. А.** М., Гостехиздат, 208 стр., 1954, 8 р. 05 к.

Излагаются основные факты теории однородных процессов Маркова в основном (кроме главы V) с дискретным временем для конечного, счетного и непрерывного (ограниченного) множества возможных состояний. Рассматриваются вопросы классификации состояний, устанавливаются различного рода асимптотические соотношения для переходных вероятностей, связанных с процессом. Доказывается усиленный закон больших чисел, закон повторного логарифма и центральная предельная теорема для последовательности величин, связанных в цепь. Методологически изложение характеризуется соединением матричного и прямого методов. В соответствии с этим не затронуты более общие неоднородные цепи. Гл. I представляет собою введение к книге. Гл. II посвящена случаю классических цепей Маркова с конечным числом состояний. В гл. III и IV соответственно рассматриваются обобщения классических цепей для счетного и непрерывного множеств возможных состояний. Гл. V относится к случаю процессов с непрерывным временем. Книга содержит ряд принадлежащих автору и в основном уже опубликованных ранее результатов. Вот главные из них. В § 4, п. 2 указывается общая схема доказательства центральной предельной теоремы для величин, связанных в цепь, применяющаяся затем в гл. II и IV к конкретным случаям цепи с конечным и непрерывным множеством состояний. В § 5, п. 2 для цепей с непрерывным множеством состояний приведена классификация автора этих состояний. В качестве иллюстрации цепной зависимости в § 7 приводится пример, относящийся к синоптике Средней Азии. В §§ 11, 21, 22, 23, 24 и 25 дается оригинально построенное изложение вопросов регулярности, алгорифмически решаются вопросы об асимптотическом поведении переходных вероятностей для случая счетного множества возможных состояний. В § 28 изучаются условия примитивности и цикличности стохастического ядра (Теоремы 2, 4 и 5). В § 36 и § 39 применительно к случаю непрерывного времени видоизменяется известный прием Деблина, сводящий некоторые вопросы о величинах, связанных в однородную цепь, к вопросам о независимых величинах. Наконец, отметим дифференциальные уравнения для характеристических функций (13) из § 35 и (5) и (8) из § 40. Приложения не рассматриваются; примеры носят иллюстративный характер. Стиль изложения достаточно ясный, к концу книги краткий. Библ. 76 назв. Н. А. Сапогов

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

**1524. Статистический вывод двух тригонометрических неравенств. Чассен** (A statistical derivation of a pair of trigonometric inequalities. Chassan J. B.), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 5, 353—356 (англ.)

Пусть $0\leqslant\theta_i\leqslant\pi$, $i=1, 2, \ldots, n$, $\theta_j\neq\theta_k$ при $j\neq k$. Устанавливается неравенство

$$\frac{\Sigma_{i=1}^{n}\cos^2\theta_i}{\Sigma_{j>i}\sin^2(\theta_i-\theta_j)} \leqslant \frac{1}{(C_n^2)^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j\neq i}\frac{\cos\theta_j}{\sin(\theta_i-\theta_j)}\right\}^2$$

и аналогичное неравенство с заменой всюду символа cos на sin. Доказательство основано на рассмотрении вспомогательных случайных величин, связанных с $\theta_i$ и двумя неизвестными параметрами, и на сравнении дисперсии оценки для каждого из этих параметров, полученной по методу наименьших квадратов, с дисперсией некоторой неэффективной оценки. В. В. Петров

**1525. Преобразования биномиального, отрицательного биномиального, пуассоновского и $\chi^2$ распределений. Блум** (Transformations of the binomial, negative binomial, Poisson and $\chi^2$ distributions. Blom Gunnar), Biometrika, 1954, **41**, № 3—4, 302—316 (англ.)

Пусть $x$ — число положительных исходов в последовательности независимых испытаний с параметрами $n$ и $p$ и пусть $\varepsilon = P\{x \geqslant a/p\}$. Решаются две основные задачи: 1) найти $\varepsilon$ по заданным $a$ и $p$, 2) найти $p$ по заданным $a$ и $\varepsilon$. Пусть $\Phi(\lambda_\varepsilon) = 1-\varepsilon$, где $\Phi(\lambda)$ — функция нормального распределения с параметрами (0,1). Автор исследует зависимость $\lambda_\varepsilon$ от $a$ и $p$ и для каждого $\varepsilon$ находит соответствующую функцию $y = \varphi_\varepsilon(x)$, которая имеет мало меняющуюся с изменением $p$ дисперсию. Случайная величина $y$ асимптотически нормальна и ее функция распределения при сравнительно небольших значениях $n$ хорошо аппроксимируется функцией нормального распределения. Для различных $\varepsilon$ найдены приближенные формулы, связывающие $\lambda_\varepsilon$ с $a$ и $p$. Эти формулы позволяют решать поставленные выше задачи. В частности, при $\varepsilon = 0{,}025$ получается известное преобразование $y = 2\arcsin\sqrt{x/n}$, а при $\varepsilon = 0{,}16$ — преобразование $y = (x+1)/(n+1)$. Аналогичные задачи решаются и для остальных распределений, указанных в заглавии. Полученные формулы используются для построения доверительных интервалов параметра $p$ по наблюденным значениям $x$. Л. Н. Большев

**1526. Использование преобразования Ганкеля в статистике. II. Методы вычисления. Лорд** (The use of the Hankel transform in statistics. II. Methods of computation. Lord R. D.), Biometrika, 1954, **41**, № 3—4, 344—350. Ч. I см. РЖМат, 1955, 5174.

**1527. Факториальные моменты распределения числа соединений между отрезками прямой линии. Уишарт** (The factorial moments of the distribution of joins between line segments. Wishart John), Biometrika, 1954, **41**, № 3—4, 555—556 (англ.)

**1528. Быстро сходящееся разложение гипергеометрической функции распределения и обратной функции. Уайз** (A quickly convergent expansion for cumulative hypergeometric probabilities, direct and inverse. Wise M. E.), Biometrika, 1954, **41**, № 3—4, 317—329 (англ.)

Из урны, содержащей $Nx$ черных и $N(1-x)$ белых шаров, делается выборка объема $n$. Обозначим число черных шаров в выборке через $\xi$. Для гипергеометрической функции распределения дано следующее приближенное выражение:

$$P = P\{\xi < p\} = I_h(n-p+1,\ p) + \frac{n(n-1)}{24M^2}\{(n+1)I_h(n-p+1,\ p) - (n-p+2)I_h(n-p,\ p) - (p+1)I_h(n-p+1,\ p-2) + 2I_h(n-p,\ p-1)\} + O(M)^{-4},$$

где

$$I_h(p,\ q) = \frac{(p+q-1)!}{(p-1)!\,(q-1)!}\int_0^h t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt,$$

$$h = (N(1-x) - n/2 + p/2)/M,\quad M = N - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}.$$

Получены также первые члены разложения по степеням $M^{-2}$ обратной функции $x$ от $P$.

Б. А. Севастьянов

**1529. Таблицы процентных точек для максимума стьюдентизированного абсолютного отклонения в нормальных выборках. Гальперин, Гринхаус, Корнфилд, Залокар** (Tables of percentage points for the studentized maximum absolute deviate in normal samples. Halperin Max, Greenhouse Samuel W., Cornfield Jerome, Zalokar Julia), J. Amer. Statist. Assoc., 1955, **50**, № 269, 185—195 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — независимые нормально распределенные случайные величины со средним значением $\mu$ и дисперсией $\sigma^2$. Изучается распределение величины

$$d = \max_{1\leqslant i\leqslant k} |x_i - \bar{x}|/s,$$

где $ms^2/\sigma^2$ имеет распределение $\chi^2$ с $m$ степенями свободы и не зависит от $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Даны таблицы 5% и 1% значений величины $d$ для различных значений отношения $m/k$. Даются краткое описание метода составления этих таблиц и примеры их применения к различным статистическим задачам.

А. А. Петров

**1530. Эффективность метода группировки. Гест** (Efficiencies in the method of grouping. Guest P. G.), Austral. J. Phys., 1953, **6**, № 4, 361—370 (англ.)

В предыдущих работах (Austral. J. Scient. Res., 1952, A5, 238; РЖМат, 1955, 2789) автор предложил метод построения многочлена по данному ряду измерений, названный им методом группировки. В настоящей работе вычисляется квадратическая погрешность в определении коэффициентов многочлена и его значений по методу группировки в том случае, когда значения независимой переменной не укладываются в арифметическую прогрессию. И. И. Гихман

**1531. Экстремальные значения в выборках из $m$-связанного стационарного стохастического процесса. Уотсон** (Extreme values in samples from $m$-dependent stationary stochastic processes. Watson G. S.), Ann. Math. Statistics, 1954, **25**, № 4, 798—800 (англ.)

Доказывается прямым вычислением теорема: Пусть $\{x_i\}$ — стационарная $m$-связанная последовательность неограниченных сверху случайных величин с условием

$$\lim_{c\to\infty}[1/P(x_i > c)]\max_{|i-j|\leqslant m} P[(x_i > c),\ (x_j > c)] = 0. \quad (1)$$

Если $\xi = nP[x_i > c_n(\xi)]$, то для фиксированного $\xi$

$$\lim_{n\to\infty} P[x_i \leqslant c_n(\xi);\ i = 1,\ \ldots,\ n] = \exp(-\xi).$$

Отмечается выполнимость (1) в случае, когда величины $x_i$ распределены нормально.

Замеченные ошибки: 1) Данное в начале работы определение $m$-связанной последовательности как такой, для которой $x_i$ и $x_j$ попарно независимы, если $|i-j| > m$, не совпадает с обычным (см., например, РЖМат, 1953, 828) и недостаточно для последующих заключений автора. 2) Во второй строке снизу

стр. 799 вместо $\lim_{n\to\infty} P\{x_i \leqslant c_n(\xi) \leqslant$ должно быть $\lim_{n\to\infty} P[x_i \leqslant c_n(\xi);\ i=1, \ldots, n] \leqslant$. 3) В конце текста вместо $P(x>c) \sim (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-c^2/2)$, $c\to\infty$, должно быть $P(x>c) \sim (1/c\sqrt{2\pi}) \exp(-c^2/2)$, $c\to\infty$.

Н. А. Сапогов

**1532. Несмещенные оценки. Колмогоров** (Unbiased estimates. Kolmogoroff A. N.), Amer. Math. Soc. Translation, № 98, 1953, 28 pp. (англ.)

Перевод статьи А. Н. Колмогорова «Несмещенные оценки», Изв. АН СССР, сер. матем., 1950, **14**, 303—326.

**1533. Сходимость эмпирического распределения к теоретическому для произвольных случайных элементов. Форте** (Convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique, pour des éléments aléatoires généraux. Fortet Robert), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 290—291 (франц.)

См. также РЖМат, 1954, 1726.

**1534. Теоретическое доказательство основных соотношений теории порядковых статистик. Хайош, Реньи** (Elemi bizonyítások a rendezett minták elméletének néhány alapvetö összefüggésére. Hajós György, Rényi Alfréd), Magyar tud. mat. és fiz. oszt. közl., 1954, **4**, № 4, 467—472 (венг.)

Даны элементарные доказательства нескольких, большей частью известных теорем, относящихся к упорядоченным выборкам из генеральной совокупности с равномерным распределением. Работа имеет целью получить эти результаты элементарным путем и по возможности без вычислений. Поэтому они имеют, в первую очередь, методическое значение. Между прочим, показывается, что разности последовательных элементов выборки имеют одно и то же распределение, их отношения совершенно независимы, так что логарифмы элементов выборки образуют аддитивную цепь Маркова. Работа связана с работой Реньи (РЖМат, 1955, 3314).

I. Vincze

**1535. Практическое применение оценки максимума односторонних уклонений эмпирической кривой распределения в заданном интервале роста теоретического закона. Мания Г. М.**, Тр. Груз. политехн. ин-та, 1954, № 30, 89—92 (резюме груз.)

Пусть $F(x)$ — непрерывная функция распределения, а $S_n(x)$ — соответствующая эмпирическая функция распределения. Обозначим

$$D_n^+(\theta_1, \theta_2) = \sup_{0\leqslant\theta_1\leqslant F(x)\leqslant\theta_2\leqslant 1} \{S_n(x) - F(x)\}.$$

Автором было показано (Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1951, **16**), что при $n\to\infty$

$$P\left\{D_n^+(\theta_1, \theta_2) < \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right\} \to \Phi^+(\theta_1, \theta_2; \lambda).$$

В настоящей заметке приводится краткая таблица функции $\Phi^+(\theta; \lambda) = \Phi^+(\theta_1, 1-\theta; \lambda)$ для $\lambda = 0{,}0 \div 2{,}0$ с шагом 0,1 и $\theta = 0{,}10 \div 0{,}30$ с шагом 0,05.

Б. А. Севастьянов

**1536. Неравенства Чебышева как основа для статистических критериев. Смит** (Tchebycheff inequalities as a basis for statistical tests. Smith C. D.), Math. Mag., 1955, **28**, № 4, 185—195 (англ.)

Популярная обзорная статья о различных приемах оценок вероятностей, употребляемых в математической статистике. Библ. 17 назв. Б. А. Севастьянов

**1537. О соотношении между эффективностью оценки и мощностью критерия. Сундрум** (On the relation between estimating efficiency and the power of tests. Sundrum R. M.), Biometrika, 1954, **41**, № 3—4, 542—544 (англ.)

Несколько замечаний относительно связи между мощностью критерия и эффективностью статистики, на которой этот критерий построен. Показывается, что не всегда более эффективной оценке соответствует более мощный критерий, но соответствующие исключительные случаи не очень важны практически.

Б. А. Севастьянов

**1538. Оценки максимального правдоподобия и оценки минимума $\chi^2$ логистической функции. Берксон** (Maximum likelihood and minimum $\chi^2$ estimates of the logistic function. Berkson Joseph), J. Amer. Statist. Assoc., 1955, **50**, № 269, 130—162 (англ.)

В предшествующей работе автора (РЖМат, 1955, 889) были введены так называемые logit-оценки параметров логистической функции распределения. Эти оценки являются регулярными, асимптотически нормальными и асимптотически эффективными (см., например, РЖМат, 1953, 1300), т. е. обладают основными асимптотическими свойствами оценок максимального правдоподобия и оценок минимума $\chi^2$. В данной работе на конкретных примерах показано, что если число наблюдений конечно, то logit-оценки параметров логистической функции предпочтительнее оценок, указанных в заглавии, так как последние оценки обладают большей средней квадратичной ошибкой, чем logit-оценки.

Л. Н. Большев

**1539. Замечание о минимальной дисперсии несмещенной оценки. Митра** (A note on minimum variance in unbiased estimation. Mitra Sujit Kumar, Sankhyā, 1954, **14**, № 1—2, 53—60 (англ.)

Рассматривается задача об отыскании нижней границы дисперсии несмещенной оценки для параметра, характеризующего генеральную совокупность, при различных предположениях о генеральном распределении. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка из генеральной совокупности с плотностью распределения

$$f(x, \theta) = \begin{cases} f(x)/g(\theta) & \text{при } x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{при } x \bar{\in} [0, \theta] \end{cases}$$

и пусть $t(x_1, \ldots x_n)$ — несмещенная оценка для $\theta$. Доказано, что при достаточно больших значениях $n$

$$E(t-\theta)^2 \geqslant \frac{0{,}6476}{n^2} \cdot \frac{1}{h^2(\theta)},$$

где $h(\theta) = g'(\theta)/g(\theta)$. Если генеральная совокупность имеет равномерное распределение на интервале $(\theta, 2\theta)$, то при достаточно больших $n$

$$E(t-\theta)^2 \geqslant 0{,}0622\,\frac{\theta^2}{n^2}.$$

В случае выбора из совокупности с плотностью распределения $f(x, \theta) = \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} e^{-\theta x} x^{p-1}$ $(0 \leqslant x < \infty)$, где $p$ — данная положительная постоянная, а $\theta$ — неизвестный параметр, получено неравенство

$$E(t-\theta)^2 \geqslant \frac{\theta^2}{np - 2 + O\left(\frac{1}{n}\right)},$$

более сильное, чем вытекающее из неравенства Крамера — Рао (Крамер Г., Математические методы статистики, Изд-во ин. лит., М., 1948, 520). При доказательстве использован метод, предложенный Хаммерсли (Hammersley J. M., J. Roy. Statist. Soc., 1950, **B12**, 192), Чэпменом и Роббинсом (Chapman D. G., Robbins H., Ann. Math. Statistics, 1951, **22**, 581) и другими авто-

рами для получения нижней границы дисперсии несмещенной оценки без обычных предположений регулярности. В. В. Петров

**1540. Интегральная функция распределения для широты выборок из симметричной унимодальной совокупности. Кадуэлл** (The probability integral of range for samples from a symmetrical unimodal population. Cadwell J. H.), Ann. Math. Statistics, 1954, **25**, № 4, 803—806 (англ.)

Рассматриваются выборки объема $n$ из совокупности, характеризуемой плотностью вероятности $\varphi(x)$, симметричной относительно нуля. Пусть $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(x)\,dx$. Интегральная функция распределения вероятностей для широты выборки $w$ имеет вид

$$F(w) = n\int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(x) - \Phi(x-w)]^{n-1}\varphi(x)\,dx.$$

В случае унимодальной $\varphi(x)$ это выражение может быть разложено в асимптотический ряд с помощью методов, развитых в другой работе автора (РЖМат, 1954, 5193). Для нормальной (0,1) совокупности выписывается приближенная формула, использующая два первых члена указанного ряда. Расчеты для нескольких значений $n\,(n \geqslant 20)$ показывают, что ошибка приближенной формулы не превосходит единицы в четвертом десятичном знаке. С помощью предложенной формулы составляется таблица $p$-процентных значений для $w$ для нескольких значений $n$ и $p$. А. С. Монин

**1541. Асимптотическая относительная эффективность некоторых непараметрических критериев проверки случайности при альтернативах нормальности. Стюарт** (Asymptotic relative efficiencies of distribution-free tests of randomness against normal alternatives. Stuart Alan), J. Amer. Statist. Assoc., 1954, **49**, № 265, 147—157 (англ.)

Рассматривается обычная схема нормальной регрессии: совокупность величин $y_i = \alpha + \beta_i + \varepsilon_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, где $\alpha$ и $\beta$ — две неизвестные константы, величины $\varepsilon_i$ независимы и нормально распределены, $E(\varepsilon_i) = 0$, $D(\varepsilon_i) = 1$. По $n$ наблюденным значениям величин $y_i$ проверяется гипотеза «случайности», отвечающая значению $\beta = 0$. Стандартный метод проверки использует статистическую оценку $\beta$(коэффициент регрессии), получаемую по методу наименьших квадратов и следующую нормальному закону $N(x; \beta, \sigma_0^2)$, где $\sigma_0^2 = 12/n(n^2-1)$. С этим критерием сравниваются некоторые другие критерии случайности, а именно: 1) критерий, основанный на числе положительных разностей $y_i - y_{i-1}$ $(i = 2, \ldots, n)$, 2) критерий Кендалла и 3) критерий Спирмана, построенные с помощью ранговых коэффициентов корреляции, 4) критерий, использующий число «максимумов» и «минимумов» в последовательности $\{y_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, и 5) серийный коэффициент корреляции. При сопоставлении этих критериев со стандартным автор пользуется мерой эффективности, предложенной Питманом (Pitman E. J. G., Lecture notes on non-parametric inference, 1948, Univ. of North Carolina, mimeographed.), и дающей предельное значение отношения объемов выборок, гарантирующих одинаковую мощность критериев для асимптотически близких альтернатив, если рассматриваемые критерии основываются на асимптотически нормальных характеристиках. Показывается, что критерии Кендалла и Спирмана имеют относительную эффективность, равную $3/\pi \sim 0{,}95$, тогда как эффективность остальных равна нулю.

Следует отметить, что использование меры Питмана предполагает равномерное относительно испытываемого параметра стремление к нормальному закону рассматриваемых характеристик. Доказательства равномерности автор не дает. Н. В. Смирнов

**1542. Замечания относительно использования несмещенных и смещенных статистик в биномиальной совокупности. Бхаттачария** (Notes on the use of unbiased and biased statistics in the binomial population. Bhattacharyya A.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1954, **5**, № 20, 149—164 (англ.)

Обзорная статья, содержащая ряд новых результатов, полученных автором при помощи метода конечных разностей. В первой части рассматривается случайная величина $x$, подчиняющаяся биномиальному распределению с параметрами $n$ и $p$. Излагается ряд известных результатов, имеющихся, например, в других работах (Колмогоров А. Н., Изв. АН СССР, 1950, **14**, 303—326; Bhattacharyya A., Sankhyā, 1946—1948, **8**, № 1, 3, 4; 1, 201, 315). К новым результатам автора относится формула дисперсии несмещенной статистики $t(x)$

$$Dt(x) = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{d^i\tau}{dp^i}\right)^2 \frac{p^i q^i}{i!\,n^{(i)}},$$

где $\tau(p) = Mt(x)$ и $n^{(i)} = n(n-1)\ldots(n-i+1)$.

Во второй части рассматриваются смещенные статистики с наименьшим смещением. Эти статистики строятся с помощью байесовского метода. Указаны два новых метода получения «почти несмещенных статистик», для которых смещение при $n \to \infty$ быстрее всего стремится к нулю. Теория статистик с равномерно наименьшим смещением на отрезке $0 \leqslant p \leqslant 1$ не излагается.

В последней части рассматривается случайная величина $x$, подчиняющаяся распределению Пуассона с параметром $m$. Здесь показано, что, если функция $\tau(m)$ имеет несмещенную оценку $t(x)$, то эта оценка единственна и дается символической формулой

$$t(m) = [(1 + d/dm)\exp(-d/dm)]^m \tau(m).$$

Л. Н. Большев

**1543. О выборочных распределениях классических статистик множественного анализа. Огава** (On the sampling distributions of classical statistics in multivariate analysis. Ogawa Junjiro), Osaka Math. J., 1953, **5**, № 1, 13—52 (англ.)

Автор дает основанный на идее Ильфвинга (Elfving G., Skand. aktuarietidskr., 1947, **30**, 56—74) новый вывод хорошо известных выборочных распределений различных характеристик, используемых в теории многомерной нормальной корреляции. Центральное место занимает вывод распределения Висхарта, из которого получается распределение выборочных коэффициентов корреляции, множественного и частных коэффициентов, распределение обобщенного критерия Стьюдента. Новых результатов статья не содержит. Н. В. Смирнов

**1544. Критерий согласия для частот, полученных из случайного процесса. Патанкар** (The goodness of fit of frequency distributions obtained from stochastic processes. Patankar V. N.), Biometrika, 1954, **41**, № 3—4, 450—462 (англ.)

Пусть в результате некоторого случайного процесса получены частоты $n_1, n_2, \ldots, n_r$, математические ожидания которых равны $Mn_i = m_i$. В случае независимых испытаний при $n \to \infty$ величина $\chi^2 = \Sigma_{i=1}^r [(n_i - m_i)^2/m_i]$ имеет в пределе распределение $\chi^2$ с $r-1$ степенями свободы. Предлагается для случая зависимого ряда наблюдений видоизмененный критерий $\chi^2$, основанный на том, что если $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ асимптотически подчиняются некоторому многомерному нормальному распределению и $M\chi^2 = A$ и $D\chi^2 = 2B$, то величина

$A\chi^2/B$ имеет приблизительно распределение $\chi^2$ с $A^2/B$ степенями свободы. Вычисляются $M\chi^2$ и $D\chi^2$ для пуассоновского, нормального и двумерного нормального марковских процессов. Б. А. Севастьянов

**1545. Заметка о смещении в оценке автокорреляции.** Кендалл (Note on bias in the estimation of autocorrelation. Kendall M. G.), Biometrika, 1954, 41, № 3—4, 403—404 (англ.)

Выводятся формулы для математических ожиданий эмпирических коэффициентов корреляции $r$ с точностью до величин порядка $1/n$ и исследуется ряд частных случаев этих формул. С. Х. Туманян

**1546. Об одном критерии согласия.** Андерсон, Дарлинг (A test of goodness of fit. Anderson T. W., Darling D. A.), J. Amer. Statist. Assoc., 1954, 49, № 268, 765—769 (англ.)

Приведены асимптотические 10%, 5%, 1%-ные уровни значимости для критерия

$$W_n^2 = n\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[F_n(x) - F(x)]^2}{F(x)[1-F(x)]}\, dF(x),$$

где $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения. Найдены асимптотические значения математического ожидания и дисперсии $W_n^2$. Предельные распределения ряда критериев, аналогичных $W_n^2$, были выведены авторами (Ann. Math. Statistics, 1952, 23, 193—212).

В. С. Королюк

**1547. Изучение формулы Валькера, определяющей функцию «О. С.» биномиального критерия Вальда.** Мерик (Etude de la formule de Walker donnant la fonction «O. C.» du test binomial de Wald. Méric Jean), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 18, 1117—1119 (франц.)

Для оперативной характеристики биномиального критерия Вальда, выведенной Валькером (Walker A. M., J. Roy. Statist. Soc., B, 1950, 12, № 2, 301—307), приведено выражение, более удобное для вычислений, требующее, правда, обращения матрицы, зависящей от параметра. В. С. Королюк

**1548. Статистические выводы.** Линдли (Statistical inference. Lindley D. V.), J. Roy. Statist. Soc., 1953, 15, ser. B, № 1, 30—76 (англ.)

Излагается теория статистических решающих функций (Wald A., Statistical Decision Functions, 1950, New-York, Wiley) в предположении, что объем выборки фиксирован, а класс распределений и класс возможных решений конечны. Сравнение различных решающих функций, в отличие от книги Вальда, проводится не по среднему риску, а по матрице $\| p_{ij}^{\delta} \|$, где $p_{ij}^{\delta}$ — вероятность, используя решающую функцию $\delta$, принять решение $d_j$ в случае, когда имеет место распределение $p_i$. Приведен ряд теорем о полных классах решающих функций. Изложение иллюстрировано многочисленными примерами. Б. А. Севастьянов

**1549. Одно обобщение теории статистических разрешающих функций Вальда.** Лекам (An extension of Wald's theory of statistical decision functions. LeCam L.), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 1, 69—81 (англ.)

Статья обобщает некоторые результаты гл. 2 и 3 книги Вальда (Wald A., Statistical decision functions, 1950) путем ослабления допущений о функции убытка. Устанавливается, что при некоторых условиях множество всех разрешающих функций можно рассматривать как выпуклое подмножество некоторого топологического векторного пространства. При дальнейших налагаемых на функцию убытка условиях функция риска оказывается полунепрерывной снизу и линейной функцией на $D$. Затем даются условия, при выполнении которых $D$ (или некоторое подмножество $D$) компактно. В случае, когда $D$ выпукло и компактно, а функция риска полунепрерывна снизу, пересечение класса всех решений Байеса в широком смысле с замыканием класса всех решений Байеса оказывается полным. Н. Н. Воробьев

**1550. Расположение информации в полиномиальной регрессии.** Гарса (Spacing of information in polynomical regression. Garza A. de la), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 1, 123—130 (англ.)

Пусть $y = P(x)$ — полином степени $m$. Производится $N$ измерений величины $y$ в точках $x_\varepsilon (\varepsilon = 1, 2, \ldots, N)$ со случайными ошибками $\delta_\varepsilon$, имеющими математическое ожидание 0 и дисперсии $\sigma_\varepsilon$. Введем обозначения: $\mathbf{x}(1, x, \ldots, x^m)$, $X = (\mathbf{x})$, $W$ — диагональная матрица с элементами $w_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^{-2}$ на диагонали, $Q = \Sigma_1^N w_\varepsilon$. Величина $Q$ называется полной информацией, а матрица $X'WX$ — матрицей информации. Доказывается, что, какова бы ни была информация $Q$, расположенная в $N$ точках $x_\varepsilon$, среди которых по крайней мере $m+1$ различных, всегда можно перераспределить $Q$ в $m+1$ различных точках $r_j$ таким образом, чтобы $\min x_\varepsilon \leqslant r_j \leqslant \max x_\varepsilon$ и $X'WX = R'UR$, где $R'UR$ — матрица информации после перераспределения точек. Дается метод определения $U$ и $R$. Указывается, что рассмотренная задача имеет практический интерес (например, в химической индустрии), когда переменная $x$ в данном интервале легко контролируется, а экспериментатор заинтересован в том, чтобы без ущерба для точности статистических выводов (условие неизменяемости матрицы информации) число различных уровней $x_\varepsilon$, на которых производятся $N$ наблюдений, было возможно меньшим. В качестве примера рассматривается метод наименьших квадратов приближенного определения многочлена $P(\xi)$ при $m = 2$. Ищется расположение $N$ измерений, для которых максимум дисперсии приближенного многочлена на заданном интервале $x_L < \xi < x_M$ был минимальным. Если $N$ кратно 3, то для достижения этой цели можно распределить измерения поровну в трех точках на концах и в центре рассматриваемого интервала. И. И. Гихман

**1551. Определение закономерности наблюдений в случае многих переменных.** Йордан (Eszlelések törvényszerüségének meghatározása több változó esetén. Jordan Károly), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1953, 3, № 4, 459—466 (венг.)

Пусть переменные $x$, $y$, $z$... и параметры $a$, $b$, $c$... связаны соотношением $F(x\ y, z, \ldots, a, b, c, \ldots) = 0$. Пусть известны результаты $N$ наблюдений каждой из переменных: $x_i$, $y_i$, $z_i$ ... $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Автор указывает итерационный способ для определения неизвестных параметров. Применяется метод наименьших квадратов так, чтобы ни одна из случайных переменных не играла исключительной роли. С помощью этого метода определяются значения параметров уравнения Ван-дер-Ваальса. J. Vincze

**1552. Перемешанные числа.** Штейнхаус (Liczby przetasowane. Steinhaus H.), Zastosow. mat., 1954, 2, № 1, 34—45 (польск., резюме русс., англ.)

См. также РЖМат, 1954, 4511.

**1553 К. Основы расчета по выравниванию методом наименьших квадратов с применениями в геодезии.** Гроссманн (Grundzüge der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate nebst Anwendungen in der Geodäsie. Grossmann Walter. Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer-Verlag, 1953, VIII + 261, 19.80 DM) (нем.)

Эта богато иллюстрированная числовыми примерами книга, позволяющая получить детальное представление о классической теории ошибок и обработке наблюдений, предназначена служить как общим изложением предмета, так и удобным справочником для всякого нуждающегося в помощи по специфическим вопросам выравнивания. Излагаемый материал и особенно числовые иллюстрации имеют ясно выраженную направленность к землемерной съемке и, в частности, к геодезии. Первая глава, озаглавленная «Основания теории ошибок», содержит обсуждение типов ошибок, мер точности, накопления ошибок, средней ошибки, относительной ошибки, вероятной ошибки, истинной ошибки, гауссовского закона ошибок и других, близких к перечисленным, вопросов. Вторая глава, посвященная обработке прямых наблюдений, объясняет цель обработки и иллюстрирует этот процесс как в случае равноточных, так и в случае неравноточных наблюдений. В третьей главе, посвященной косвенным наблюдениям, показано, как в линейном и нелинейном случаях составляются уравнения ошибок, как решаются нормальные уравнения, как организуются вычисления. Рассматриваются также: контроль вычислений, обратные величины весов, средние ошибки неизвестных, вес функции от неизвестных, одновременное вычисление неизвестных и весов и построение окончательных уравнений без промежуточных ступеней. В четвертой главе автор рассматривает наблюдения, подчиняющиеся некоторым условиям. Здесь разбираются: вопрос о составлении уравнений для этих условий, корреляционных уравнений, нормальных уравнений (с контролем вычислений), условных уравнений и уравнений сторон при триангуляции, а также метод Больтца и косвенные наблюдения с уравнениями условий. Пятая глава посвящена решению уравнений методом последовательных приближений, приближению функций, представлению функции с помощью степенных и тригонометрических рядов. Здесь же рассматриваются средние ошибки различных мер точности, средняя ошибка средней ошибки и другие аналогичные величины. Как и следовало ожидать, очень заметно влияние методов Гаусса. Ценным качеством книги является отдельный указатель для иллюстративных примеров, по которому незнакомый с текстом читатель может быстро найти численный пример, иллюстрирующий любую конкретную ситуацию. Всего имеется 38 таких примеров. W. E. Milne

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 7, 650.

**1554 К. Разрешающие процессы. Тролл, Кумс, Дейвис** (Decision processes. Thrall R. M., Coombs C. H., Davis R. L., (Eds New York, Wiley; London, Chapman and Hall., 1954, VIII + 332 p., tables, diagrs, 40 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 275, 9 (англ.)

**1555 К. Выравнивание по методу наименьших квадратов. Пеевский** (Изравнение по метода на най-малките квадрати. 2 изд. Пеевски В.. София, Наука и изкуство, 1954 (1955), 412 стр., 15.25 лв.), Българ. книгопис. 1955, 59, № 4, 7 (болг.)

## ТЕОРИЯ ИГР

**1556. Теория неразделимых выпуклых множеств и теория игр. Франкс** (La théorie des corps convexes non séparables et la théorie des jeux. Franckx Ed.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, 5 sep., 40, № 1, 18—24 (франц.)

В теории игр значительную роль играет теорема Неймана: Если $X$ — совокупность точек $m$-мерного пространства, для которых $x_\mu \geqslant 0$ $(\mu = 1, \ldots, m)$, $\sum_{\mu=1}^{m} x_\mu = 1$, а $Y$ — совокупность точек $n$-мерного пространства, для которых $y_\nu \geqslant 0$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, $\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu = 1$, и если $\| a_{\mu\nu} \|_{\substack{\mu=1,\ldots,m \\ \nu=1,\ldots,n}}$ — произвольная вещественная матрица, то

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\mu y_\nu = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\mu y_\nu.$$

В литературе имеется много различных доказательств этой теоремы, а также обобщающих ее теорем. В реферируемой работе дано еще одно доказательство теоремы Неймана.

Выпуклые оболочки $S$ и $K$ ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_n$ $n$-мерного евклидового пространства $E_n$ и точек $a_1, \ldots, a_m \in E_n$ автор называет неразделимыми относительно точки $z \in E_n$, если существуют точки $y_0 \in S$, $a_0 \in K$ и число $\lambda \geqslant 0$ такие, что $a_0 - z = \lambda y_0$. В противном случае $S$ и $K$ — разделимые. С использованием введенных понятий доказывается, что $\max_{a \in K} \min_{\nu} (a, e_\nu) = \min_{y \in S} \max_{\mu} (a_\mu, y)$ ($(a, e_\nu)$ и $(a_\mu, y)$ — скалярные произведения). Последнее эквивалентно теореме Неймана. Автор обозначает введенное им понятие неразделимости множеств символом $K \bigcap S = \varphi$, который имеет другой общепринятый смысл. Работа содержит большое число опечаток. Г. Ш. Рубинштейн

**1557. О методе «симплекса» в линейном программировании. Сан-Хуан-Льоса** (El método del «simplex» de la programación lineal. San Juan Llosá Ricardo), Rev. cienc. apl., 1954, 8, № 6, 481—492 (исп.)

Дается изложение известного метода «симплекса» (Данциг) в задачах линейного программирования о нахождении вектора с неотрицательными компонентами, связанными несколькими линейными соотношениями, дающего максимум данной линейной форме (см. также РЖМат, 1955, 2409 к). В схему метода вносится некоторое упрощение, основанное на построении критерия, позволяющего установить, что векто , исключенный на данном шагу процесса решения, не появится вновь на одном из ближайших шагов. Впрочем, более простая, чем у Данцига и у автора, форма того же метода, основанная на использовании «разрешающих множителей», уже применялась в аналогичном классе задач (Л. В Канторович, В. А. Залгаллер, Расчет рационального раскроя промышленных материалов, Лениздат, 1951; Л. В. Канторович, Математические методы организации и планирования производства. Изд-во ЛГУ, 1939). Л. В. Канторович

## ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

**1558. Стохастическая модель поля с флюктуирующей плотностью. Рамакришнан** (A stochastic model of a fluctuating density field. Ramakrishnan Alladi), Astrophys. J., 1954, 119, № 2, 443—455 (англ.)

Плотность $\rho(t)$ распределения материи в пространстве рассматривается как случайная функция точки $t$, и ставится задача вычисления моментов случайной величины $M(V) = \int_V \rho dv$. Для этого нужно уметь вычислять математические ожидания $E\{\rho(t_1)\rho(t_2)\ldots\rho(t_n)\}$, причем при независимости значений плотности в различных точках величина $M(V)$ оказывается неслучайной.

Рассматривается лишь одномерный случай и предполагается, что плотность распределения материи по прямой $\rho(t)$ есть однородная марковская случайная функция координаты $t$, для которой плотность вероятности перехода обладает свойством $\Pi\{\rho' \mid \rho; |t'-t|\} \sim a\psi(\rho')|t'-t|$ при $t'-t \to 0$, причем интеграл от $\psi(\rho')$ по всем значениям $\rho'$ равен единице. Величина $1/a$ аналогична «пути перемешивания» в теории турбулентности. Используя дифференциальные уравнения для марковских случайных процессов, удается получить формулу

$$\Pi\{\rho' \mid \rho;\ t'-t\} = \psi(\rho')(1-e^{-a|t'-t|}) + \delta(\rho'-\rho)e^{-a|t'-t|}.$$

В случае больших $a$ моменты случайной величины $M(t) = \int_0^t \rho(t')\,dt'$ с точностью до слагаемых порядка $1/a^2$ представляются в виде

$$E\{M^n(t)\} = [E\{\rho\}t]^n + \alpha^2\tau_0 n(n-1)[E\{\rho\}t]^{n-1};$$
$$\alpha^2 = (E\{\rho^2\} - [E\{\rho\}]^2)[E\{\rho\}]^{-2}, \quad \tau_0 = a^{-1}E\{\rho\}.$$

Полученные результаты применяются для описания флюктуаций яркости Млечного Пути и позволяют обобщить формулы, предложенные Чандрасекаром и Мюнхом (Chandrasekhar, Münch, Astrophys. J., 1950, 112, 380, 383; 1951, 114, 110). А. С. Монин

**1559. Статистическая модель для распределения зерен серебра в фотопленке. Пичинбоно** (Modèle statistique suggéré par la distribution de grains d'argent dans les films photographiques. Picinbono Bernard), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 23, 2206—2208 (франц.)

Предполагается, что зерна серебра на фотопленке представляют собой круглые абсолютно непрозрачные диски, центры которых распределены по двумерному закону Пуассона с параметром $d$, а радиус каждого диска является случайной величиной с фиксированной функцией распределения вероятностей $p(r)$. В таком случае прозрачность пленки $T(M)$, определяемая соотношением

$$T(M) = \begin{cases} 0, & \text{если } M \text{ покрывается хоть одним зерном,} \\ 1, & \text{если } M \text{ не покрывается ни одним зерном,} \end{cases}$$

будет однородной и изотропной случайной функцией точки $M$ плоскости. Выводятся формулы, явно выражающие среднее значение $T(M)$, дисперсию этой величины и корреляционную функцию случайной функции $T(M)$ через константу $d$ и функцию $p(r)$.

А. М. Яглом

**1560. Некоторые следствия теоремы Гумбеля в приложении к редким событиям. Левер** (Quelques détails mathématiques sur le théorème de Gumbel appliqué aux événements rares. Levert Christoffel), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 2, 149—151 (франц.)

Развиваются некоторые выводы из предложенной Гумбелем статистической теории максимального стока воды, основанной на распределении наибольшего члена вариационного ряда нормальной величины. Предполагая показательный закон для времен возвращения уровней данного размера, автор устанавливает зависимость между вероятностями $P(y, \Delta)$ того, что годовой приведенный максимум окажется в промежутке $(y-\Delta, y+\Delta)$, и вероятностью $K$ того, что это событие повторится после $\overline{T}(y)/s$ и не более чем через $\overline{T}(y)s$ лет, где $\overline{T}(y) = [1-\exp(-e^{-y})]^{-1}$, $s = e^{\Delta}$. В статье много опечаток. Н. В. Смирнов

**1561. Разложение для некоторых двумерных плотностей вероятностей и его приложение к задачам теории шумов. Барретт, Лампард** (An expansion for some second-order probability distributions and its application to noise problems. Barrett J. F., Lampard D. G.), IRE Trans. Inform. Theory, 1955, IT-1, № 1, 10—15 (англ.)

Пусть $\theta_n^{(1)}(x_1)$ и $\theta_n^{(2)}(x_2)$, $n = 1, 2, \ldots$, — ортонормированные с весами $p_1(x_1)$ и $p_2(x_2)$ последовательности полиномов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_i(x_i)\,\theta_m^{(i)}(x_i)\,\theta_n^{(i)}(x_i)\,dx_i = \delta_{mn}, \quad i = 1, 2, \qquad (1)$$

где $p_1(x_1)$ и $p_2(x_2)$ — плотности распределения вероятностей для двух случайных величин $x_1$ и $x_2$. В таком случае соответствующая двумерная плотность вероятности $p(x_1; x_2)$ может быть разложена в ряд

$$p(x_1, x_2) = p_1(x_1)\,p_2(x_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}\theta_m^{(1)}(x_1)\,\theta_n^{(2)}(x_2), \qquad (2)$$

где

$$a_{mn} = \iint p(x_1, x_2)\,\theta_m^{(1)}(x_1)\,\theta_n^{(2)}(x_2)\,dx_1 dx_2. \qquad (3)$$

Нетрудно проверить, что при этом всегда

$$\theta_0^{(i)}(x_i) = 1, \quad \theta_1^{(i)}(x_i) = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}, \quad i = 1, 2. \qquad (4)$$

где $\mu_i$ и $\sigma_i^2$ — среднее значение и дисперсия величины $x_i$ (предполагается, что последовательности $\{\theta_n^{(1)}(x_1)\}$ и $\{\theta_n^{(2)}(x_2)\}$ строятся с помощью обычной ортогонализации последовательности степеней $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$) и что

$$a_{00} = 1, \ a_{11} = \rho, \ |a_{nn}| \leqslant 1 \text{ для всех } n, \qquad (5)$$

где $\rho$ — коэффициент корреляции величин $x_1$ и $x_2$. Вводится в рассмотрение класс $\Lambda$ двумерных плотностей $p(x_1; x_2)$, характеризуемый тем свойством, что для него в разложении (2) будет $a_{nn} = 0$ при $m \neq n$. Доказывается, что в класс $\Lambda$ будет входить целый ряд важных практически двумерных плотностей, а именно: 1) все двумерные гауссовские плотности (в этом случае полиномы $\theta_n^{(i)}(x_i)$ просто выражаются через полиномы Эрмита), 2) двумерная плотность распределения вероятностей для значений в два момента времени огибающей процесса на выходе узкополосного фильтра, на вход которого подается произвольный гауссовский шум (явное выражение этой плотности см., например, в статье Райса в сборнике «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех» (М., Изд-во Ин. лит., 1953); полиномы $\theta_n^{(i)}(x_i)$ здесь выражаются через полиномы Лягерра) и 3) двумерная плотность вероятностей для значений в два момента времени синусоидального сигнала фиксированной амплитуды и частоты, но со случайной фазой (выражение для $p(x_1; x_2)$ также см. в цитированной выше статье Райса; полиномы $\theta_n^{(i)}(x_i)$ здесь выражаются через многочлены Чебышева). Далее показывается, что в случае стационарного вероятностного марковского процесса $x(t)$, двумерная плотность распределения вероятностей для значений $x(t_1)$ и $x(t_2)$ которого принадлежит классу $\Lambda$, корреляционная функция $R(\tau)$ обязательно будет экспоненциальной функцией (обобщение известного результата, касающегося гауссовских стационарных марковских процессов). В качестве основного результата выводится, что в случае двух стационарных и стационарно связанных процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$, для которых двумерная плотность вероятности для $\{x_1(t_1)x_2(t_2)\}$

принадлежит классу Λ, взаимная корреляционная функция процессов $x_1(t)$ и $y_2(t) = f\{x_2(t)\}$ при любой функции $f(x)$ будет отличаться от взаимной корреляционной функции процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ лишь на постоянный множитель; указывается, что этот результат обобщает некоторые результаты, содержащиеся в неопубликованных отчетах одной из американских лабораторий. А. М. Яглом

**1562. О длительности выбросов случайной функции. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И.,** Ж. техн. физики, 1954, **24**, № 1, 103—112

Основной в работе является формула, выражающая вероятность того, что дифференцируемая случайная функция в течение данного интервала времени находится ниже кривой $y = \varphi(x)$. Эта формула не нова и содержится, например, в цитируемой авторами статье Райса (Сб.«Теория передачи электрических сигналов при наличии помех», Изд-во ин. лит., М., 1953, стр. 144). И. И. Гихман

**1563. К вопросу об интерференции сложных сигналов. Карновский М. И.,** Тр. Комис. по акустике АН СССР, 1955, № 8, 139—150

Выписывается формула, выражающая среднее квадратичное значение сигнала $F_\tau(t) = f(t) \pm f(t-\tau)$, где $f(t)$ предполагается стационарным вероятностным процессом, через корреляционную функцию процесса $f(t)$ (см. РЖМат, 1954, 2674, где рассмотрено использование этой формулы для измерений корреляционной функции). В предположении, что сигнал $f(t)$ представляет собой результат вырезания спектральной полосы $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ из белого шума, отсюда определяется «коэффициент направленности» $S(\alpha)$ системы из двух точечных антенн, характеризующий зависимость среднего квадратичного значения суммы (или разности) сигналов, принятых этими антеннами, от угла распространения волн; приводится ряд графиков функций $S(\alpha)$. В заключение рассматривается общий вопрос о среднем квадратичном значении $\sqrt{F_\Sigma^2(t)}$ $F_\Sigma(t) = f_1(t) \pm f_2(t)$, где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ получаются с помощью пропускания одного сигнала $f(t)$ через два линейных фильтра; дается ряд частных случаев общей формулы для $\sqrt{F_\Sigma^2(t)}$, получаемых при специальных предположениях о корреляционной функции процесса $f(t)$ и о частотных характеристиках рассматриваемых фильтров. А. М. Яглом

**1564. Минимальный срок жизни материалов при испытаниях на усталость. Фрёйденталь, Гумбель** (Minimum life in fatigue. Freudenthal A. M., Gumbel E. J.), J. Amer. Statist. Assoc., 1954, **49**, № 267, 575—597 (англ.)

Испытание данного материала на усталость заключается в том, что определенный образец подвергается периодическому воздействию силы с постоянной амплитудой $S$. Воздействие силы в течение одного периода называется циклом. Если образец разрушается после $N$ циклов, то говорят, что срок жизни образца равен $N$ ($N$ может быть и дробным числом). Для многих материалов при постоянной амплитуде $S$ силового воздействия $N_{0,S} = \inf N > 0$, где нижняя грань ищется по всем однотипным образцам, изготовленным из данного материала. Число $N_{0,S}$ называется минимальным сроком жизни рассматриваемых образцов. Для фиксированного образца срок его жизни $\nu$ является случайной величиной. Утверждается, что во многих случаях получается хорошее согласие с действительностью, если положить

$$P\{\nu \geqslant N|S\} = l(N)_S = \begin{cases} \exp\left[-\left(\dfrac{N - N_{0,S}}{V_S - N_{0,S}}\right)^{\alpha_S}\right], & N \geqslant N_{0,S}, \\ 1, & N < N_{0,S}, \end{cases}$$

где $V_S$ — такое количество циклов, при котором $l(V_S)_S = 1/e$, и $\alpha_S$ — некоторый параметр, зависящий от свойств испытываемого материала. Подчеркивается, что при испытаниях на усталость, как правило, $\alpha_S \neq 1$, так как срок жизни образца существенно зависит от его «возраста». Излагается методика оценки параметров $N_{0,S}$, $V_S$ и $\alpha_S$. На примерах показано, как оценивается минимальный срок жизни некоторых изделий из никеля и алюминия. См. также РЖМат, 1953, 1317. Л. Н. Большев

**1565. Информация, селекция, селективная информация. Есть ли надежность мировая постоянная? Лалоэ** (Information, sélection, information sélective. La sécurité est-elle une constante d'univers? Laloë Michel), Ann. télécommuns, 1955, **10**, № 2, 31—38 (франц.)

Статья дискутирует различные вопросы практической приложимости понятий и выводов теории информации, преимущественно в телесвязи и радиолокации. С математической стороны следует отметить решение некоторых элементарных экстремальных задач (например, отыскание источника с данной энтропией, дающего минимальную вероятность ошибки при угадывании посланного сигнала). Может представлять интерес и проведенный в статье детальный расчет некоторых простейших примеров. А. Я. Хинчин

**1566. Основы статистического контроля качества. Штейнхаус** (Podstawy kontroli statystycznej. Steinhaus H.), Zastosow. mat., 1953, **1**, № 1, 4—27 (польск.)

Статистический контроль качества приводит, на основе плана выборочного приема, к принятию решения о партии товара в зависимости от качества экземпляров в выборке. План, который дает минимум экономического убытка, является лучшим. Убыток равен сумме потери из-за неправильного решения и стоимости выбора; он дается в виде функции $S(a, t)$ где $a$ — качество партии, $t$ — действительное число, связанное взаимно однозначным соответствием с множеством случайных величин, характеризующих экземпляры в выборке. Для того чтобы определить лучший план, необходимо дать числовое значение функции $S(a, t)$, считая $a$ и $t$ явными переменными. Интегрирование по $t$ превращает убыток $S$ в среднее значение убытка, причем $a$ можно исключить разными методами. Каждый из этих методов приводит к некоторому оптимальному плану, если принять соответствующую гипотезу о распределении качества $\{a_n\}$ в последовательности партий, представленных к приемке, и рассматривать вместо убытка в одной приемке средний убыток в множестве приемок. Эта схема охватывает все известные методы статистического контроля качества. Их экономическая рациональность зависит от рациональности гипотезы о распределении $a_n$. Это основывается на том, что все гипотезы, относящиеся к обычно применяемым методам,— искусственные, а иллюзия, что некоторые современные методы превосходят другие, состоит в замаскировании гипотез. Анализ пяти типичных методов показывает, что так называемый ретроспективный метод, осуждаемый из-за неправильного применения правила Байеса, никоим образом не худший, чем другие методы. Наоборот, гипотеза, относящаяся к нему, более естественна, чем гипотезы, относящиеся к другим методам. Резюме автора

**1567. О дифференциальных уравнениях 1-го порядка со случайным членом. Щиголев Б.,** Тр. Гос. астроном ин-та им. Штернберга, 1954, 24, 98—108

Рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения вида $dx/dt = X(t, x, \nu)$, где параметр $\nu$ является случайной величиной с известной не зависящей от $t$ плотностью. Вычисляются плотность и моменты решения $x(t; t_0, x_0, \nu)$ для случая, когда $X$ зависит от $x$ линейно. В общем случае рекомендуется применять метод малого параметра. Л. Н. Большев

**1568. Об оценке Маркова. Митропольский А. К.,** Техн. информация по результатам науч.-исслед. работ Ленингр. лесотехн. акад., 1954, № 15, 9—15

**См. также:** 918, 968, 1695 К

## ГЕОМЕТРИЯ

**1569. К истории развития методики геометрии. Ланков А. В.,** Уч. зап. Молотовск. гос. пед. ин-та, 1954, вып. 13, 19—37

**1570. Неевклидова геометрия. Кульчицкий** (Geometria nieeuklidesowa. Kulczycki Stefan), Matematyka, 1954, 7, № 6, 9—18 (польск.)

Краткие сведения о возникновении неевклидовой геометрии Лобачевского, ее отличии от геометрии Евклида и значении для математики и физических наук. Неправильно указан год рождения Лобачевского: 1793 вместо 1792. В. Ф. Рогаченко

**1571. Теория относительности и ее современное развитие. Папапетроу** (Die Relativitätstheorie und ihre neuere Entwicklung. Papapetrou Achilles), Wiss. Ann., 1953, 2, № 10, 593—609 (нем.)

В популярной форме излагается современное состояние специальной и общей теории относительности. Дается простое описание попыток построения так называемой единой теории поля. В заключение автор указывает, что вряд ли возможно построение единой теории поля, исходя только из соответствующей «геометризации» пространства. К. П. Станюкович

**1572. Об условиях, необходимых и достаточных, равносоставленности равновеликих плоских фигур нулевого рода. Андронов И. К.,** Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1954, 20, № 3, 138—144

Теорема Бояи — Гервина (равновеликие многоугольники равносоставлены) обобщается на плоские фигуры нулевого рода, ограниченные непрерывными замкнутыми кривыми с конечным числом точек перегиба.

Конгруэнтным дугам контура фигуры приписываются одинаковые знаки, если стягивающие их хорды лежат либо обе внутри фигуры, либо обе вне ее, в противном случае — разные знаки. Фигура нулевого рода называется приведенной, если на контуре не имеется ни одной пары конгруэнтных дуг разных знаков.

Чтобы равновеликие многоугольник и фигура нулевого рода с конечным числом точек перегиба на контуре были равносоставлены, необходима и достаточна разложимость контура фигуры на прямолинейные отрезки или (и) на попарно конгруэнтные дуги разных знаков.

Чтобы две равновеликие приведенные плоские фигуры нулевого рода с конечным числом точек перегиба на контуре были равносоставлены, необходима и достаточна разложимость их контуров на прямолинейные от езки или (и) на попарно конгруэнтные дуги одинаковых знаков. М. В. Потоцкий

**1573. Обоснование геометрии при помощи понятия зеркального отображения. Бахман** (Begründung der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Bachmann Friedrich), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 192 (нем.)

Резюме сообщения о теоретико-групповых проблемах, возникающих в связи с исчислением зеркальных отображений, применяемым в обосновании метрических геометрий на плоскости. В. И. Левин

**1574. Об элементарном методе измерения круга Сас** (Az elemi körmérésről. Szász Pál), Mat. lapok, 1954, 5, № 2—3, 73—78 (венг.; резюме русс., нем.)

Элементарно доказывается неравенство $3t_nT_n/(T_n + 2t\pi_n) < \pi < 1/3(t_n + 2t_n)$, где $t_n$ — площадь правильного многоугольника, вписанного в круг радиуса единица, а $T_n$ — площадь одноименного правильного описанного многоугольника. Пользуясь этим неравенством, автор вычисляет $\pi$ с точностью до 0,001. С. И. Зетель

**1575. О приближениях при перекраивании по методу равносоставленности равновеликих многогранников. Андронов И. К.,** Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1954, 20, № 3, 133—137

Поскольку равновеликие многогранники вообще не равносоставлены, ставится вопрос о разбиении многогранника на его составляющие так, чтобы из них можно было собрать другой многогранник, равновеликий данному с заданной точностью.

Для преобразования произвольного тетраэдра в приближенно равновеликий параллелепипед с точностью до $1/n$ объема делим все 6 ребер тетраэдра пополам. Соединяя определенным образом полученные середины, разбиваем тетраэдр на 2 равновеликие треугольные призмы и 2 конгруэнтных тетраэдра, подобных данному. Каждый из тетраэдров разбиваем аналогично. Можно установить число шагов, после выполнения которых из полученных призм удается составить параллелепипед, удовлетворяющий поставленным условиям (Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1951, 28, 160—166). Перекраивание простого многогранника в приближенно равновеликий параллелепипед совершается путем разбиения многогранника из внутренней точки на пирамиды, а последние на тетраэдры. Перекраивание многогранника в многогранник достигается путем перекраивания каждого в приближенно равновеликий параллелепипед. М. В. Потоцкий

**1576. Об одной замечательной точке четырехугольника. Мажо** (Sur un point remarquable du quadrangle. Majo A. de), Mathesis, 1954, 63, № 6—8, 236—240 (франц.)

Отмечаются свойства точки, называемой автором «тангенциальной». Л. Я. Березина

**1577. О треугольнике с двумя равными биссектрисами. Ренцо** (Sul triangolo avente due bisettrici uguali. Renzo Gregorio), Period. mat., 1954, 32, № 4, 231—235 (итал.)

Приводится новое доказательство теоремы: треугольник с двумя равными биссектрисами — равнобедренный. Доказательство основано на рассмотрении нескольких пар равных треугольников. Предварительно доказана лемма о равенстве двух тупоугольных треугольников, у которых две стороны одного равны двум сторонам другого и у которых равны тупые углы, лежащие против равных сторон. С. И. Зетель

1578. **Теорема Боббилье. Нараянан** (Bobbilier's theorem. Narayanan S.) Math. Student, 1954, **22**, № 3, 150—151 (англ.)

Окружности, описанные около треугольников, подерных относительно фиксированной точки треугольникам, вписанным в коническое сечение,— проходят через определенную точку.

Для равносторонней гиперболы этой точкой является центр гиперболы. С. И. Зетель

1579. **Преобразование полного многоугольника в звезду. Готфрид** (Przekształcenie wieloboku zupełnego na gwiazdę. Gottfried Jan), Przegl. elektrotechn., 1955, **31**, № 1, 13—15 (польск.; резюме русс., англ.)

Полный многоугольник — выпуклый многоугольник со всеми проведенными диагоналями. Даются простые формулы, преобразующие произвольный полный многоугольник в звезду. С. И. Зетель

1580. **Об использовании осей эллипса Штейнера. Каваларо** (Sur l'emploi des axes de l'ellipse de Steiner Cavallaro Vincenzo G.), Mathesis, 1954, **63**, № 1—2, 29—36 (франц.)

Дается вывод ряда зависимостей, выражающих величины, связанные с треугольником, через оси вписанного эллипса Штейнера. Например,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 18(\varphi^2 + \psi^2), \quad S = \varphi\psi\sqrt{27},$$

где $a$, $b$, $c$ — стороны треугольника, $S$ — его площадь, $\varphi$ и $\psi$ — полуоси вписанного эллипса Штейнера.

Я. П. Бланк

1581. **О точке Штейнера и фокусе параболы Киперта. До** (Sur le point de Steiner et le foyer de la parabole de Kiepert. Deaux R.), Mathesis, 1954, **63**, № 6—8, 250—254 (франц.)

Рассматривается преобразование $x_1 = a^2x$, $y_1 = b^2y$, $z_1 = c^2z$, где $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$, для барицентрических координат точки. Отмечаются свойства точки Штейнера и фокуса параболы Киперта и симметричных к ним точек относительно прямых

$$a^2x + b^2y + c^2z = 0$$

и

$$x/a^2 + y/b^2 + z/c^2 = 0.$$

Л. Я. Березина

1582. **Несколько замечаний о параболе. Мамес** (Kilka uwag o paraboli. Mames Jakub), Matematyka, 1954, **7**, № 6, 3—9 (польск.)

Дается элементарный вывод известных свойств параболы; получаются построения по данным фокусу и директрисе параболы: любого числа ее точек и т. д.

В. Ф. Рогаченко

1583. **Об изотопии парабол. Захаров Д. А.,** Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1954, **5**, 27—31

Две фигуры, расположенные в двух метрических пространствах, называются инфинитезимально (сильно) изотопными, если существует в обе стороны равномерно непрерывное (в обе стороны удовлетворяющее условию Липшица) соответствие между точками этих пространств, при котором данные фигуры соответствуют друг другу. В этой заметке рассматривается вопрос об изотопии парабол $y = a_0x^n + \ldots + a_n$.

Теорема 1. Все параболы одного и того же порядка сильно и, следовательно, инфинитезимально изотопны.

Теорема 2. Любая парабола нечетного порядка сильно (инфинитезимально) изотопна прямой.

Теорема 3. Параболы различных четных порядков инфинитезимально (и, тем более, сильно) не изотопны. В. А. Ефремович

1584. **Конические сечения, которые дважды касаются двух заданных конических сечений. Боттема** (De kegelsneden, die twee gegeven kegelsneden elk tweemaal raken. Bottema O.), Nieuw tijdschr. wiskunde, 1954 (1955), **42**, № 3, 165—175 (голл.)

Как указано в статье, Шаль уже в 1816 г. показал, что через каждую точку плоскости проходят шесть невырожденных конических сечений названного в заглавии семейства. Автор статьи исследует вопрос, сколько из этих шести линий будут действительными при различных предположениях относительно действительности и расположения двух основных конических сечений и изучаемой точки плоскости.

Г. К. Энгелис

1585. **Простой способ доказательства теорем, связанных с теоремой Пелза. Кадержавек** (Jednoduchý dukaz vět spojených s větou pelzovou. Kadeřávek František), Časop. pěstov. mat., 1954, **79**, № 3, 249—251 (чеш.)

Дается простое доказательство следующей теоремы: Гомотетичные конические сечения, касающиеся данного центрального конического сечения $S$ в двух точках, образуют две группы кривых. Хорды, соединяющие точки касания кривых каждой группы, параллельны одному из двух взаимно сопряженных диаметров конического сечения $S$, а их фокусы образуют четыре конических сечения, софокусных с $S$. Я. П. Бланк

1586. **О псевдопараллельных тетраэдрах. Било** (Sur les tétraèdres pseudoparallèles. Bilo J.), Mathesis, 1953, **62**, № 8—9—10, 297—303 (франц.)

Если прямые, проведенные через вершины тетраэдра $ABCD$ параллельно соответствующим медианам тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$, являются четырьмя образующими одной системы прямолинейных образующих поверхности 2-го порядка (гиперболоидальные четверки), то и прямые, проведенные через вершины тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ параллельно соответствующим медианам тетраэдра $ABCD$, являются образующими такой же системы. В этом случае тетраэдры $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ называются псевдопараллельными. Для того чтобы аффинитет пространства преобразовывал тетраэдр $ABCD$ в псевдопараллельный тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$, необходимо и достаточно, чтобы три инвариантные направления аффинитета были параллельны системе трех сопряженных диаметров эллипсоида Штейнера для $ABCD$. Два тетраэдра гомологичны и псевдопараллельны одновременно тогда и только тогда, когда центр гомологии и центры тяжести тетраэдров коллинеарны. При доказательстве достаточности этого условия предполагается, кроме того, что центр гомологии — собственный.

Исследуется также пара тетраэдров в случае, когда одна или обе регулярные системы, присоединенные к тетраэдрам, вырождены. В. Т. Базылев

1587. **Об однополостном гиперболоиде. Шустер** (Sur l'hyperboloide à une nappe. Schuster Jan), Věstn. Královské české společ. nauk. Třida mat.-pripodověd., 1952, 1—17 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

Выводится различными способами уравнение однополостного гиперболоида в функции координат трех прямых $p$, $q$, $r$, являющееся удобным для изучения связок однополостных гиперболических поверхностей. Усматривается аналогия со связками окружностей. Далее легко получаются уравнения сечений гиперболоида различными плоскостями. Полученные уравнения применяются к решению различных задач, в некоторых случаях с использованием плюккеровых координат.

С. И. Зетель

1588. **Векторы на сфере. Атен** (Vektorrechnung auf der Kugelfläche. Athen Hermann), Math.-phys. Semesterber., 1954, **4**, № 1/2, 90—100 (нем.)

Сферическим вектором называется ориентированный отрезок большого круга. Сумма определяется правилом треугольника. Векторы предполагаются скользящими по своему кругу, поэтому сумма некоммутативна. Сферический вектор $a$ определяется скаляром $\cos a = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ и вектором $\sin a = [\mathbf{A}\times\mathbf{B}]$, где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — единичные векторы, соединяющие центр сферы с началом и концом сферического вектора $a$. Полученные в статье формулы облегчают расчет сферических многоугольников. Л. Я. Березина

**1589. О формуле двойного векторного произведения.** Лаурент и (Sur la formule du double produit vectoriel. Laurenti Fernando), Enseign. math., 1953, **39**, № 4—6, 192—194 (франц.)

Дан новый вывод формулы

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}, \qquad (1)$$

которую, вследствие ее однородности, достаточно доказать для случая единичных векторов. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}'$ — компланарные единичные векторы, $\mathbf{ab} = \mathbf{cc}' = 0$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{c}\times\mathbf{c}'$. Очевидно, $\mathbf{c}' = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$, $\mathbf{c} = (\mathbf{ac})\,\mathbf{a} + (\mathbf{bc})\,\mathbf{b}$, следовательно, $\mathbf{c}' = -(\mathbf{bc})\,\mathbf{a} + (\mathbf{ac})\,\mathbf{b}$; отсюда вытекает справедливость равенства (1). Если $\mathbf{ab} \neq 0$, то, полагая $\mathbf{b} = \mathbf{b}' + m\mathbf{c}$, где $\mathbf{b}'^2 = 1$, $\mathbf{ab}' = 0$, $m$ — действительное число, снова получим (1). Если вектор $\mathbf{c}$ не компланарен с $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то, полагая $\mathbf{c} = \mathbf{c}'' + n(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$, где $\mathbf{c}''^2 = 1$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,\mathbf{c}'' = 0$, $n$ — действительное число, снова придем к формуле (1).
А. С. Смогоржевский

**1590. О векторных суммах и произведениях. Кламкин** (On vector sums and products. Klamkin Murray S.), Amer. J. Phys., 1954, **22**, № 4, 159—161 (англ.)

Вектор определен как направленный отрезок. Автор выводит закон сложения векторов по правилу параллелограмма из следующих аксиом:

$$r(s\mathbf{A}) = (r\cdot s)\,\mathbf{A} = r\cdot s\mathbf{A},$$
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A},$$
$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C},$$
$$r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = r\mathbf{A} + r\mathbf{B}.$$

Предполагается, что вектор $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ лежит в плоскости векторов ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$). Получены обычные выражения для скалярного и векторного произведений векторов.
И. Н. Григорьев

**1591 К. Краткий курс аналитической геометрии** (Для вузов). **Ефимов Н. В.**, Изд. 3-е, стереотип., М., Гостехиздат, 1955, 256 стр. с черт., 6 р. 35 к.

**1592 Д. Пространства, допускающие отображение на евклидово с сохранением комплекса геодезических линий. Чернышенко В. М.**, Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, Днепропетровск, 1955

## ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

**1593. О некоторых вопросах геометрографии, связанных с точностью графических расчетов. Буймола Г. Л.**, Науч. тр. Львовск. лесотехн. ин-та, 1954, **1**, 180—190

Исследуются источники возникновения ошибок при различных геометрических построениях и графических расчетах — фактическое осуществление на чертеже точек и прямых в виде кружков и полосок, накопление ошибок при использовании конструктивных элементов различных категорий (первичные, вторичные и т. д. ошибки). В. Ф. Рогаченко

**1594. Графическое преобразование фотографических изображений в ортогональные проекции. Кон А. А.**, Тр. Ленингр. воен.-механ. ин-та, 1954, № 1, 147—160

Преобразование фотографического изображения, соответствующего центральному проектированию, в ортогональные проекции позволяет просто решать различные метрические задачи. Исследуется графический способ преобразования фотографического изображения объекта в проекционно связанные ортогональные проекции.

Рассматривается способ построения центральных проекций предмета по его ортогональным проекциям на произвольно выбранную картинную плоскость из заданной точки зрения. Методы начертательной геометрии позволяют найти центральную проекцию точки как точки пересечения картинной плоскости с двумя вспомогательными плоскостями, проведенными через проектируемую точку и точку зрения.

В обратной задаче рассматривается построение ортогональной проекции точки по заданной главной и одной вторичной ее центральным проекциям. Установленные проекционные связи позволяют построить по фотографическому изображению предмета его ортогональные проекции и ортогональные проекции его зеркального отражения. В. С. Люкшин

## ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

**1595. О графическом построении центров кривых второго порядка. Дешевой Г. М.**, Тр. Ленингр. технол. ин-та им. Ленсовета, 1955, 32, 13—22

**1596. Заметки о косом четырехстороннике. Боттема** (Notes on the skew quadrilateral. Bottema O.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 1, 692—693 (англ.)

Дано алгебраическое доказательство теоремы Тебо (РЖМат, 1953, 394): Если в косом четырехстороннике $ABCD$ противоположные углы попарно равны: $\angle ABC = \angle CDA$ и $\angle BCD = \angle DAB$, — то и противоположные стороны попарно равны: $AB = CD$ и $BC = DA$.
Л. Л. Вербицкий

**1597. О полном четырехстороннике. Тебо** (Concerning the complete quadrilateral. Thébault Victor), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 9, 604—606 (англ.)

Полный четырехсторонник образован треугольником $T \equiv ABC$ и секущей, пересекающей его стороны $BC$, $CA$, $AB$ в точках $A'$, $B'$, $C'$. $O$, $O_a$, $O_b$, $O_c$ — центры окружностей, описанных около треугольников $T$, $T_a \equiv AB'C'$, $T_b \equiv BC'A'$, $T_c \equiv CA'B'$. $M$ — точка Микеля, в которой пересекаются окружности $(O)$, $(O_a)$, $(O_b)$, $(O_c)$; $\omega$ — окружность Микеля, проходящая через $O$, $O_a$, $O_b$, $O_c$ и $M$. Окружности $(O)$, $(O_a)$, $(O_b)$, $(O_c)$ огибают кардиоиду, полученную преобразованием подобия $(M, 2)$ из подеры окружности Микеля. Если вместо точек $A'$, $B'$, $C'$ взять произвольно точки на сторонах треугольника $T$, но так, чтобы соответствующие окружности проходили через точку $M$, то окружности будут огибать улитку Паскаля с полюсом в $M$ и производящим кругом $(\omega)$. Перпендикуляры, делящие пополам отрезки $OH$, $O_aH_a$, $O_bH_b$, $O_cH_c$, соединяющие центры описанных кругов с ортоцентрами треугольников $T$, $T_a$, $T_b$, $T_c$, пересекаются в ортоцентре $\Lambda$ вписанного в круг Микеля четырехугольника $OO_aO_bO_c$ — точке Кантора—Гервея. (Ортоцентр $\Lambda$ $n$-угольника, вписанного в круг, определяется соотношением $n\cdot\overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{O\Lambda}$, где $\Omega$ — центр тяжести вершин многоугольника.) А. Г. Школьник

**1598. Новое построение конечных дезарговых проективных плоскостей. Ломбардо-Радиче** (Una nuova construzione dei piani grafici desarguesiani finiti. Lombardo-Radice Lucio), Ricerche Mat., 1953, **2**, 47—57 (итал.)

Дается новое доказательство результата, впервые полученного Гильбертом в его «Основаниях геометрии». Допуская аффинную теорему Дезарга, показывается, что на плоскости можно ввести координаты с помощью тела. Отсюда выводится справедливость полной проективной теоремы Дезарга. Marshall Hall. Jr.

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 5, 461.

**1599. Топологическая классификация коллинеаций проективной плоскости. Алексеева Г. П.,** Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та, 1954, **5**, 37—41

Краткое изложение доклада, прочитанного на городском математическом семинаре г. Иванова. Доказательства отсутствуют. Приведена полная таблица топологических типов коллинеаций проективной плоскости.

В. А. Ефремович

**1600. О связности в топологических проективных плоскостях. Зальцман** (Über den Zusammenhang in topologischen projektiven Ebenen. Salzmann Helmut), Math. Z., 1955, **61**, № 4, 489—494 (нем.)

Независимо от статьи референта (РЖМат, 1955, 4626) вводится понятие топологической проективной плоскости и исследуется связность в ней. По сравнению с вышеупомянутой статьей референта новых результатов не содержится. Л. А. Скорняков

**1601. Геометрическое представление преобразования Гудермана. Казнав** (Représentation géométrique de la transformation de Gudermann. Cazenave René), Ann. télécommuns, 1954, **9**, № 12, 330—333 (франц.)

Рассматривается преобразование Гудермана, определяемое функцией $u=\lambda(\theta)=\ln\operatorname{tg}(\theta/2+\pi/4)$ (обратная к ней функция известна под названием гиперболической амплитуды или гудерманиана аргумента $u$ (Янке Е., Эмде Ф., Таблицы функций, М., Гостехиздат, 1949, 73—75)).

Это преобразование представляется в виде проективного преобразования $x=1/X$, $y=Y/X$ дуги окружности $X^2+Y^2=1$ в правую ветвь гиперболы $x^2-y^2=1$. Автор доказывает, что преобразование Гудермана есть произведение двух проективных преобразований

1) преобразования взаимных поляр $x=(\sqrt{2}-X')/(1-\sqrt{2}X')$, $y=Y'/(1-\sqrt{2}X')$ дуги окружности в ветвь гиперболы (Сальмон, Курс аналитической геометрии, С.-Петербург, 1908, 346, 347).

2) преобразования $X'=(1-\sqrt{2}X)/(\sqrt{2}-X)$, $Y'=Y/(\sqrt{2}-X)$ окружности в себя. П. М. Олоничев

**1602. О проективных преобразованиях. Шаррюо** (Sur les transformations projectives. Charrueau André), J. math. pures et appl., 1954, **33**, № 4, 263—294 (франц.)

Рассматриваются кососимметрические квадратные матрицы четвертого порядка и их применение к геометрии прямых, комплексов прямых и пучков комплексов прямых трехмерного проективного пространства.

М. А. Акивис

**1603. Топологическая и инфинитезимальная классификация аффинных преобразований. Шварц А. С.,** Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1954, **5**, 9—26

Дается топологическая и инфинитезимальная классификация линейных преобразований евклидова пространства $E^3$, а также инфинитезимальная классификация аффинных преобразований $E^1$ и $E^2$. Приведя топологическую классификацию линейных преобразований $E^3$, автор доказывает теоремы, подготавливающие инфинитезимальную классификацию, в частности важную теорему 1 об отображениях метрических пространств, снабженных мерой, подчиненной следующему условию: внутренняя и внешняя меры шара фиксированного радиуса с переменным центром ограничены снизу и сверху положительными константами. При равномерно непрерывном отображении одного такого пространства в другое для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $K_\varepsilon$, что для каждого вполне ограниченного множества $M$ отношение внутренней меры его $\varepsilon$-окрестности к внешней мере его образа больше $K_\varepsilon$. Это условие и теорема 1 уже нашли применение в работах других авторов, в частности при исследовании «объемного инварианта» референтом (Успехи матем. наук, 1953, 8, № 5, 189—191). Далее устанавливается равенство определителей эквиморфных линейных преобразований $E^n$ и дается инфинитезимальная классификация аффинных преобразований $E^1$ и $E^3$. Инфинитезимальная классификация аффинных преобразований $E^1$ совпадает с их аффинной классификацией, а для того чтобы аффинные преобразования $A$ и $B$ плоскости $E^2$ были эквиморфны (теорема 7), необходимо и достаточно выполнение одного из двух условий: 1) $A$ и $B$ аффинно эквивалентны; 2) $A$ и $B$ аффинно эквивалентны двум поворотным растяжениям с одинаковым коэффициентом растяжения по модулю, отличным от 1. Наконец, проведена инфинитезимальная классификация линейных преобразований $E^3$; результат аналогичен теореме 7. В. А. Ефремович

**1604. Замечания к статье Д. Д. Мордухай-Болтовского «Трехмерный и четырехмерный аналогон теоремы Паскаля». Метелька И.,** Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 3, 283—284

Автор исправляет ошибку в статье Д. Д. Мордухай-Болтовского (РЖМат, 1953, 405). Д. Д. Мордухай-Болтовской показал, что в $P_4$ пять плоскостей пересекаются десятью паскалевыми прямыми и имеется бесчисленное множество прямых, пересекающих эти плоскости; эту пятерку плоскостей он назвал гиперболоидальной. Но, как справедливо отмечает автор, в $P_4$ всякая совокупность пяти плоскостей пересекается бесконечным множеством прямых (вообще говоря, $\infty^1$). Поэтому заключительные формулировки Д. Д. Мордухай-Болтовского должны быть исправлены на основе следующей теоремы автора, приведенной им без доказательств.

Пусть имеется в проективном $P_r$ $r-1$ линейных $(r-2)$-мерных многообразий $a^{(i)}$ $(1\leqslant i\leqslant r-1)$ в общем взаимном расположении и, кроме того, $k$-мерное $(0\leqslant k\leqslant r-2)$ линейное многообразие $a^{(r)}$, общерасположенное ко всем $a^{(i)}$. Тогда все прямые, пересекающие $a^{(j)}$ $(1\leqslant j\leqslant r)$, составляют $(k+1)$-мерное многообразие $\Phi_{k+1}$, которое определено однозначно, неприводимо, рационально порядка $(k^{r-1})$, содержит $a^{(r)}$ и пересекает всякое из многообразий $a^{(i)}(1\leqslant i\leqslant r-1)$ в $k$-мерном неприводимом и рациональном многообразии порядка $(k^{r-2})$.

При $r=4$, $k=2$ мы получим трехмерную гиперповерхность $\Phi_3$ третьего порядка, образованную прямыми, пересекающими четыре плоскости. В случае проф. Д. Д. Мордухай-Болтовского и пятая плоскость лежит на гиперповерхности $\Phi_3$, т. е. существует конгруэнция прямых, пересекающих пять плоскостей, что и характеризует их специальное расположение.

Утверждение автора, что наименование «гиперболоидальное расположение» пяти плоскостей у Д. Д. Мордухай-Болтовского лишено основания, неверно. Последний правильно указал путь для построения четырехмерного аналога теоремы Шаля (трехмерный аналог теоремы Паскаля), отметил наличие особого

расположения пяти плоскостей, однако сделал ошибку в характеристике последнего. Вышеуказанная общая теорема автора для $r=4$, $k=2$ была доказана еще А. К. Власовым (Матем. сб., 1925, **32**, № 4, 689—704), который подробно изучил ассоциированную пятерку плоскостей в $P_4$ и связанную с ней конгруэнцию прямых.

С. С. Бюшгенс

**1605. Применение теории обобщенных вурфов к кинематике коллинеарно-изменяемых систем. Глаголев А. А.,** Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1954, **21**, 83—90

Однообразным называется такое движение коллинеарно-изменяемой системы, при котором четыре точки (пространственной системы) или три точки (плоской) остаются неподвижными.

При помощи теории обобщенных вурфов доказана теорема: в однообразном движении $n$-мерной коллинеарно-изменяемой системы траектории всех точек коллинеарны между собой.

Из этой теоремы при $n=2$ и $n=3$ получаются теоремы П. О. Сомова и Бурместра для плоской и пространственной коллинеарно-изменяемой систем.

В работе рассматривается прямолинейное однообразное движение $n$-мерной коллинеарно-изменяемой системы. При этом движущиеся точки в любой момент времени лежат на нормальной кривой $n$-мерного пространства, если их траектории проходят через одну точку пространства.

Траектории всех точек системы образуют совокупность прямых, которую можно рассматривать как аналог обычного тетраэдрального комплекса. При этом автор обнаруживает существование «мгновенного нуль-квадратичного соответствия» в момент времени $t$ между точками и их траекториями, причем три неподвижные прямые системы являются главными элементами этого нуль-квадратичного соответствия.

Более глубокие свойства квадратичного соответствия позволяют получить ряд теорем, например: если семь точек плоской коллинеарно-изменяемой системы будут двигаться по семи наперед заданным прямым, то три точки системы и три соединяющие их прямые остаются неподвижными, а остальные точки системы будут двигаться по прямым линиям.

А. Р. Зенгин

**1606. Двумерная квазипроективная геометрия. Райт** (Quasi-projective geometry of two dimensions. Wright Jesse), Michigan Math. J., 1953—1954, **2**, № 2, 115—122 (англ.)

Ставится задача: описать геометрию, группой автоморфизмов которой является группа коллинеаций и корреляций проективной плоскости. Для решения этой задачи следует объединить точки и прямые под названием «элемент». Элементы связаны соотношением инцидентности (инц.), подчиненным следующей независимой системе аксиом: 1. Никакой элемент не инц. самому себе; 2. Любой элемент инц. по крайней мере трем различным элементам; 3. Для любых трех различных элементов существует элемент, инц. с двумя из них; 4. Если в упорядоченной четверке элементов каждый элемент инц. со следующим, то первый не инц. с последним; 5. То же, что и в 4, но для 5 элементов. Доказаны простейшие следствия приведенных аксиом.

Л. А. Скорняков

## АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

**1607. Замечательная кривая третьего порядка. Тюммерс** (Une cubique remarquable. Tummers J. H.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 260—261 (франц.)

Приводятся без доказательств три теоремы о свойствах конических сечений по отношению к изогональной инверсии. Например, если коническое сечение касается сторон треугольника $ABC$, то точки прикосновения касательных конического сечения, исходящих из точки пересечения биссектрис внутренних углов треугольника $ABC$, являются взаимно сопряженными точками в изогональной инверсии относительно треугольника $ABC$.

Б. Н. Саморуков

**1608. О поверхностях ранга 2, все жанры которых равны единице. Оржеваль** (A propos des surfaces de genres 1 et de rang 2. Orgeval Bernard de), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, **40**, № 2, 109—117 (франц.)

Известен ряд работ Годо об алгебраических поверхностях, все жанры которых равны единице, представляющих инволюцию второго порядка, принадлежащую поверхности, все жанры которой также равны единице (поверхности ранга 2, по терминологии Годо). Им были найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы поверхность $F$, все жанры которой равны единице, порядка $2\pi-2$, нормальная в пространстве $S^\pi$, имела ранг 2: 1) $F$ должна иметь восемь конических двойных точек, 2) среди гиперквадрик пространства $S^\pi$, проходящих через восемь двойных точек, должна существовать единственная линейная система $\infty^{\pi-2}$ гиперквадрик, касающихся поверхности $F$ вдоль некоторой кривой $\Lambda$ порядка $2\pi-2$ и жанра $\pi-2$. Годо дал эффективное построение таких поверхностей для $\pi=3, 4, 5, 6$.

Автор доказывает несуществование поверхности $F$ в пространстве $S^\pi$, где $\pi=3+4\sum_1^\alpha n_i^2$ $(\alpha\leqslant 4)$ и хотя бы одно из четырех $n_i$ отлично от нуля. Опираясь на результаты, опубликованные в его диссертации (Sur les surfaces de genres 1. Thèse, Paris, 1945), автор изучает сначала простейший случай $\alpha=1$, а затем и случай $\alpha\leqslant 4$, приходя во всех случаях к выводу, что допущение существования $F$ ведет к существованию на $F$ двух различных систем кривых $\Lambda$ жанра $\pi-2$, что противоречит указанным условиям теоремы Годо.

С. Д. Россинский

**1609. Пучки нерегулярных алгебраических поверхностей. Годо** (Faisceaux de surfaces algébriques irrégulières. Godeaux Lucien), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 221—222 (франц.)

Составим многочлен $F_n$ порядка $4n$, взяв в квадрате выражения $x_1^{2n}+x_2^{2n}+x_3^{2n}+x_4^{2n}$ все удвоенные произведения со знаками минус. Тогда уравнение

$$F_n+k(x_1x_2x_3x_4)^n=0 \qquad (1)$$

будет изображать пучок поверхностей, который содержит две поверхности при $k=\pm 8$, каждая из которых распадается на четыре поверхности порядка $n$ и одну поверхность, состоящую из четырех граней базисного тетраэдра $T$, считаемых по $n$ раз. Базис пучка состоит из 16 кривых порядка $n$, расположенных по четыре на гранях $T$. Автор указывает особенности поверхностей пучка, находит арифметический и геометрический их жанры и устанавливает, что для $n>1$ эти поверхности нерегулярны.

В статье опечатка: в последнем члене уравнения (1) вместо показателя $n$ стоит $\nu$.

С. С. Бюшгенс

**1610. Об эллиптических поверхностях, содержащих эллиптический пучок кривых жанра четыре. Скафати** (Sulle superficie ellittiche con un fascio ellittico di curve di genere quattro. Scafati Maria), Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, **16**, № 6, 721—724 (итал.)

Краткое сообщение, касающееся классификации поверхностей, указанных в заглавии работы. Эллиптическая поверхность содержит эллиптический пучок кривых $(C)$ жанра $\pi$ и пучок $(K)$ кривых жанра $p_g \leqslant \pi$ (траекторий группы преобразований в себя данной поверхности). Каждая из кривых $K$ пересекает каждую кривую $C$ в $n$ точках; среди $K$ найдется $t$ кривых кратностей $s_i$ (где $s_i$ — делитель $n$), причем имеет место формула Цейтена: $n(2p_g-2)+\sum_1^t (s_i-1)n/s_i = 2\pi-2$. Автор приводит таблицу всех целочисленных решений этого уравнения при $\pi = 4$. Их оказывается 46. Из них только 14 соответствуют действительно существующим поверхностям. Подробное изложение вопроса автор обещает дать в последующих работах. В. В. Морозов

**1611. Представление алгебраических двупараметрических систем прямых. Хейманс** (The representation of algebraic doubly infinite line systems. Heymans P.), J. London Math. Soc., 1954, 29, № 3, 309—318 (англ.)

В $S_r$ рассматривается алгебраическая двупараметрическая система $G$ прямых и порождаемый ею трехмерник Г. Обычным образом прямой в $S_r$ сопоставляется точка алгебраического многообразия $V_{2r-2}$, за которое берется грассманово многообразие $\Omega_r = \Omega(r-1, r)$ (Ходж и Пидо, Методы алгебраической геометрии, Москва, 1954, т. 2, 341). При этом прямым $G$ соответствует некоторая поверхность $F'$, лежащая в $\Omega_r$. Для случая, когда $F'$ гомографична некоторой нормальной поверхности $F$ порядка $N$ или ее проекции из непересекающего $F$ пространства, устанавливается необходимое и достаточное условие существования в $S_r$ системы $G$ класса $s$, порядка $n\,(s+n=N)$ и индекса 1 на Г: на $F$ должны существовать такие гиперплоскостные (prime) сечения $f$, которые несут ряды $g_s^1$ и простые ряды $g_n^{r-2}$, причем те и другие не имеют фиксированных точек, и минимальная сумма которых содержится в характеристических рядах, высекаемых на $f$ гиперплоскостями объемлющего пространства. Автор указывает на возможность обобщения этой теоремы на случай индекса $>1$, но замечает, что получаемый критерий слишком труден для приложений.

Устанавливаются некоторые связи между геометрией нормальной модели $F$ семейства $G$ и его свойствами (направляющие поверхности, особые точки, существование на Г двупараметрических семейств прямых, отличных от $G$). На основе полученных результатов дается весьма краткий набросок классификации линейчатых трехмерников по их классу $s$ и по роду $p$ сечений $F$.

В. В. Морозов

**1612. Об эллиптических трехмерных многообразиях. Рот** (On elliptic threefolds. Roth Leonard), Rend. Circolo mat. Palermo, 1953, 2, № 2, 141—158 (англ.)

По аналогии с определением эллиптических поверхностей (см., например, Enriques, Rend. Palermo, 1905, 20, 61) автор называет алгебраическое трехмерное многообразие $V$ эллиптическим, если оно содержит конгруэнцию Г эллиптических кривых и эллиптический пучок $|C|$ поверхностей, не порождаемых кривыми из Г. Дополнительно предполагается, что Г не имеет базисных и особых точек, а поверхности из $|C|$ свободны от особенностей и бирационально эквивалентны друг другу. Вводятся дополнительные предположения и доказывается ряд свойств эллиптических трехмерных многообразий при этих предположениях. В частности, устанавливается вид уравнений, которыми эллиптические трехмерные многообразия могут быть заданы.

А. И. Узков

**1613. Многообразие Пикара нормального многообразия. Нерон, Самюэль** (La variété de Picard d'une variété normale. Néron André, Samuel Pierre), Ann. Inst. Fourier, 1954 (1952), 4, 1—30 (франц.)

Работа содержит алгебраическую формулировку и доказательство следующих классических фактов. Пусть $V$ — алгебраическое многообразие баз особых точек, расположенное в комплексном проективном пространстве. Дивизорами на $V$ называются элементы свободной абелевой группы $G(V)$, образующими которой являются неприводимые подмногообразия $V$, на 1 меньшей размерности, чем $V$. Обозначим через $G_a(V)$ группу алгебраически эквивалентных нулю дивизоров (определение алгебраической эквивалентности см. Ходж и Пидо, «Методы алгебраической геометрии», М., Изд-во ин. лит., 1954, 2, 198; для поля комплексных чисел совпадает с их гомологичностью). Всякая рациональная функция $\varphi$ на $V$ определяет дивизор $(\varphi)$, являющийся разностью дивизора нулей и дивизора полюсов $\varphi$. Дивизоры $(\varphi)$ образуют группу $G_l(V)$ дивизоров, линейно эквивалентных нулю, причем $G_l(V) \subset G_a(V)$. Как показал Игуза (Amer. J. Math., 1952, 74, 1—22), фактор-группа $G_a(V)/G_l(V)$ естественно отображается на некоторое абелево многообразие, т. е. на комплексное многообразие, являющееся фактор-группой комплексного пространства по некоторой решетке максимальной размерности и аналитически эквивалентное некоторому алгебраическому многообразию. Как показал Лефшец (Зигель, Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, М., Изд-во ин. лит., 1954, прил. 2), всякое абелево многообразие эквивалентно алгебраическому многообразию без особых точек. Таким образом, $G_a(V)/G_l(V)$ естественно отображается на некоторое алгебраическое многообразие без особых точек, называемое многообразием Пикара для $V$.

Эти результаты обобщаются на любые нормальные (в частности, без особых точек) алгебраические многообразия над произвольным полем $k$. Абелевым многообразием называется алгебраическое многообразие без особых точек, являющееся в то же время группой, причем координаты произведения точек рационально выражаются через координаты сомножителей (Weil, Variétés abéliennes et courbes algébriques, Paris, 1948). Доказывается, что над некоторым конечным расширением $k'$ поля $k$ существует такое абелево многообразие $A$ и такой изоморфизм между $G_a(V)/G_l(V)$, что каждому рациональному над $k'$ дивизору из $G_a(V)$ соответствует рациональная над $k'$ точка $A$ и каждой рациональной точке $A$ соответствует класс $G_a(V)/G_l(V)$, содержащий рациональный дивизор.

Доказательство этого фундаментального факта основывается на следующем соображении, идущем еще от Пикара. Доказывается, что многообразие $V^n$ размерности $n$ бирационально эквивалентно над $k'$ такому подмногообразию $V'$ двукратно проективного пространства $S_{n-1} \times S_m$, что для любой точки $M \in S_{n-1}$ лежащее над ней проективное пространство $M \times S_m$ пересекается с $V'$ по кривой $W(M)$ и те точки $M$, для которых эта кривая приводима, образуют алгебраическое подмногообразие размерности $\leqslant n-3$.

Каждому дивизору $D$ на $V'$ ставится в соответствие его пересечение с $W(M)$. Если $M$ есть общая точка, то это соответствие определяет изоморфное отображение группы $G_a(V')/G_l(V')$ на некоторую подгруппу группы $G_a(W(M))/G_l(W(M))$.

Для случая кривых доказываемую теорему недавно установил Чжоу (Chow, Amer. J. Math., 1954, 76, № 2).

Таким образом $G_a(V')/G_l(V')$ отображается на подгруппу некоторого абелева многообразия. Конец доказательства посвящен проверке, того что эта подгруппа является сама абелевым многообразием (достаточно доказать, что она является алгебраическим подмногообразием) и изоморфизм удовлетворяет приведенным в формулировке теоремы условиям рациональности.

Чтение работы затрудняется большим количеством опечаток. И. Р. Шафаревич

**1614. О системах координат $h$-$l$-транзитивных проективных плоскостей.** Ломбардо-Радиче (Sui sistemi cartesiani di coordinate dei piani grafici $h$-$l$-transitivi. Lombardo-Radice Lucio), Boll. Unione mat. ital., 1954, 9, № 1, 24—29 (итал.)

Доказывается, что проективная плоскость $h$-$l$-транзитивна, $h \neq l$ (см., например, Скорняков Л. А., Успехи матем. наук, 1951, 6, № 6, 145) тогда и только тогда, когда хотя бы один из ее тернаров задается телом, инверсно изоморфным веблен-веддербарнову телу, в котором $(ab)c = a(bc)$ для любых $a$, $b$, $c$.

Л. А. Скорняков

**1615. Системы эквипотенциальных $N$-мерных поверхностей (в частности, $N$-мерных эллипсоидов) в пространстве $N+1$ измерений.** Багчи (Note on systems of equi-potential $N$-surfaces (especially, $N$-ellipsoids) in an $(N+1)$-space. Bagchi Haridas), Bull. Calcutta Math. Soc., 1954, 46, № 4, 25—28 (англ.)

На многомерное пространство распространена теория семейств софокусных эллипсоидов. Исходя из данного Плюкером определения фокуса поверхности $\Gamma$ как центра мнимой сферы нулевого радиуса, имеющей с поверхностью $\Gamma$ двойное касание, автор замечает, что в случае пространства $n+1$ измерений это определение приводит к двум независимым соотношениям между координатами фокуса. Поэтому в общем случае $\Gamma$ обладает совокупностью $\infty^{n-1}$ фокусов, образующих некоторую поверхность $\Omega$ $n-1$ измерений. Если $\Gamma$ — поверхность 2-го порядка, заданная уравнением $\Sigma_{r=0}^{n} y_r^2/a_r = 1$, а $\Sigma$ — мнимая сфера нулевого радиуса с центром $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, заданная уравнением $\Sigma_{r=0}^{n}(y_r - x_r)^2 = 0$ и пересекающая $\Gamma$ вдоль $n-1$-мерной поверхности $\Sigma_1$, то условие двойного касания $\Gamma$ и $\Sigma$ сводится к тому, что вдоль $\Sigma_1$ уравнения $\Sigma_{r=0}^{r=n} y_r dy_r/a_r = 0$ и $\Sigma_{r=0}^{r=n}(y_r - x_r)\,dy_r = 0$ равносильны, т. е. $y_r - x_r = \lambda y_r/a_r$, где $\lambda$ — некоторый множитель. Если $\lambda \neq a_0, a_1, \ldots, a_n$, то $y_r - x_r = \lambda x_r/(a_r - \lambda)$; $\Sigma_{r=0}^{n} x_r^2/(a_r - \lambda)^2 = 0$; $\Sigma_{r=0}^{n} x_r^2/(a_r - \lambda) = 1$ и по крайней мере одна из координат $x_r$ — комплексное число. Если же все $x_r$ действительные, то $\lambda = a_k$, $x_k = 0$, $y_r - x_r = a_k x_r/(a_r - a_k)$ при $r \neq k$, откуда получаем уравнение $\Sigma_{r\neq k} x_r^2/(a_r - a_k) = 1$, которое вместе с уравнением $x_k = 0$ определяет $n-1$-мерную поверхность $\Omega_k$; совокупность $n+1$ поверхностей $\Omega_k$ образует фокальную поверхность поверхности $\Gamma$, которая является общей фокальной поверхностью семейства поверхностей $\Gamma_\lambda$, определяемых уравнением

$$\sum_{r=0}^{n} x_r^2/(a_r + \lambda) = 1. \qquad (1)$$

Определяемая уравнением (1) функция $\lambda = \lambda(x_0, \ldots, x_n)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Sigma_{m=0}^{n} \partial^2\lambda/\partial x_m^2 - \chi(\lambda)\,\Sigma_{m=0}^{n}(\partial\lambda/\partial x_m)^2 = 0,$$

где $\chi(\lambda) = \frac{1}{2}\Sigma_{r=0}^{n} 1/(a_r + \lambda)$; если $\mu = \varphi(\lambda)$, то

$$\Sigma_{m=0}^{n} \partial^2\mu/\partial x_m^2 =$$
$$= \varphi''(\lambda) \times \Sigma_{m=0}^{n}(\partial\lambda/\partial x_m)^2 + \varphi'(\lambda)\,\Sigma_{m=0}^{n} \partial^2\lambda/\partial x_m^2.$$

Пусть $\varphi''(\lambda) + \varphi'(\lambda)\chi(\lambda) = 0$. Тогда функция $\mu = \varphi(\lambda)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Sigma_{m=0}^{n} \partial^2\mu/\partial x_m^2 = 0$, причем

$$\mu = C\int_k^\lambda \frac{dt}{\sqrt{(a_0 + t)(a_1 + t)\ldots(a_n + t)}}. \qquad (2)$$

Таким образом любой из эллипсоидов семейства (1)) является эквипотенциальной поверхностью в $n+1$-мерном лапласовом поле, причем зависимость потенциала $\mu$ от $\lambda$ выражается интегралом (2) и содержит две произвольные постоянные $C$ и $k$. Ю. Л. Рабинович

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

**1616. О свойстве плоских кривых, радиус кривизны которых — рациональная функция абсциссы или ординаты.** Пародди (Sur une propriété des courbes planes dont le rayon de courbure est une fonction rationnelle de l'abscisse ou de l'ordonnée. Parodi Maurice), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 19, 1177—1178 (франц.)

Предполагается, что радиус кривизны $R$ плоской кривой $y = y(x)$ изображается рациональной функцией ординаты

$$R = \left| \frac{y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}y + a_n}{b_1 y^{n-1} + \ldots + b_{n-1}y + b_n} \right|,$$

где $a_k$ и $b_k$ — действительные постоянные. Рассматривая уравнение

$$y^n + \sum_{k=1}^{k=n} y^{n-k}(a_k - \varepsilon b_k R) = 0$$

($\varepsilon = \pm 1$) при заданном числовом значении $R$ как уравнение, определяющее $y$, автор делает заключения о расположении точек интегральных линий, имеющих то или иное значение $R$. С. С. Бюшгенс

**1617. Пространственные кривые и теорема о среднем.** Деккер (Twisted curves and the mean-value proposition. Dekker David), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 9, 607—610 (англ.)

Плоская кривая, как известно, обладает следующим свойством: каковы бы ни были две ее точки $P$ и $Q$, всегда между ними найдется такая третья точка $S$, что касательная в $S$ параллельна секущей $PQ$. Пусть теперь гладкая кривая обладает указанным свойством. При каком условии кривая будет плоской?

Дан ответ на этот вопрос двумя теоремами. Согласно второй теореме, кривая будет плоской, если множество направлений касательных к кривой одномерно. Доказательство основано на простом соображении. Если кривая не плоская, то касательные хотя бы в двух точках $P$, $Q$ будут скрещивающимися прямыми. Но тогда множество направлений секущих $P'Q'$, соединяющих точки $P'$ и $Q'$, близкие к $P$ и $Q$, очевидно двумерно. А оно содержится в множестве направлений касательных, которое одномерно по условию. А. Г. Погорелов

**1618. Кривые с постоянными кривизнами в пространствах — афинном, проективном, пространстве Лоренца двух и трех измерений.** Тутаев Л. К., Уч. зап. Белорус. ун-та, 1954, № 19, 3—26

В каждом из указанных пространств автор строит канонический подвижной репер кривой, вершина которого описывает кривую, а один из векторов направлен по касательной. Инвариант инфинитезимального преобразования репера в двумерном пространстве

автор называет кривизной кривой и дает формулу для ее вычисления через координаты вершины репера. Дальше приводятся линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами кривых с постоянной кривизной. Рассматривая различные комбинации корней характеристических уравнений, автор получает на аффинной плоскости два типа кривых, на проективной плоскости три типа кривых, на плоскости Лоренца один гиперболический тип кривых.

Два инварианта инфинитезимального преобразования репера в трехмерном пространстве автор называет первой кривизной и второй кривизной кривой и дает формулы для их вычисления через координаты вершины репера. Из линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, по различным комбинациям корней характеристических уравнений, автор получает в аффинном пространстве пять типов кривых, в проективном пространстве девять типов кривых; в пространстве Лоренца три типа кривых с постоянными кривизнами.

Двумерное пространство Лоренца определяется как подпространство аффинного двумерного пространства, в котором точка $M(x_1;x_2)$ преобразуется в точку $N(y_1;y_2)$ так, что

$$dx_1^2 - c^2dx_2^2 = dy_1^2 - c^2dy_2^2,\ c = \text{const} > 0.$$

Трехмерное пространство Лоренца определяется аналогично с условием

$$dx_1^2 + dx_2^2 - c^2dx_3^2 = dy_1^2 + dy_2^2 - c^2dy_3^2.$$

Н. И. Алексеев

**1619. О сферической винтовой линии. Т е н к а** (Una particolare elica sferica. T e n c a L u i g i), Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, № 4, 451—454 (итал.)

Около полусферы радиуса единица описан прямой цилиндр. Точка $D$ описывает цилиндрическую поверхность. Из точки $D$ опущен перпендикуляр на ось цилиндра, точка $D'$ — точка пересечения перпендикуляра со сферической поверхностью. Когда точка $D$ описывает цилиндрическую винтовую линию, то точка $D'$ описывает сферическую винтовую линию. Приводятся простые метрические свойства этой винтовой линии.

С. И. Зетель

**1620. Преобразования плоскостей, которые содержат бесконечное множество пар проективно или аффинно соответственных кривых. В а о н а** (Le trasformazioni fra piani che posseggono infinite coppie di curve omografiche od affini. V a o n a G u i d o), Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, № 3, 250—261 (итал.)

Решаются две основные задачи:

а) установить максимальное значение $h_m$, которое может принимать $h$ для того, чтобы преобразование двух плоскостей, не сводящееся к проективному (или аффинному) соответствию, допускало $\infty^h$ пар проективно (аффинно) соответственных кривых,

в) определить преобразования, которые содержат $\infty^{h_m}$ пар проективно (аффинно) соответственных кривых.

Если преобразование двух плоскостей содержит $\infty^h$ пар проективно (аффинно) соответственных кривых с $h > 3$, то это соответствие оказывается проективным (аффинным). В то же время можно указать примеры преобразований, не сводящихся к проективным (аффинным), в которых существует $\infty^3$ проективно (аффинно) соответственных кривых. Следовательно, $h_m = 3$. Всякое преобразование двух плоскостей $\pi$ и $\pi'$, которое содержит $\infty^3$ пар аффинно соответственных кривых (для случая проективно соответственных кривых решения задачи не найдено), может быть получено с помощью следующей конструкции: в трехмерном пространстве $S_3$ (содержащем $\pi$ и $\pi'$) фиксируются некоторая поверхность $F$ и две бесконечно удаленные точки $S_\infty$ и $S'_\infty$ плоскостей. Тогда соответствующие точки $x$ и $y$ плоскостей $\pi$ и $\pi'$ могут быть получены, если точки $S_\infty$ и $S'_\infty$ спроектировать на эти плоскости из одной и той же точки поверхности $\mathscr{F}$. При этом все $\infty^3$ кривых, аффинно соответствующих друг другу в данном преобразовании, представляют собой проекции $\infty^3$ плоских сечений поверхности $\mathscr{F}$. В каждой из двух преобразуемых друг в друга плоскостей одно из трех семейств характеристических кривых представляет собой пучок прямых, причем данное преобразование устанавливает между этими пучками проективное соответствие.

Если $\mathscr{F}$ есть развертывающаяся поверхность или поверхность Каталана с направляющей плоскостью, проходящей через прямую $S_\infty S'_\infty$, то это построение приводит к преобразованиям 2-го рода, т. е. два из трех семейств характеристических кривых этого преобразования совпадают. Если же $\mathscr{F}$ есть цилиндр, образующая которого пересекает $S_\infty S'_\infty$, то получается преобразование 3-го рода, т. е. все три семейства его характеристических кривых совпадают. В общем случае преобразования 1-го рода три семейства характеристических кривых плоскости $\pi(\pi')$ состоят из параллельных прямых, проходящих через точку $S'_\infty(S_\infty)$ и из проекций асимптотических линий поверхности $F$ из точки $S_\infty(S'_\infty)$.

В случае преобразований 2-го рода кратное семейство характеристических кривых будет состоять из прямых, не параллельных прямым простого семейства, если $\mathscr{F}$ есть развертывающаяся поверхность; если же $\mathscr{F}$ есть указанная выше поверхность Каталана, то кратным оказывается семейство параллельных прямых, проходящих через $S'_\infty(S_\infty)$.

В случае преобразований 3-го рода все три семейства характеристических линий вырождаются в совокупность прямых, проходящих через точку $S'_\infty(S_\infty)$.

Н. И. Кованцов

**1621. Несобственные прямые на катеноиде и его присоединенной поверхности. П и н л** (The ideal straight lines on the catenary surface and its adjoined surface. P i n l M.), Math. Student, 1954, **22**, № 3, 137—139 (англ.)

Доказывается, что катеноид $\operatorname{ch}(z/a) = \sqrt{x^2+y^2}/a$ и геликоид $z = a \cdot \operatorname{arc\,tg}(y/x)$ имеют общие мнимые и действительную несобственные прямые.

А. И. Сирота

**1622. Об одном характеристическом свойстве поверхностей постоянной отрицательной кривизны. Ш е м и н** (Sur une propriété caractéristique des surfaces à courbure moyenne constante. Ş e m i n F e r r u h), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 256 (франц.)

Рассматривается линия на поверхности, в каждой точке которой нормальная плоскость к поверхности, проходящая через касательную к кривой в этой точке, сечет поверхность вдоль линии, имеющей касание высшего порядка с ее кругом кривизны в этой точке.

Сообщается (без доказательства), что на каждой поверхности существует вообще три семейства таких линий. Необходимое и достаточное условие того, чтобы кривые различных семейств в каждой точке попарно образовывали бы угол в 120°, есть постоянство средней кривизны поверхности.

М. В. Потоцкий

**1623. Об изгибании на сферически сопряженном основании. Т и х о н о в В. А.,** Тр. Воронежск. ун-та, 1954, **27**, 79—83

Известно, что наличие главного основания того или иного типа является характеристическим свойством некоторых классов поверхностей. Доказывается, что наличие сферически сопряженных изотропных главных оснований характеризует поверхности постоянной средней кривизны. Заметим, что изгибание, рассмотренное в статье, является частным случаем изгибаний на кинематически сопряженном основании, введенном и изученном С. П. Фиников (Матем. сб., 1926, 33, 129—159). Пользуясь указанным свойством, автор получил квадратичные формы поверхности постоянной средней кривизны $H$ в виде

$$ds^2 = 2g_{12}dudv,$$
$$\theta = Udu^2 + 2Hg_{12}dudv + Vdv^2,$$

где $U$ и $V$ — соответственно функции от одного переменного $u$ и $v$. И. Н. Григорьев

**1624. О некоторых свойствах конгруэнций прямых и их сферических изображений. Маркус** (Asupra unor proprietăţi ale congruentelor de drepte şi ale reprezentărilor lor sferice. Marcus F.), Studii şi cercetări ştiinţ., 1954, **5**, № 1—2, 29—38 (рум.; резюме русс., франц.)

Обозначая через $1/\rho_i$, $1/T_i$ $(i = 1, 2)$ соответственно кривизну и кручение кривых $C_i$, описанных фокусами $F_i$ прямолинейной конгруэнции, отнесенной к развертывающимся поверхностям, при изменении одного из параметров $u$, $v$, автор устанавливает результаты:

Геодезические кривизны линий $u$, $v$, в сферическом изображении конгруэнции равны с обратным знаком отношению кручения и кривизны соответствующих кривых, описанных фокусами. Отношение геодезических кривизн сферических изображений развертывающихся поверхностей конгруэнции равно отношению элементов площади сферических изображений фокальных поверхностей конгруэнции. Геодезическая кривизна линии $u$ или $v$ в сферических изображениях конгруэнции равна отношению элемента площади сферического изображения соответствующей фокальной поверхности конгруэнции к элементу площади сферического изображения средней поверхности конгруэнции. Геодезическая кривизна сферического изображения асимптотической линии поверхности инвариантна при метрическом изгибании поверхности. Из резюме автора

**1625. О конгруэнции линий второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Туганов Н. Г.**, Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 1, 13—15

Для рассматриваемой в проективном пространстве криволинейной конгруэнции, все линии которой суть конические сечения $C_2$, строится канонический репер так, что три вершины его $A_1$, $A_2$, $A_3$ находятся в фокальных точках линии $C_2$, а четвертая $A_4$ — в точке пересечения касательных плоскостей к фокальным поверхностям, описанным точками $A_1$, $A_2$, $A_3$. Если нормировать вершины так, чтобы уравнение линии $C_2$ относительно репера имело вид $x_1x_3 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$, то пфаффовы формы репера будут связаны соотношениями $\omega_2^2 + \omega_1^3 = \omega_3^2 + \omega_2^1 = \omega_3^1 + \omega_3^2 = 0$. Конгруэнция определяется с произволом в 6 функций двух аргументов.

Шесть фокальных семейств конгруэнции определятся уравнением $\omega_1^4\omega_2^4\omega_3^4(\omega_3^4\theta_1\theta_2 + \omega_1^4\theta_2\theta_3 + \omega_2^4\theta_3\theta_1) = 0$, где $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0$, $\theta_1 = \omega_2^2 - \omega_3^3 - 2\omega_1^2 + \omega_2^3 + \omega_3^1$, а остальные $\theta_i$ получаются циклической заменой индексов. Координаты фокусов, не являющихся вершинами репера, находятся из уравнений $x_1x_2 : \theta_3 = x_2x_3 : \theta_1 = x_3x_1 : \theta_2$. Условие того, что две смежные линии $C_2$ определяют квадрику, состоит в линейной зависимости двух форм $\theta_i$, что возможно лишь для сдвоенного фокального направления. Соприкасающаяся линейчатая поверхность по заданному направлению конгруэнции определяется как совокупность прямых, соединяющих соответствующие точки двух смежных линий $C_2$, взятых в этом направлении, причем закон соответствия выбирается так, чтобы эта линейчатая поверхность принадлежала линейному комплексу (этот комплекс можно задать произвольно). Если потребовать, чтобы соприкасающаяся линейчатая поверхность принадлежала линейной конгруэнции, то эта последняя определяется с однопараметрическим произволом. Тем самым в проективном пространстве $P_5$ определяется линейчатая поверхность, соответствующая данному направлению конгруэнции линий $C_2$ в $P_3$. Такие конгруэнции применялись автором в метрической и аффинной теориях поверхностей (РЖМат, 1953, 423; 1954, 4157). Замечена опечатка: в формуле $(2_1)$ вместо $(a_{13}b_{12})$ следует читать $(a_{13}b_{42})$. Р. Н. Щербаков

**1626. Кинематика в проективно-дифференциальной геометрии. Барнер** (Kinematik in der projektiven Differentialgeometrie. Barner Martin), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 192—193 (нем.)

Автор отмечает поверхности с семейством конических и плоских линий, совокупность которых зависит от шести произвольных функций одного аргумента.

Сообщаем плоскости такое проективное движение, что все касательные к траектории любой ее точки проходят через одну точку. Каждая твердая линия на движущейся плоскости образует указанную поверхность, и всякую поверхность с семейством конических и плоских линий можно так построить. Частным случаем являются поверхности, окутанные семейством квадрик, которые имеют прикосновение второго порядка с поверхностью вдоль конических сечений. Эти «проективные поверхности каналов» зависят от трех функций одного аргумента. К ним, в частности, принадлежат проективные поверхности вращения. О других применениях проективной кинематики см. РЖМат, 1954, 3065, 5237. К. Н. Тихоцкий

**1627. Проективно-геометрические теоремы о линейных уравнениях в частных производных 2-го порядка. Зауер** (Projektiv-geometrische Sätze über lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung. Sauer Robert M. F.), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 252—253 (нем.)

Формулируется ряд предложений, связывающих интегральные поверхности дифференциального уравнения $L[f] \equiv af_{xx} + 2bf_{xy} + cf_{yy} = 0$ $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0)$ с интегральными поверхностями уравнения $\Lambda[\varphi] \equiv a\varphi_{\eta\eta} - 2b\varphi_{\eta\xi} + c\varphi_{\xi\xi} = 0$, полученного из данного преобразованием Лежандра. Точки и касательные плоскости поверхностей $f$ и $\varphi$ связаны преобразованием взаимными полярами относительно параболоида $2f = x^2 + y^2$, вследствие чего каждая сопряженная сеть линий и каждая асимптотическая линия одной поверхности отображается на сопряженную сеть и асимптотическую линию другой поверхности. Проекции соответствующих сопряженных сетей на плоскости $f = 0$ и $\varphi = 0$ взаимно ортогональны. В гиперболической области $ac - b^2 < 0$ интегральными поверхностями уравнения $L[f] = 0$ служат те поверхности, для которых сеть характеристик $ady^2 - 2bdydx + cdx^2 = 0$ является проекцией сопряженной сети на плоскость $x$, $y$. Центральные коллинеации пространства $x$, $y$, $f$ с плоскостью $x$, $y$ в качестве фиксированной плоскости и несобственной точкой оси $f$ в качестве центра связывают решения «проективно-родственных» дифференциальных уравнений $L[f] = 0$, у которых сети характеристик взаимно проективны. А. Г. Школьник

**1628. Замечания о геометрических эквивалентах второй дифференцируемости ортоповерхностей.** **Мирге** (Remarques sur les équivalences géométriques de la dérivabilité seconde des orthosurfaces. Mirguet J.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, **40**, № 6, 608—612 (франц.)

Пусть $MM'$ есть выпуклая гладкая дуга плоской кривой $(C)$, направленной от $M'$ к $M$; $\alpha$ и $\beta$ — углы хорды $MM'$ с отрицательными полукасательными к $(C)$ в $M$ и $M'$. Принимая за ось абсцисс отрицательную полукасательную в $M$, а за ось ординат ту полунормаль в $M$, относительно которой $\widehat{MM'}$ будет расположена в первом координатном углу, и вводя обозначения $h = MM'$, $R_1$ и $R_2$ — радиусы окружностей, проходящих через $M(0, 0)$ и $M'(x, y)$ и касательных к $(C)$ соответственно в $M$ и $M'$, получают

$$\frac{1}{R_1} = \frac{2y\cos 2\alpha}{x^2 - y^2}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{2y\sin\beta\cos^2\alpha\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}{x^2\sin\alpha(\sin^2\alpha - \sin^2\beta)},$$

$$\chi = \frac{\alpha+\beta}{h}.$$

Последовательность точек $(M')$, стремящихся к $M$ по дуге кривой $(C)$, дающая единственное конечное значение пределу $yx^{-2}$, обладает второй дифференцируемостью (Bouligand G., Introduction á la géom. infin. directe) 1932, № 141). Если, кроме того, отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ стремится при этом к единственному конечному числу, то величины $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_1}$, $\chi$ будут иметь единственные конечные пределы $k_1$, $k_2$, $k_3$, связанные соотношением $2k_3 = k_1 + k_2$. Наконец, в частном случае, когда $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, то $k_1 = k_2 = k_3$ и последовательность $(M')$ обладает точной второй дифференцируемостью.

В том случае, когда последовательность $(M')$, стремящаяся к $M$ с любой стороны от $M$, обладает точной второй дифференцируемостью и дает всегда одно и то же значение $k$ общему пределу $k_1 = k_2 = k_3$, автор говорит, что кривая $(C)$ обладает точной второй дифференцируемостью в точке $M$.

Дается распространение этих понятий на открытую область поверхности и в точке ее. К. К. Мокрищев

**1629. Определение гладкой поверхности первой и обобщенной второй квадратичными формами.** **Бакельман И. Я.**, Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 4, 155—162

Пусть $W$ — класс гладких поверхностей $F$, заданных вектор-функциями $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ в замкнутом прямоугольнике $D$ и имеющих в $D$ все обобщенные вторые производные в смысле С. Л. Соболева. Класс $W$ содержит, в частности, поверхности, у которых внутренняя метрика не имеет ограниченной кривизны в смысле А. Д. Александрова. Метрика на $F$ определяется линейным элементом $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$. На $F$ можно ввести вторую «обобщенную» квадратичную форму $Ldu^2 + 2M\,du\,dv + Ndv^2$, где $L = \mathbf{r}_{uu}\cdot\mathbf{n}$, $M = \mathbf{r}_{uv}\cdot\mathbf{n}$, $N = \mathbf{r}_{vv}\cdot\mathbf{n}$, $\mathbf{n}$ — единичная нормаль $F$. Если между поверхностями $F_1$, $F_2 \in W$ можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором в каждой точке прямоугольника $D$ совпадают коэффициенты первых квадратичных форм и почти везде в $D$ совпадают коэффициенты обобщенных вторых квадратичных форм, то эти поверхности конгруэнтны.

Метод доказательства этого предложения заключается в следующем. Рассматриваются средние поверхности $F_h$, которые задаются функциями

$$\mathbf{r}_h(u, v) = \iint_D \mathbf{r}(\xi, \eta)\,\psi_h(u, v, \xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

где $\psi_h(u, v, \xi, \eta)$ — усредняющее ядро (например,

$$\psi_h(u, v, \xi, \eta) = \frac{\omega\left(\frac{x-\xi}{h}\right)\omega\left(\frac{y-\eta}{h}\right)}{h^2}, \qquad \omega(t) = ce^{\frac{1}{t^2-1}},$$

$c\int_{-1}^{+1}\omega(t)\,dt = 1$). Вектор-функции $\mathbf{r}_h(u, v)$ бесконечно дифференцируемы по $u$ и $v$.

Показывается, что $E$, $F$, $G$ имеют обобщенные производные первого порядка в $D$ и в любом открытом прямоугольнике $D^*$, содержащемся в $D$, имеет место сходимость $\lim_{h\to 0}\iint_{D^*} |E_{h,u} - E_u|\,du\,dv = 0$ (аналогично и для других производных и коэффициентов). Такого же рода сходимость имеет место для обобщенных коэффициентов Кристоффеля и коэффициентов второй квадратичной формы.

При помощи этих предложений устанавливается интегральный аналог деривационных формул Гаусса, а затем и сформулированный выше основной результат. Э. Г. Позняк

**1630 Д. О поверхностях, определяемых уравнениями Пфаффа.** **Хаимова П. Л.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т матем. и механ. АН УзССР, Сталинабад, 1955

**1631 Д. Теория поверхностей биаффинного и теория конгруэнций биаксиального пространств.** **Бухараев Р. Г.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанск. ун-т, Казань, 1955

## ГЕОМЕТРИЯ *n*-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

**1632. О кинематической формуле в пространствах постоянной кривизны.** **Сантало** (On the kinematic formula in spaces of constant curvature. Santaló Luis A.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 251—252 (англ.)

Кинематическая формула Бляшке распространена Черном (Chern, Amer. J. Math., 1952, **74**, 227—236) на евклидово $n$-мерное пространство. Автор приводит обобщение этой формулы для $n$-мерного пространства постоянной кривизны. Доказательств нет. А. П. Широков

**1633. Геометрия одного частного случая уравнения Монжа.** **Хаймович** (Geometria unei ecuatii Monge de tip particular. Haimovici Adolf), Studii şi cercetări ştiinţ., 1954, **5**, № 1—2, 17—27 (рум.; резюме русс., франц.)

Рассматривается уравнение Монжа частного вида

$$a_{hij}\frac{dx^h}{ds}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0$$

в трехмерном римановом пространстве. В том случае, когда это уравнение имеет три различных решения, оно определяет трехмерную сеть. В этом случае касательные плоскости к парам кривых сети образуют три неголономных многообразия. Каждая из этих плоскостей содержит два асимптотических направления, два направления касательных к линиям кривизны первого рода и два направления касательных к линиям кривизны второго рода. Показывается, что неособенные асимптотические линии совпадают с линиями сети только в том случае, когда они являются геодезическими линиями пространства, и что если три указанных неголономных многообразия пересекаются по своим асимптотическим линиям, эти линии также являются геоде-

зическими линиями пространства. В том случае, когда линии кривизны обоих родов совпадают, конус, определяемый в каждой точке пространства уравнением Монжа, распадается на три плоскости, касательные к трем семействам поверхностей. Б. А. Розенфельд

**1634. О пересечениях комплексных аналитических многообразий. Мартинелли** (Sur les intersections des variétés analytiques complexes. Martinelli Enzo), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 138—139 (франц.)

Приводятся без доказательств следующие результаты. Если $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ — две комплексные аналитические кривые комплексной плоскости $(x, y)$, а $F$, $G$ — характеристические поверхности, являющиеся их действительными образами в четырехмерном евклидовом пространстве $S_4$, отождествляемом с плоскостью $(x, y)$, то многообразие пересечения $f = 0$, $g = 0$ в общей алгебраидной точке $P$ можно интерпретировать как порядок зацепления действительных кривых пересечения $F$, $G$ со сферической гиперповерхностью $\Sigma$ достаточно малого радиуса, окружающей точку $P$ в $S_4$. В случае алгебраичности $f = 0$, $g = 0$ отсюда следует новое топологическое доказательство теоремы Безу. С помощью двух- или трехкратных интегралов дается отображение общего числа пересечений $f = 0$, $g = 0$ в некоторой области пространства $S_4$. Результаты обобщаются на случай многообразий высшего числа измерений. С. Д. Россинский

**1635. Теоретико-групповая характеристика проективного пространства и конформного пространства. Курита** (Grouptheoretical characterization of projective space and conformal space. Kurita Minoru), Nagoya Math. J., 1953, 5, February, 59—74 (англ.)

Пусть в $n$-мерном однородном пространстве действует $r$ — параметрическая группа Ли. Если ее первичные инвариантные формы обозначить $\omega_i (i, j, k = 1, \ldots, n)$, а вторичные $\omega_\alpha (\alpha, \beta = n+1, \ldots, r)$, то структурные уравнения можно записать в виде

$$d\omega_i = \sum_{(pj)} C_{pji} [\omega_p \omega_j], \quad d\omega_\alpha = \sum_{(pq)} C_{pq\alpha} [\omega_p \omega_q]$$
$$(p, q = 1, \ldots, r).$$

Пространства, в которых имеют место соотношения $C_{ij\alpha} = 0$ и $C_{ijk} = 0$, названы автором однородными пространствами проективного типа. В работе указаны два следующих эквивалентных друг другу свойства этих пространств: а) их фундаментальная группа порождена некоторой коммутативной подгруппой, которая просто транзитивно действует в пространстве, и полной группой вращений вокруг точки; б) в таких пространствах перенос вектора $v_i$, определяемый формулой $Dv_i = dv_i - \Sigma_{\alpha k} C_{\alpha ki} \omega_\alpha v_k$, оказывается абсолютным, т. е. результат перемещения вектора из точки в точку не зависит от пути, соединяющего эти точки.

Проективное и конформное пространства являются пространствами проективного типа и выделяются из них некоторыми свойствами. Например, конформное пространство в случае $n > 1$ является пространством проективного типа, линейная группа изотропии которого конформна. В случае $n > 1$ проективным оказывается такое пространство проективного типа, в котором имеют место соотношения $\Sigma_\alpha C_{i\beta\alpha} C_{\alpha kj} = 0$ и $\Sigma_\alpha C_{i\beta\alpha} C_{\alpha ii} = 2\Sigma_\alpha C_{i\beta\alpha} C_{\alpha jj}$ $(i \neq j,\ k \neq j)$. Геометрический смысл этих соотношений несколько сложен.

П. И. Швейкин

**1636. Кривизны (обыкновенные) кривой, расположенной на гиперповерхности; геодезические и нормальные кривизны, геодезическое кручение этой кривой. Голомб** (Les courbures (ordinaires) d'une courbe située sur une hypersurface et les courbures géodésiques et normales ainsi que la torsion géodésique de cette courbe. Gołąb S.), Ann. polon. math., 1954, 1, № 1, 81—88 (франц.)

Для кривых на поверхности трехмерного риманова пространства $V_3$, если они не являются его геодезическими, имеют место следующие теоремы: I. Если геодезическая линия поверхности является плоской, то она будет ее линией кривизны. II. Если асимптотическая линия поверхности является плоской, то она будет ее линией кривизны. III. Для того, чтобы вдоль линии кривизны отношение ее нормальной и геодезической кривизн было постоянно, необходимо и достаточно, чтобы эта линия кривизны была плоской. (Кривую риманова пространства автор называет плоской, если ее кручение равно нулю.)

Работа дает ответ на вопрос, сохраняются ли эти теоремы для кривых, расположенных на $(n-1)$-мерных поверхностях в $n$-мерном римановом пространстве, если $n > 3$. Автор доказывает, что первая теорема верна для всякого $n$, вторая неверна для $n > 3$ и третья сохраняется только частично: если линия кривизны является плоской, то отношение ее нормальной и геодезической кривизн постоянно (обратное неверно для $n > 3$). W. Slebodziński

**1637. О геометриях пространств нулевой кривизны с прямолинейными экстремалями. Функ** (Über Geometrien vom Krümmungsmaß Null mit geradlinigen Extremalen. Funk Paul), Anz. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1953, 90, № 1—15, 206—209 (нем.)

Используя интерпретацию геометрии двумерного пространства нулевой кривизны в евклидовой плоскости и некоторые факты дифференциальной геометрии и вариационного исчисления, автор доказывает, что трансверсали семейства прямых, имеющих общую точку на абсолюте (орициклы), суть конические сечения, образующие однопараметрическое семейство и имеющие с абсолютом касание второго порядка.

К. К. Мокрищев

**1638. Об изотермических координатах. Чжень Шэн-шень, Хартман, Винтнер** (On isothermic coordinates. Chern Shing-shen, Hartman Philip, Wintner Aurel), Comment. math. helv., 1954, 28, № 4, 301—309 (англ.)

Принадлежащее Вейлю (Weyl H., Vierteljschr. Naturforsch., Ges. Zürich, 1915, 61, 40—72) обобщение понятия кривизны на случай метрики

$$ds^2 = g_{11} du^2 + 2g_{12} du\, dv + g_{22} dv^2 \qquad (1)$$

с коэффициентами $g_{ik}$, принадлежащими классу $C^1$, излагается следующим образом: пфаффова форма $\omega = P du + Q dv$, коэффициенты $P(u, v)$, $Q(u, v)$ которой непрерывны в односвязной области $D$, называется регулярной, если существует непрерывная в $D$ функция $f(u, v)$ такая, что $\int_J \omega = \iint_B f(u, v)\, du\, dv$, где $B$ — любая область в $D$, ограниченная кусочно-гладкой жордановой кривой $J$.

Если коэффициенты формы (1) принадлежат классу $C^1$, то существуют такие пфаффовы формы $\omega_1$, $\omega_2$ с коэффициентами класса $C^1$ и единственная форма $\omega_{12}$ с непрерывными коэффициентами, что

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2, \quad \int_J \omega_1 = \iint_B [\omega_{12} \omega_2], \quad \int_J \omega_2 = \iint_B [\omega_1 \omega_{12}],$$

(скобки [ ] означают внешнее умножение). Если $g_{ik}$ принадлежат $C^1$, то коэффициенты форм $\omega_1, \omega_2$ можно выбрать из класса $C^2$, а коэффициенты $\omega_{12}$ из $C^1$. В этом

случае $\omega_{12}$ регулярна и риманова кривизна $K = K(u, v)$ определяется соотношением

$$\int_J \omega_{12} = -\iint_B K[\omega_1 \omega_2]. \qquad (2)$$

Если $g_{ik}$ принадлежат только $C^1$, то $\omega_{12}$ не обязательно регулярна. Если все же $\omega_{12}$ регулярна, то определяемая соотношением (2) величина $K$ называется непрерывной кривизной.

Доказывается теорема: Пусть коэффициенты $g_{ik}(u, v)$ положительно определенной метрики (1) принадлежат в области $u^2 + v^2 < r^2$ классу $C^1$ и (1) допускает непрерывную кривизну $K = K(u, v)$. Тогда существуют отображения

$$u = u(U, V), \quad v = v(U, V) \qquad (3)$$

класса $C^1$ с необращающимся в нуль якобианом, которые преобразуют (1) к нормальной форме

$$ds^2 = \gamma(dU^2 + dV^2) \quad (\gamma = \gamma(U, V) > 0). \qquad (4)$$

Каждое отображение (4), обладающее указанным свойством, принадлежит классу $C^1$ и $\gamma(U, V)$ принадлежит классу $C^1$.

В добавлении к статье авторы, используя методы и результаты М. А. Лаврентьева (Матем. сб., 1935, **42**, 407—424), дают отрицательный ответ на вопрос: всегда ли поверхность класса $C^1$ допускает параметризацию класса $C^1$, при которой имеет место (4).

Г. И. Дринфельд

**1639. О вполне геодезических гиперповерхностях в римановом пространстве II. Ножичка** (O nadplochách totálně geodetických v riemannově prostoru. II. Nožička František), Časop. pěstov. mat., 1953, **78**, № 3, 215—228 (чеш.)

Часть I см. РЖМат, 1955, 4564. Находится необходимое и достаточное условие того, что $p$-мерная поверхность в $n$-мерном римановом пространстве (по терминологии автора, гиперповерхность) является вполне геодезической, и находятся некоторые необходимые условия существования $p$-мерных вполне геодезических поверхностей $n$-двумерного риманова пространства, вложенного в $(n+1)$-мерное евклидово пространство, а также ряд следствий из этих условий.

Б. А. Розенфельд

**1640. Некоторые результаты относительно вложения двумерных метрик постоянной кривизны в пространства высшей размерности постоянной кривизны. Блануша** (Einige Resultate über die Einbettung zweidimensionaler Raumformen konstanter Krümmung in höhere Räume konstanter Krümmung. Blanuša Danilo), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 204—205 (нем.)

Сводка известных результатов, относящихся к вложению (в малом и целом) двумерных римановых многообразий постоянной кривизны в некоторые римановы пространства постоянной же кривизны. Н. Н. Яненко

**1641. Вложение римановых пространств в малом. Мацумото** (Local imbedding of Riemann spaces. Matsumoto Makoto), Mem. College Sci. Univ. Kyoto, 1954, **A28**, № 2, 179—207 (англ.)

Работа посвящена проблеме вложения римановых метрик в пространства постоянной кривизны. После исторического обзора теории дается в инвариантной форме необходимое условие вложения $V_n$ в $E_{n+p}$ и формулируется понятие (четного) типа метрик. Затем рассматривается задача вложения римановой метрики $V_n$ (не конформно плоской) в пространство $S_{n+1}$ постоянной кривизны.

Автор определяет тип $\tau$ метрики $V_n$ в этом случае и сводит задачу в случае $n \geqslant 4$ и $\tau \geqslant 3$ к задаче погружения $n$-мерной римановой метрики в $E_{n+1}$, получая необходимые и достаточные условия вложения $V_n$ в $S_{n+1}$.

Далее рассматривается вложение пространств Эйнштейна (не конформно плоских) в $S_{n+1}$ и конформно плоских пространств в пространства постоянной кривизны. Везде устанавливаются необходимые и достаточные условия вложения.

Наконец, доказывается общая теорема, что проблема вложения в $S_{n+p}$ сводится, вообще говоря, к проблеме вложения в $E_{n+p}$.

Результаты §§ 2, 3 содержатся в работе референта (Докл. АН СССР, 1952, **33**, № 4). Н. Н. Яненко

**1642. К статье «Классификация трехмерных римановых пространств по группам движений». Кручкович Г. И.**, Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 3, 285

Автор дополняет свою статью (РЖМат, 1955, 3395) указанием действительных структур групп $G_4$ вида

$$[X_1X_2] = 0, \quad [X_1X_3] = 0, \quad [X_2X_3] = X_1, \qquad (\alpha)$$

$$[X_1X_4] = qX_1, \quad [X_2X_4] = X_3, \quad [X_3X_4] = -X_2 + qX_3, \quad 0 \neq q^2 < 4,$$

а также пространств $V_3$ с линейным элементом

$$ds^2 = kdx^{1^2} + e^{-qx^1}\left(2dx^1\,dx^2 - \frac{4}{\omega^2}\cos^2\frac{\omega x^1}{2}\,dx^{3^2}\right), \qquad (\beta)$$

$$\omega = \sqrt{4 - q^2}, \quad q \neq 0,$$

обладающих группами движений $G_4$ с операторами

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_3, \quad X_3 = x^3 p_2 + \left(\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega x^1}{2} + \frac{q}{2}\right)p_3, \qquad (\gamma)$$

$$X_4 = p_1 + \left(qx^2 + \frac{1}{2}x^{3^2}\right)p_2 + x^3\left(\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega x^1}{2} + \frac{q}{2}\right)p_3.$$

Примечание референта. Постоянная $k$ в линейном элементе ($\beta$) несущественна и надлежащим выбором системы координат, сохраняющим вид операторов ($\gamma$), может быть обращена в нуль. И. П. Егоров

**1643. Об аффинитетах и движениях в финслеровых пространствах. Шоош** (Über Gruppen von Affinitäten und Bewegungen in finslerschen Räumen. Soós G y.), Acta math. Acad. sci. hung., 1954, **5**, № 1—2, 73—84 (нем.; резюме русс.)

Пространство линейных элементов $(x^1, x^2, \ldots, x^n, v_1, v^2, \ldots, v^n)$ аффинной связности $\mathfrak{A}$ определяется объектом аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(x, v)$ и тензором $C^i_{jk}(x, v)$, координаты которых являются однородными функциями соответственно нулевого и минус 1-го измерения относительно $v^e$, причем $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$, $C^i_{jk}v^j = C^i_{kj}v^j = 0$. Обобщается понятие аффинной коллинеации М. Кнебельмана (Knebelman M. S., Amer. J. Math., 1929, **51**, 527—564), как точечного отображения (продолженного на $v^e$), сохраняющего $\Gamma^i_{jk}$ и $C^i_{jk}$.

Выводится необходимое и достаточное условие того, что одночленная группа, определенная инфинитезимальным преобразованием $\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x)\,\delta t$, $\bar{v}^i = v^i + (\partial\xi^i/\partial x^j)\cdot v^j\delta t$, является группой аффинных коллинеаций.

Для финслеровых пространств $F$ решается задача существования в его группе аффинных коллинеаций подгруппы движений $F$. Эти движения характеризуются

обобщенными уравнениями Киллинга: $\xi_{i,j}+\xi_{j,i}+g_{ij\cdot m}\xi^m_{,s}v^s=0$, где $g_{ij\cdot m}$ есть результат дифференцирования $g_{ij}$ по $v^m$. Ковариантное дифференцирование ведется с помощью объекта $\Gamma^i_{jk}$ (связность Картана), который выражается через $g_{ij}$ финслерова пространства и определяет вместе с тензором $C_{ijk}={}^1/_2 g_{ij\cdot k}$ группу аффинных коллинеаций пространства $F$. Автор пользуется дифференцированием С. Ли.

Следует заметить, что в пространствах линейных элементов аффинной связности аффинные коллинеации (как отображения, переводящие пути в пути с сохранением аффинного параметра) были рассмотрены также с применением операции дифференцирования С. Ли Б. Л. Лаптевым (Изв. Физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те, 1938, сер. 3, **10**, 3—38). И. П. Егоров

**1644. Субплоские пространства аффинной связности.** **Ван Юн-чжоу** (Subflat affinely connected spaces. Wong Yung-Chow), Proc. Internat. Congr., Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 266—267 (англ.)

$n$-мерное пространство аффинной связности $A_n$ называется субплоским, если в нем имеется $n-1$ полей параллельных контравариантных векторов («контраполей») и $n-1$ полей параллельных ковариантных векторов («ко-полей») (пространство $A_n$ является плоским тогда и только тогда, когда в нем имеется $n$ контраполей и $n$ ко-полей). Показывается, что необходимым и достаточным условием того, что пространство $A_n$ субплоское, является то, что это пространство допускает такую систему координат, в которой единственной отличной от нуля компонентой $\Gamma^i_{jk}$ является $\Gamma^1_{11}$, зависящая не только от одного $x^1$, или $\Gamma^1_{22}$, зависящая не только от одного $x^2$. В первом случае не имеется ко-поля, псевдоортогонального всем $n-1$ контра-полям, во втором случае имеется такое ко-поле. Находится также необходимое и достаточное условие того, что пространство $A_n$ субплоское, в виде условий, налагаемых на его тензор кривизны, а также находится условие того, что субплоское пространство $A_n$ является пространством $AK^*_n$, определяемым так же, как риманово пространство $K^*_n$, определенное Рузом и Уокером (Ruse H. S., Walker A. G., Proc. London Math. Soc., 1950, **52**, 36—64; 1951, **53**, 212—229). Б. А. Розенфельд

**1645. Симметрические пространства 1-го класса.** **Широков П. А.**, Уч. зап. Казанск. ун-та, 1954, **114**, № 8, 71—82

Изучаются неприводимые симметрические римановы пространства 1-го класса, причем на метрику пространства не накладывается ограничение о знакоопределенности. Исследуя условия интегрируемости основного уравнения $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\varepsilon}=0$, автор показывает, что, кроме пространств постоянной кривизны, существует только один тип неприводимых симметрических пространств 1-го класса. Линейный элемент этого пространства может быть приведен к виду

$$ds^2=2\sum_{i=1}^r dx_i\,dx_{r+i}-\frac{1}{3}\sum_{i=1}^r\eta_i x_i^2\sum_{j=1}^r\eta_j dx_j^2+\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^r\eta_i x_i dx_i\right)^2,$$

где $\eta_i=\pm 1$. Это пространство обозначается $A_n\,(n=2r)$. Пространство $A_n$ можно реализовать в $(n+1)$-мерном псевдоевклидовом пространстве индекса $r$ в виде гиперповерхности:

$$z_{n+1}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^r\eta_i z_i^2.$$

Если в качестве координат пространства $A_n$ принять $z_1,\ldots,z_n$, то линейный элемент запишется в виде

$$ds^2=\left(\sum_{i=1}^r\eta_i z_i dz_i\right)^2+2\sum_{i=1}^r dz_i\,dz_{r+i}.$$

Если теперь отобразить пространство $A_n$ на $n$-мерное плоское пространство, то геодезические линии интерпретируются кривыми 3-го порядка, лежащими в трехмерных плоскостях. А. С. Феденко

**1646. О построении фундаментальных областей.** **Витт** (Über die Konstruktion von Fundamentalbereichen. Witt Ernst), Ann. mat. pura ed appl., 1954, **36**, 215—221 (нем.)

Рассматривается риманово пространство $Z$, в котором через любые две точки $z_1$ и $z_2$ проходит одна единственная геодезическая. Ее длина обозначается через $\rho(z_1, z_2)$. Предполагается, что в $Z$ действует топологическая группа $G$ движений, причем для любой точки $z_0\in Z$ и компактного множества $K\subset Z$ множество всех $g\in G$, $gz_0\in K$ компактно.

Для любой дискретной группы $H\subset G$ в $Z$ строится фундаментальная область $F$ следующим образом. Доказывается, что для любого $z_0\in Z$ его стационарная подгруппа $H_0$ в $H$ конечна. Она действует на множество линейных элементов, выходящих из $z_0$, которое изометрично сфере. На этой сфере $H_0$ имеет фундаментальную область $F_0$. Фундаментальная область $F$ состоит из тех $z$, для которых: α) $\rho(z, z_0)\leqslant\rho(z, hz_0)$, $h\in H-H_0$; β) геодезическая, соединяющая $z$ с $z_0$, принадлежит $F_0$.

Средними гиперповерхностями называются гиперповерхности, определенные уравнениями $\rho(z, z_1)=\rho(z, z_2)$, $z_1\neq z_2$. Как предельный случай к ним причисляются гиперповерхности, состоящие из геодезических, касающихся в точке $z_0$ заданной гиперплоскости в касательном пространстве.

Доказывается, что $F$ обладает следующими свойствами:

а) $F$ ограничена счетным числом средних гиперповерхностей (среди них может быть конечное число предельных случаев);

б) каждая точка $Z$ эквивалентна относительно $H$ одной внутренней или конечному числу граничных точек $F$;

в) $F$ обладает внутренними точками;

г) каждое компактное множество $K\subset Z$ пересекается только с конечным числом граничных гиперповерхностей $F$ и только с конечным числом областей, эквивалентных $F$.

Накладывается условие: каждая геодезическая из $F_0$ покидает в конце концов $F$, эквивалентное компактности $F$. В этом случае $F$ ограничено конечным числом гиперповерхностей.

Если $G$ — группа Ли, транзитивная на $Z$, $G_0$ — стационарная подгруппа точки $z_0$, $\Gamma_0$ — подгруппа ортогональной группы, индуцированная группой $G_0$ в многообразии линейных элементов, выходящих из $z_0$, $\Gamma_0$ компактно и $\dim G=\dim\Gamma_0+\dim Z$, то условие, наложенное в начале на группу $G$, выполнено. Все эти условия выполнены, в частности, если $Z$ есть обобщенная верхняя полуплоскость Зигеля, а $G$ — симплектическая группа (определения см. Зигель К., Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, М., Изд-во ин. лит., 1954).

На стр. 217 имеется опечатка: на седьмой строке сверху надо вместо $E$ читать $F$. И. Р. Шафаревич

**1647. Формы второго рода на алгебраическом многообразии.** **Ходж, Атия** (Formes de seconde espèce sur une variété algébrique Hodge William,

A t i y a h M i c h a e l), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 21, 1333—1335 (франц.)

В рамках современной теории пучков ростков мероформных дифференциальных форм определяется классическое понятие «2-формы второго рода» и доказывается теорема Пикара — Лефшеца о максимальном числе независимых 2-форм второго рода. (Это число равно числу гомологически независимых двумерных циклов, не гомологичных ни одному дивизору.) М. М. Постников

**1648. Линейные дифференциально-геометрические объекты. Рашевский П. К.**, Докл. АН СССР, 1954, 97, № 4, 609—611

Решается задача определения всевозможных линейных представлений дифференциальной группы $D_v$ класса $v$, т. е. группы $v$ раз дифференцируемых преобразований координатных систем $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, рассматриваемых в окрестности некоторой точки $O$ заданного $n$-мерного дифференцируемого многообразия $X_n(x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

Преобразования группы $D_v$ характеризуются значениями в точке $O$ частных производных новых координат по старым до порядка $v$ включительно:

$$x^{i'}_{i_1},\ x^{i'}_{i_1 i_2},\ \ldots,\ x^{i'}_{i_1 i_2 \ldots i_v}. \qquad (1)$$

Группа $D_v$ разлагается в полупрямое произведение своей полупростой компоненты $S$ (преобразования (1) вида $x^{i'}_{i_1}$, $0, 0, \ldots, 0$ при $\mathrm{Det}\,|x^{i'}_{i_1}| = 1$) и радикала $R$ (преобразования (1) вида $\omega\delta^{i'}_{i_1}$, $x^{i'}_{i_1 i_2}, \ldots, x^{i'}_{i_1 i_2 \ldots i_v}$). Предполагая сперва, что в (1) всегда соблюдается условие $\mathrm{Det}\,|x^{i'}_{i_1}| = 1$ (унимодулярная дифференциальная группа $D^0_v$), автор решает задачу отыскания всевозможных линейных представлений группы $D^0_v$. Линейное представление группы $D^0_v$ реализуется совокупностью частных производных от произвольного скалярного поля $\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$

$$\varphi_{i_1},\ \varphi_{i_1 i_2},\ \ldots,\ \varphi_{i_1 i_2 \ldots i_v}, \qquad (2)$$

в точке $O$. Совокупность величин (2), преобразующихся при преобразовании координат по закону преобразования величин $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_1 i_2}, \ldots, \varphi_{i_1 i_2 \ldots i_v}$, называется ковариантным сверхвектором в точке $O$ (независимо от способа получения этих величин). Его координаты обозначаются $\varphi_I$, причем сверхиндекс $I = (i_1), (i_1 i_2), \ldots, (i_1 i_2 \ldots i_v)$, где в скобках стоят всевозможные сочетания по $1, 2, 3, \ldots, v$ индексов из $1, 2, 3, \ldots, n$.

Затем строится представление, контраградиентное представлению (2), преобразующее переменные

$$\psi^{i_1},\ \psi^{i_1 i_2},\ \ldots,\ \psi^{i_1 i_2, \ldots, i_v} \qquad (3)$$

так, что $\varphi_I \psi^I$ (каждое слагаемое в этой сумме повторяется столько раз, сколько перестановок можно сделать из индексов, входящих в $I$) всегда является инвариантом. Совокупность величин (3) называется контравариантным сверхвектором. Естественно определяется понятие сверхтензора с любым числом ковариантных и контравариантных сверхиндексов (Рашевский П. К., Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1933, 1, 7).

Основная теорема. Всякое (конечномерное) линейное представление группы $D^0_v$ эквивалентно ее линейному представлению в пространстве координат некоторого числа контравариантных сверхтензоров $Z^{I_1 I_2 \ldots I_p}$, вообще говоря, при наличии инвариантных связей между этими координатами (в остальном неопределенными).

Другими словами, всякий линейный дифференциально-геометрический объект (при унимодулярном ограничении дифференциальной группы) эквивалентен системе некоторого числа контравариантных сверхтензоров.

Используя построенное представление группы $D^0_v$ в пространстве сверхтензоров $Z^{I_1 I_2 \ldots I_p}$, автор указывает метод отыскания всевозможных линейных представлений общей дифференциальной группы $D_v$. И. П. Егоров

**1649. О некоторой проблеме алгебры геометрических объектов класса нуль в пространстве $X_1$. Пидек** (Sur un problème de l'algèbre des objets géométriques de classe zéro dans l'espace $X_1$. P i d e k H.), Ann. polon. math., 1954, **1**, № 1, 114—126 (франц.)

Проблема, когда функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ представляет геометрический объект, если $x_1, \ldots, x_n$ являются геометрическими объектами с одной компонентой одного и того же типа (т. е. с одним и тем же законом преобразования), была решена автором для случая одномерного пространства при $n = 1$ и $n = 2$ (Ann. Soc. polon. math., 1952, 24, 111—128).

В настоящей работе эта проблема рассматривается для произвольного $n$ и объектов класса нуль, закон преобразования которых имеет вид

$$\overline{\omega} = a(\omega, \xi, \overline{\xi}) = q\,[Q(x, \xi), \overline{\xi}], \qquad (1)$$

где $q$ является функцией, обратной для $Q$ (обращение по первому аргументу).

В теореме 1 автор доказывает, что если $x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ являются объектами с одним и тем же законом преобразования класса $K^3$ (т. е. с одной и той же функцией $Q$ класса $C^3$) и если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ класса $C^1$ представляет геометрический объект класса $K^1$, тогда функция $Q$ имеет вид

$$Q(x, \xi) = \Lambda\,[\Theta(\xi)\,L(x) + \Phi(\xi)], \qquad (2)$$

где $\Lambda$, $\Theta$, $\Phi$, $L$ являются функциями одной независимой переменной.

Теорема 2 гласит, что если функция $Q$ имеет вид (2), то каждая функция $f$, представляющая геометрический объект, имеет вид

$$f = \Psi\,\{\Sigma^n_{i=1}\,\gamma_i\,L(x_i)\}, \qquad (3)$$

где $\gamma_i$ — постоянные, $\Psi$ — произвольная функция одной переменной.

Теорема 3 гласит, что если $Q$ имеет вид

$$Q(x, \xi) = \Lambda\,[L(x) + \Phi(\xi)] \qquad (4)$$

$(\Theta \equiv 1)$, то (при некоторых предположениях регулярности) функция $f$ имеет вид

$$f = \Psi\,\{\Sigma^n_{i=1}\,\gamma_i L(x_i) + \chi[L(x_1) - L(x_2), \ldots, L(x_{n-1}) - L(x_n)]\},$$

где $\chi$ — функция $n - 1$ независимых переменных. В последней теореме 4 дается вид функции $Q_f$, определяющей закон преобразования для объекта $f$ в случаях (2) и (4). St. Gołąb

**1650. О некоторой проблеме алгебры геометрических объектов класса нуль в пространстве $X_m$. Пидек** (Sur un problème de l'algèbre des objets géométriques de classe zéro dans l'espace $X_m$. P i d e k H.), Ann. polon. math., 1954, **1**, № 1, 126—134 (франц.)

Автор, обобщая закон преобразования объектов класса нуль с одной компонентой на пространства произвольного числа измерений, одновременно обобщает результаты прежней своей работы (см. реф. 1649) на пространства произвольного числа измерений. Эти обобщения приводят к аналогичным теоремам. Доказательства теорем (кроме первой) опущены ввиду полной аналогии с одномерным случаем. St. Gołąb

**1651. Элементарный вывод данных Главатым канонических форм для электромагнитного тензора в единой теории поля. Шаэнз** (Elementare Herleitung der von Hlavatý angegebenen kanonischen Formen für den elektromagnetischen Tensor in der einheitlichen Feldtheorie. Sáenz A. W.), Z. Phys., 1954, **138**, № 5, 489—498 (нем.)

В единой теории поля Эйнштейна основной тензор $g_{\alpha\beta}$ не является симметрическим, причем в рассматриваемой области $X_4$ поле его симметрической части $h_{\alpha\beta}$ обладает лоренцовой сигнатурой — — — +. Отыскание канонических форм для поля его антисимметрической части $k_{\alpha\beta}$, очевидно, должно основываться на решении алгебраической задачи о совместном приведении к каноническому виду в вещественном четырехмерном аффинном пространстве симметрического тензора, обладающего лоренцовой сигнатурой, и антисимметрического тензора. Искомые канонические формы для $k_{\alpha\beta}$ были найдены Главатым методами линейчатой геометрии (Hlavatý V., J. Rational Mech. and Analysis, 1952, 1, 539). Автор показывает, как рассматриваемая проблема приводится к классическому вопросу, решенному в частной теории относительности, о канонических формах, получаемых для электрического и магнитного полей путем надлежащего выбора лоренцовой системы отнесения. Таким образом автор выделяет лежащую в основе проблемы алгебраическую задачу и пользуется известным в частной теории относительности ее решением. Б. Л. Лаптев

**1652. Объединенная теория поля как трехмерная неголономная параболическая геометрия Ли и его квантовая механика. Такасу** (A combined field theory as a three-dimensional non-holonomic parabolic Lie geometry and its quantum mechanics. Takasu Tsurusaburo), Yokohama Math. J., 1953, **1**, № 1, 105—116 (англ.)

Рассматривается 5-мерное многообразие с дифференциальной квадратичной формой сигнатуры + + + — —. В нем записываются уравнения, аналогичные уравнениям Дирака и Шредингера-Гордона; их физический смысл разъяснен недостаточно. При помощи весьма искусственных аналогий автор пытается связать эти построения с параболической геометрией сфер Ли (геометрия Лагерра). П. К. Рашевский

**1653. О формальном построении теории относительности и об одном заслуживающем внимания классе метрических связностей, представляющем интерес для релятивистики. Кастольди** (Sulla struttura formale della relatività e su una classe notevole di connessioni metriche di interesse relativistico Castoldi L.), Atti Accad. Ligure, 1952, **9**, 5—14 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Исходя из уравнения $R^{ij} - \frac{1}{2} a^{ij} R = T^{ij} - E^{ij}$, где $a^{ij}$ — контравариантный фундаментальный тензор, $R^{ij}$ — тензор Риччи, а $T^{ij}$, $E^{ij}$ — гравитационный и электромагнитный тензоры энергии, определенные, как обычно, в терминах соответственно кинетического 4-вектора и электромагнитного 6-вектора, автор кладет в основу принцип «максимального и простейшего определения», который требует, чтобы уравнения поля включали минимальное число произвольных элементов и имели возможно более простую форму. Он употребляет этот принцип для вывода основных уравнений гравитационного и электронного полей. Форма некоторых уравнений приводит к рассмотрению метрической связности $L^k_{ij}$, определяемой компонентами

$$L^k_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\} + q_i F^k_j,$$

где $q_i$ — вектор, а $F_{ij}$ — 6-вектор. Эту связность он называет вырожденной (в смысле не наибольшей общности среди подобных), а специальный ее случай — самовырождающейся (selfdegenerate) связностью. Он заключает, что для вселенной, содержащей только дискретные заряженные материальные частицы, геометрическое описание может быть проведено в терминах самовырождающейся связности. H. S. Ruse

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 2, 169.

## МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

**1654. Дивектор и его алгебра. Билимович** (Дивектор и његова алгебра. Билимовић Антон), Глас Српске акад. наука, 1953, **206**, Од. прир.-матем. наука, **5**, 57—70 (серб.; резюме англ.)

Изложение теории винтов (дивекторов), т. е. пар векторов, один из которых свободный, а другой скользящий. Изложение отличается от известных изложений А. П. Котельникова («Винтовое счисление», Казань, 1895) и Э. Штуди (Study E., Geometrie der Dynamen, Leipzig, 1901) тем, что здесь не применяются дуальные числа, но, наряду со скалярным и винтовым (дивекторным) произведениями, рассматривается также диадное произведение. Скалярное произведение автора не совпадает со скалярным произведением А. П. Котельникова, являющимся дуальным числом $a + b\omega$, а представляет собой «мнимую часть» $b$ последнего; вследствие этого автор дает определение «единичного дивектора», отличное от обычного определения единичного винта. Б. А. Розенфельд

**1655. Некоторые замечания о неархимедовой геометрии. Панвини** (Alcune osservazioni sulle geometrie non archimedee. Panvini Jean), Ann. Scuola norm. super. Pisa, Sci. fis. e mat., 1953, **7**, № 1—2, 153—159 (итал.)

В «Основаниях геометрии» Гильберта построена модель неархимедовой геометрии. Исследуется вопрос, в каком отношении находится эта модель к наиболее общей неархимедовой геометрии. Пользуясь тем, что в гильбертовой модели существует теория пропорций, автор вводит число как отношение отрезков. Число соответствует множеству всех пар пропорциональных отрезков. Легко определяются арифметические действия над числами и операция $\sqrt{a^2 + b^2}$. Методом пар вводятся нуль и отрицательные числа. Построенное таким образом множество чисел автор называет «полем $C$». Далее строится геометрия, в которой точкой считается упорядоченная тройка $(x, y, z)$, где $x$, $y$, $z$ — элементы поля $C$.

Если отрезок $b$ больше любого кратного $a$, то будем говорить, что $b$ находится в бесконечном отношении к $a$, а $a$ в бесконечно малом отношении к $b$. Если ни один из двух отрезков $a$ и $b$ не находится в бесконечном отношении к другому, то будем называть их сравнимыми. Если фиксировать единичный отрезок $u$ и представлять все элементы поля $C$ в виде $a : u$, фиксировать произвольный элемент $b$, находящийся в бесконечном отношении к $u$, и поставить ему в соответствие в поле $C_p$ элемент $t$, то каждый элемент $x \in C_p$ полу-

чится из $t$ посредством конечной цепочки из пяти операций, и ему будет соответствовать элемент поля $C$, получающийся из $b$ посредством такой же цепочки. Таким образом поле $C_p$ изоморфно $C'$, входящему в $C$, и модель неархимедовой геометрии, построенная над полем $C_p$, содержится в более общей схеме.

Исследуется вопрос о взаимном расположении прямой и окружности и доказывается, что теорема «прямая, проходящая через внутреннюю точку окружности, пересекает эту окружность» в неархимедовой геометрии не имеет места, даже если принять аксиому непрерывности Кантора. Н. М. Бескин

**1656. Неравенства между интегралами по сечениям ограниченных точечных множеств. II. Оман** (Ungleichungen zwischen den Quermaßintegralen beschränkter Punktmengen. II. Ohmann D.), Math. Ann., 1954, **127**, № 1, 1—7 (нем.)

Пусть $A(\zeta_1, \ldots, \zeta_r)$ — ортогональная проекция замкнутого множества $A$ в евклидовом пространстве $R_n$ на $(n-r)$-мерную плоскость, перпендикулярную к линейно независимым ортам $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$. Полагая $W_0(A) = M_n(A)$ ($n$-мерной мере Лебега), $W_{r-1}(A;\zeta) = W_{r-1}(A(\zeta))$,

$$W_r(A) = \frac{1}{nv_{n-1}} \int_{\Omega_n} W_{r-1}(A;\ \zeta)\, d\zeta\ ,\ (r = 1,\ \ldots,\ n-1),$$

$W_n(A) = v_n$, где $v_n$ — объем $n$-мерной сферы $\Omega_n$, автор доказывает, что

$$W_{n-1}^{n-r} \geqslant v_n^{n-1-r} W_r \quad (r = 0,\ 1, \ldots, n-2)$$

(в первом сообщении (Math. Ann., 1952, **124**, 265—276) автор доказал справедливость неравенства $W_p^n \geqslant v_n^p W_0^{n-p}$, $0 < p < n$. Реферируемое сообщение можно читать независимо от первого).

Таким образом автор занимается обобщением на случай произвольного замкнутого множества неравенства

$$W_p^{n-r} \geqslant v_n^{p-r} W_r^{n-p} \quad (r < p < n),$$

известного для выпуклых тел. Г. И. Дринфельд

**1657. Пары точек, обратные к системе четырех прямых, и присоединенные сферы. Монсо** (Couples de points inverses dans un système de quatre droites et sphères associées. Monsseau), Mathesis, 1954, **63**, № 6—8, 219—222 (франц.)

Прямые $\Delta_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) задаются проекциями начала координат $H_i(x_i, y_i, z_i)$ и направляющими косинусами $a_i$, $b_i$, $c_i$, а пара точек $M$ и $M'$ — своими координатами $(\xi, \eta, \zeta)$ и $(\xi', \eta', \zeta')$. Присоединенная сфера определяется уравнением:

$$\Sigma_\lambda \equiv (x-\xi)(x-\xi') + (y-\eta)(y-\eta') + (z-\zeta)(z-\zeta') - \lambda\omega = 0,$$

где $\omega$ — скалярное произведение векторов расстояний точек $M$ и $M'$ от $\Delta_i$, а $\lambda$ — параметр. $\Sigma_\lambda$ ортогональна к сфере

$$S_\lambda = \left| (1-a_i^2)(x^2+y^2+z^2) - 2(x_i X + y_i Y + z_i Z) + x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\ ,\right.$$
$$\left. a_i b_i,\ a_i c_i,\ \lambda(1-a_i^2) - 1 \right| = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Рассматриваются частные случаи $\lambda = 0,\ 1,\ 2,\ 3$. Л. Я. Березина

**1658. Подход к $n$-мерной евклидовой и неевклидовой геометрии. Сейдел** (An approach to $n$-dimensional euclidean and non-euclidean geometry. Seidel Jacob). Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 255—256 (англ.)

Рассматриваются конечномерные линейные пространства $\Sigma$ с заданным скалярным произведением. Пространство $\Sigma$ называется полупростым, если для $a \in \Sigma$ из условия $(a, a_i) = 0$ для всех $a_i \in \Sigma$ следует $a = 0$, и собственным, если оно содержит хоть один элемент $b$ такой, что $(b, b) > 0$. Собственное пространство, у которого всякое собственное подпространство есть полупростое, называется пространством $JH$.

Основная теорема. Существуют лишь следующие два типа пространств $JH$:

1. Пространства, у которых всякая матрица Грамма $P$, составленная для любого конечного числа элементов, имеет $\nu(P) = 0$, где $\nu(P)$ — число отрицательных чисел, содержащихся в диагональной матрице $Q$, конгруэнтной $P$. Матрица $Q$ называется конгруэнтной $P$, если $Q = R^T P R$, где $R$ — неособенная матрица.

2. Пространства, у которых всякая матрица Грамма $P$ каждой конечной системы элементов, образующих подпространство $\Gamma$, имеет $\pi(P) = 1$, если $\Gamma$ собственное, и $\pi(P) = 0$, если $\Gamma$ — несобственное, где $\pi(P)$ — число положительных чисел в диагональной матрице $Q$, конгруэнтной $P$.

Пространства первого типа триводят к сферической и эллиптической геометрии, а пространства второго типа — к гиперболической и евклидовой. Я. П. Бланк

**1659. Правильные соты в эллиптическом пространстве. Коксетер** (Regular honeycombs in elliptic space. Coxeter H. S. M.), Proc. London. Math. Soc., 1954, **4**, № 16, 471—501 (англ.)

Правильные соты (regular honeycombs) в трехмерном эллиптическом пространстве $S_3$ могут быть толучены, если интерпретировать точки этого пространства парами диаметрально противоположных точек трехмерной сферы евклидова $E_4$. Всякий правильный политоп, вписанный в сферу, определит правильные соты в эллиптическом пространстве; отсюда шесть видов таких сот:

| Число трехмерных граней политопа | Символ Шлефли | Соты | Число вершин | Плотность покрытия |
|---|---|---|---|---|
| 5 | (3,3,3) | $\alpha$ : 5 тетраэдров | 5 | 2 |
| 16 | (3,3,4) | $\beta$ : 8 тетраэдров | 4 | 1 |
| 8 | (4,3,3) | $\gamma$ : 4 гексаэдра | 8 | 1 |
| 24 | (3,4,3) | $\delta$ : 12 октаэдров | 12 | 1 |
| 600 | (3,3,5) | $\varepsilon$ : 300 тетраэдров | 60 | 1 |
| 120 | (5,3,3) | $\zeta$ : 60 додекаэдров | 300 | 1 |

В работе автор ставит задачу — исследовать соответствующие конфигурации, не обращаясь к теории политопов (Coxeter, Regular Polytopes, London, 1948). С этой целью применен один из способов изображения вращений евклидова $E_3$ вокруг осей, проходящих через фиксированную точку $E'$, точками эллиптического $S_3$. Именно, $E_3$ помещается в $E_4$ на расстоянии 1 от некоторой фиксированной точки $O$. Всякий луч $OK$ пересекает $E_3$ в некоторой точке $P'$; этот луч принимается за изображение вращения на угол $\theta = 2 \angle E'OP'$ вокруг оси $E'P'$. Этому лучу естественно сопоставляется определенная точка эллиптического пространства $S_3$. При таком сопоставлении конечные группы вращений, связанные с правильными многогранниками в $E_3$ и изоморфные некоторым симметрическим или знакопеременным группам подстановок из нескольких индексов, изображаются системами точек эллиптического простран-

ства. Точки эти получают естественную нумерацию с помощью подстановок из соответственного числа индексов. С помощью этих точек и строятся соты в эллиптическом пространстве.

Даются приложения к теории латинских квадратов Эйлера. В матрице латинского квадрата пятого порядка, в случае когда этот квадрат нециклический, имеется элемент, который служит общей вершиной четырех латинских квадратов второго порядка, входящих в данный квадрат пятого порядка. В. В. Рыжков

**1660. Конечные геометрии и их применение. Кустаанхеймо, Квист** (Om ändliga geometrier och deras tillämpning. Kustaanheimo P., Qvist B.), Nord. mat. tidskr., 1954, **2**, № 4, 137—155 (швед.; резюме англ.)

Конечная геометрия определяется следующими тремя аксиомами: 1) существует точно $v$ точек и $v$ прямых, 2) каждые две прямые определяют одну и только одну точку, 3) каждые две точки определяют одну и только одну прямую. Даны две интерпретации конечной геометрии. В первой интерпретации используется блоковый узор (block design). Сущность его в следующем. Пусть дано $v$ различных элементов каждого типа. Распределим их в $b$ блоков (групп) по $k$ элементов в каждом блоке. Если при этом выполняются условия $b = v = r^2 - r + 1$, то можно добиться такого распределения элементов, что в каждых двух блоках будет один и только один общий элемент и любая пара элементов находится в одном и только в одном блоке. В интерпретации тип элементов — точка, блок — прямая. В другой интерпретации (аналитической) точка определяется $n$ координатами, а прямая — $n$ коэффициентами, являющимися классами вычетов по простому модулю $p$. Авторы пытаются ввести в конечную геометрию порядок расположения точек на прямой, для чего им нужно классы вычетов разбить на положительные и отрицательные. Положительными авторы считают квадратичные вычеты, отрицательными — невычеты. Однако, чтобы свойства введенных таким образом положительных классов вычетов приближались к свойствам положительных чисел, надо положить, что $p \equiv -1 \pmod 4$, и, кроме того, подобрать такое $p$, чтобы числа $1, 2, 3, \ldots, N$ были все квадратичными вычетами при достаточно большом $N$. Авторы считают, что для физических приложений надо взять $N = 10^{40}$. Вводятся также и дробные элементы $b/a$ как решение сравнения $ax \equiv b \pmod p$. Свойства введенных таким образом положительных классов вычетов приближаются к свойствам положительных чисел, но при условии, что они не очень велики или малы. Далее вводятся понятия расстояния, времени, скорости и т. д.

В итоге на этой базе предполагается возможность создания новой физической теории, в которой роль чисел будут выполнять классы вычетов.

Следует отметить, что многие мысли авторов недостаточно развернуты и не подкреплены математическими доказательствами. В. Д. Подсыпанин

**1661. Пространства над алгебрами альтернионов. Джавадов М. А., Исмаилов А. П., Касимова С. С.**, Докл. АН АзССР, 1955, **11**, № 1, 3—8 (резюме азерб.)

Алгеброй альтернионов (чисел Клиффорда) $m$-го порядка $A_m$ называется действительная алгебра ранга $2^{m-1}$ с базисом $1, e_1, \ldots, e_{n-1}, e_{i_1 i_2 \ldots i_k} = e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k}$, причем $e_i e_j = -e_j e_i$ и $e_i^2 = -1$. Заменяя в аксиомах $1^0$—$10^0$ книги Рашевского (Риманова геометрия и тензорный анализ, М., Гостехиздат, 1953, 82—89) действительные или комплексные числа элементами из $A_m$, приходим к аффинному пространству $E_n(A_m)$. В $E_n(A_m)$ можно определить прямые, плоскости, параллельный перенос, параллельность прямых. Взаимно однозначные непрерывные преобразования $E_n(A_m)$, переводящие прямые в прямые и сохраняющие параллельность, называются аффинными. Даются формулы аффинных преобразований. Пространство $E_n(A_m)$ можно погрузить в проективное пространство $P_n(A_m)$, дополняя $E_n(A_m)$ «бесконечно удаленными» и идеальными точками. В $P_n(A_m)$ определяются коллинеации и корреляции и даются их формулы. Фиксируя в $P_n(A_m)$ некоторую инволюционную корреляцию, приходим к $n$-мерному неевклидову пространству над $A_m$. Дается классификация этих пространств. Доказательств нет. Много опечаток. Л. А. Скорняков

**1662. О задаче Лея, относящейся к некоторой функции расстояний между точками. Бернацкий** (Sur un problème de M. Leja relatif à une fonction des distances entre des points. Biernacki Mieczysław), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1953, **A7**, 113—120 (журнал вышел из печати в 1954 г.) (франц.; резюме русс.)

Полагаем:

$$H(Q, P_1, \ldots, P_n) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\overline{QP}_1 \ldots \overline{QP}_{i-1} \cdot \overline{QP}_{i+1} \ldots \overline{QP}_n}{\overline{P_iP_1} \ldots \overline{P_iP_{i-1}} \cdot \overline{P_iP_{i+1}} \ldots \overline{P_iP_n}},$$

где $P_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и $Q$ — точки $m$-мерного пространства. Лея показал, что если $m = 2$, то $H(Q, P_1, \ldots, P_n) \geqslant 1$, и поставил вопрос о том, сохраняется ли это соотношение для $m > 2$. Показано, что для произвольно малого $\varepsilon > 0$ и достаточно большого $n = n(\varepsilon)$ существует такая система точек $P_1, \ldots, P_n$ и $Q$, что

$$H(Q, P_1, \ldots, P_n) < \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - \varepsilon\right)^n}.$$

Показано также, что для $m = 3$ $H(Q, P_1, \ldots, P_n) \geqslant \frac{1}{2^{n-2}}$. А. С. Кованько

## ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

**1663. Элементарный аналог теоремы Гаусса — Бонне. Пойя** (An elementary analogue to the Gauss-Bonnet theorem. Pólya G.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 9, 601—603 (англ.)

Доказывается известная теорема Гаусса — Бонне для многогранников (Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М., Гостехиздат, 1948).

А. В. Погорелов

**1664. О треугольниках, описанных около овалов. Виет** (Über die ebenen Eibereichen umschriebenen Dreiecke. Viet U.), Math.-phys. Semesterber., 1954, **4**, № 1/2, 57—58 (нем.)

Дается элементарное доказательство предложения: описанный около круга диаметра 1 равносторонний треугольник имеет наименьшую площадь среди треугольников, объемлющих любой овал диаметра 1. Этот результат обобщается на геометрию Минковского. Если $e$ — овал, положенный в основу мероопределения, и $b(r)$ — его ширина в направлении $r$, $B(r)$ — ширина в том же направлении овала $E$, то диаметром Минковского овала $E$ называется максимум отношения $B(r) : b(r)$.

Доказывается, что треугольник наименьшей площади, описанный около овала $e$ (с центром), является наименьшим по площади треугольником, содержащим любой овал, имеющий относительно $e$ диаметр Минковского, равный единице. А. Г. Школьник

**1665. О некоторых свойствах овалов. Бернацкий** (Sur quelques propriétés des ovales. Biernacki Mieczysław), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1953 **A7**, 103—112 (журнал вышел из печати в 1954 г.) (франц.; резюме русс.)

Доказываются теоремы:

I. Рассмотрим овал, имеющий две взаимно перпендикулярные оси симметрии, и образуем тело вращением овала вокруг одной из этих осей. Если граница овала принадлежит к классу $C_1$ и не содержит отрезков прямой, то существует цилиндр вращения с той же самой осью вращения, вписанный в это тело, объем которого не меньше, чем $^4/_9$ объема этого тела. Число $^4/_9$ не может быть увеличено.

II. Если $A$ и $B$ — такие две точки овала на плоскости, что расстояние двух произвольных точек овала не превышает $AB$, то отношение длины каждой дуги овала, определенной точками $A$ и $B$ на границе овала, к длине всей этой границы по меньшей мере равно $3/(2\pi+3)$. Это число не может быть увеличено.

III. Пусть $C$ обозначает кривую, ограничивающую овал на плоскости, $s$ — длину дуги этой кривой, $r$ — расстояние точки кривой $C$ от фиксированной точки $P$ овала и $D$ — диаметр овала. Тогда имеют место неравенства: $^1/_2 \leqslant \int_C rds/D^2 \leqslant \pi$. Если овал обладает центром симметрии, то число $\pi$ можно здесь заменить числом $\pi/\sqrt{2}$. Число $^1/_2$ в этом неравенстве не может быть заменено большим числом; а число $\pi$ или $\pi/\sqrt{2}$ не удается заменить числом меньшим, чем 2.

Резюме автора.

**1666. О вершинах замкнутых кривых. Авакумович** (О теменима затворене криве. Авакумовић, Војислав Г.), Зб. радова. Српска АН, 1953, **35**, № 3, 147—152 (серб.; резюме нем.)

Автор называет пространственную кривую выпуклой, если через любые две точки, лежащие на кривой, проходит по крайней мере одна плоскость, которая не имеет с кривой других общих точек. Доказываются для четырежды непрерывно дифференцируемых кривых теоремы, известные для плоских замкнутых кривых:

1. Геодезическая кривизна $\varkappa_g$ и нормальная кривизна $\varkappa_N$ замкнутой выпуклой пространственной кривой имеют по крайней мере четыре экстремальных значения.

2. Пусть $r_1 = r_1(s)$ — замкнутая кривая и $r_2(s) = r_2(0) + \int_0^s nds$ (где $n$ — главная нормаль кривой $r_1$) — замкнутая выпуклая кривая. Тогда кризизна $\varkappa$ и кручение $\tau$ кривой $r_1$ имеют по крайней мере четыре экстремальных значения. Е. А. Морозова

**1667. О жесткости выпуклых многогранников. Погорелов А. В.**, Уч. зап. Харьковск. ун-та, **40**, Зап. матем. отд. физ.-матем. фак. и Харьковск. матем. о-ва, 1952, **23**, 79—89 (журнал вышел из печати в 1954 г.)

Дается новый метод доказательства теорем о жесткости выпуклых многогранников. Пусть $F$ — некоторая фигура, $X$ — любая ее точка, $\mathbf{r}(X)$ — радиус-вектор точки $X$, $\mathbf{v}(X)$ — векторное поле на $F$. Поле $\mathbf{v}(X)$ называется тривиальным на $F$, если $\mathbf{v}(X) = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{r}(X)$ на $F$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные векторы. Многогранник $P$ называется жестким, если любое поле, тривиальное на каждой его грани, тривиально на всем многограннике.

Результаты основаны на лемме (которая заменяет известную лемму Коши): Пусть $V$ — выпуклый многогранный угол, $g$ — полупрямая, идущая из вершины внутри угла, $v$ — поле, тривиальное на каждой условной грани $V$ и равное нулю в вершине. Тогда, если составляющая $\mathbf{v}$ в направлении $g$ положительна (отрицательна) хотя бы на одном истинном ребре угла $V$, то хотя бы на одном истинном ребре она отрицательна (положительна). Отсюда устанавливается жесткость выпуклых многогранных шапочек относительно изгибаний, при которых край шапочки может скользить по данной плоскости.

Из этой леммы выводится, что бесконечный выпуклый многогранник с полной кривизной $=2\pi$, является жестким. При помощи проективного преобразования получается теорема Коши: замкнутые выпуклые многогранники — жесткие.

Пусть $P$ — бесконечный выпуклый многогранник с полной кривизной $< 2\pi$; $g$ — полупрямая, пересекающая $P$ в одной точке; $\mathbf{v}$ — векторное поле, тривиальное на каждой грани $P$. Теорема: если составляющая $\mathbf{v}$ в направлении $g$ ограничена, то $\mathbf{v}$ тривиально на всем многограннике. Иначе говоря, если многогранник $P$ «слабо закреплен» в направлении полупрямой $g$, то он является жестким. Н. В. Ефимов

**См. также:** 918, 937, 942, 994, 1096, 1097, 1192, 1207, 1209, 1211, 1285, 1418, 1419, 1556

## ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

**1668. Приближенное решение краевых задач 1) методом наименьших квадратов, 2) разностным методом. Дайер** (Approximate solution of boundary value problems 1) by minimization of the least square error, 2) by use of finite differences (Abstracts of Doctoral theses). Dyer Walter G.), Iowa State Coll. J. Sci., 1954, **28**, № 3, 304—305 (англ.)

Решение краевой задачи для двумерного уравнения Лапласа ищется в виде $\varphi_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x, y)$, где $f_i(x, y)$ — гармонические функции, а постоянные $c_i$ определяются из условия минимума интеграла, взятого вдоль всей границы, от квадрата ошибки, т. е. от квадрата разности между $\varphi_n$ и заданной на границе функцией. Этот метод был применен в ряде примеров (с простейшей областью), в которых он дал результаты, хорошо согласующиеся с результатами, полученными другими методами (метод сеток).

При нахождении решения $\varphi$ краевой задачи разностным методом, в случае, например, квадратной области, используется теорема Грина. При этом строится некоторая вспомогательная функция $\psi(x, y)$, гармоническая во внутренних узлах сетки и удовлетворяющая краевым условиям $\psi_x = 0$ и $\psi_y = 0$ на правой и верхней сторонах границы соответственно. По этой функции последовательно с использованием уже вычисленных значений $\varphi$ и значений $\varphi$ на границе вычисляются новые значения искомой функции $\varphi$. Метод распространяется на бигармонические разностные проблемы.

Доказательства отсутствуют. В. К. Саульев

**1669. Свободные затухающие колебания прямоугольной пластинки.** **Станишич** (Free vibration of a rectangular plate with damping considered. Stanišić Milomir M.), Quart. Appl. Math., 1955, **12**, № 4, 361—367 (англ.)

Задача о свободных затухающих колебаниях прямоугольной пластинки, закрепленной вдоль каждого края, сводится к решению уравнения

$$\nabla^4 w(x, y, t) + \frac{\rho h}{D} w_{tt}(x, y, t) = -\frac{k}{D} w_t(x, y, t) \quad (1)$$

при известных граничных условиях. Решение уравнения (1) представляется в виде

$$w(x, y, t) = \varphi(x, y) \cdot e^{-\alpha t} \cos \omega t. \quad (2)$$

Здесь $\alpha$, $\omega$, $\varphi(x, y)$ подлежат определению. Подстановка (2) в (1) дает значение для $\alpha$ и уравнение для $\varphi(x, y)$

$$\nabla^4 \varphi(x, y) - \lambda \varphi(x, y) = 0, \quad (3)$$

где $\lambda = \lambda(k, \rho, h, D, \omega)$. Уравнение (3) решается методом Галеркина. В процессе решения получается алгебраическое уравнение для определения $\omega$. Приведены приближенные значения частот для трех частных случаев. Э. Б. Карпиловская

**1670. О порядке сходимости решения разностного уравнения к решению уравнения диффузии.** **Хункоса, Янг** (On the order of convergence of solutions of a difference equation to a solution of the diffusion equation. Juncosa M. L., Young D. M.), J. Soc. Indust. Appl. Math., 1953, **1**, 111—135 (англ.)

В области $R: 0 < x < 1$, $t > 0$ дифференциальная задача $\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2$; $u(0+, t) = u(1-, t) \equiv 0$; $u(x, 0+) = f(x)$ заменяется разностной задачей

$$\frac{v(x, t + \Delta t) - v(x, t)}{\Delta t} = \frac{v(x + \Delta x, t) - 2v(x, t) + v(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2};$$

$v(0, t) = v(1, t) \equiv 0$; $v(j\Delta x) = f(j\Delta x)$, $j = 1,2,\ldots, M-1$, где $0 < \Delta t/\Delta x^2 \leqslant 1/2$, $M\Delta x = 1$. Разностное решение $v(x, t)$ можно определить в любой точке области $R$ посредством билинейной интерполяции его значений в узлах сетки. В области $R^*: 0 \leqslant x \leqslant 1$, $t \geqslant t_0 > 0$ авторы вычисляют порядок $\max |v(x, t) - u(x, t)|$ относительно $\Delta x$ при различных предположениях о $f(x)$. Результаты показывают возможность улучшения разностного решения в практике «экстраполяции к нулевому шагу». M. A. Hyman

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 8, 746.

**1671. О сходимости и устойчивости для гиперболических разностных уравнений с аналитическими начальными данными.** **Дальквист** (Convergence and stability for a hyperbolic difference equation with analytic initial-values. Dahlquist Germund), Math. scand., 1954, **2**, № 1, 91—102 (англ.)

Исследуется сходимость при $\Delta x \to 0$ решений разностных уравнений

$$\frac{1}{(\Delta t)^2}[\Phi(x, t + \Delta t) - 2\Phi(x, t) + \Phi(x, t - \Delta t)] = \frac{1}{(\Delta x)^2}[\Phi(x + \Delta x, t) - 2\Phi(x, t) + \Phi(x - \Delta x, t)], \quad (1)$$

удовлетворяющих начальным данным

$$\Phi(x, 0) = f(x), \quad \Phi(x, \Delta t) = f(x) + \Delta t g(x) \quad (2)$$

к решению $F(x, t)$ задачи Коши для уравнения колебания струны с начальными функциями $f$ и $g$ в тех случаях, когда $u = \Delta x/\Delta t = \text{const} < 1$. Доказана теорема: Если $f(z)$ и $g(z)$ суть голоморфные функции комплексного переменного $z = x + iy$ в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $|y| \leqslant (b - a)/3$, то решения (1), (2) при $0 < u < 1$ равномерно сходятся в треугольнике $a + |t| \leqslant x \leqslant b - |t|$ к решению $F(x, t)$. О. А. Ладыженская

**1672. Решение граничных задач в инженерном деле методом разбиения площадей.** **Хиггинс** (The solution of boundary-value problems in engineering by the method of subareas. Higgins Thomas J.), Repts Coll. Engng Univ. Wisconsin Engng Experim. Stat., 1954, № 1, 6 pp. (англ.)

Для приближенного вычисления электростатической емкости и плотности равновесного заряда плоской фигуры $A$ (или поверхности, состоящей из плоских фигур) рекомендуется разбить $A$ на такие части $A_i$ ($i = 1,\ldots, n$), чтобы: а) плотность $q_i$ равновесного заряда на каждой части $A_i$ можно было считать постоянной, б) потенциал с плотностью 1 на $A_i$ легко подсчитывался и его значение $k_{ij}$ на $A_j$ можно было бы считать постоянным. Тогда для определения $q_i$ решается система

$$\sum_{i=1}^{n} k_{ij} q_i = 1 \quad (j = 1,2,\ldots, n).$$

Этим методом рассчитаны конденсаторы из прямоугольных и круговых пластин. Для емкости куба найдено значение, лежащее в границах, указанных ранее другими авторами. Нет указаний относительно точности метода. Х. Л. Смолицкий

**1673. Критерий применимости метода Рунге — Кутта.** **Ческино** (Critère d'utilisation du procédé de Runge — Kutta. Ceschino Francis), C. r. Acad sci., 1954, **238**, № 9, 986—988 (франц.)

Для метода Рунге — Кутта выводится формула роста ошибки при одном шаге: $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 e^{h\varphi}$, где $h$ — шаг, $\varphi = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=y_1}$, а из нее — формула роста ошибки при $s$ шагах: $\varepsilon[(e^{sh\varphi} - 1)/(e^{h\varphi} - 1)]$, аналогичная соответствующей формуле для разностных методов интегрирования. В. М. Курочкин

**1674. Экстраполяционные формулы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.** **Сконцо** (Formule di estrapolazione per l'integrazione numerica delle equazioni differenziali ordinarie. Sconzo P.), Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, № 4, 391—399 (итал.)

В известных формулах суммирования, применяемых для численного интегрирования дифференциальных уравнений $y' = F(x, y)$ и оборванных на постоянных $n$-го порядка, разности выражаются через значения функции, в результате чего получаются формулы вида

$$y_{r+1} = {}^1f_{r+1/2} + \sum_{k=0}^{n} C_k {}^1f_{1+k-n}$$

и

$$y_{r+1/2} = {}^1f_{r+1/2} + \sum_{k=0}^{n} B_k {}^1f_{r+k-n},$$

где $f_k = hF(x_k, y_k)$ и ${}^1f_{r+1/2} - {}^1f_{r-1/2} = f_r$. Для $n=3$ и $n=5$ приведены численные значения коэффициентов $B_k$ и $C_k$. Аналогичные формулы с суммами второго порядка выведены для уравнения $y'' = F(x, y)$.

К. А. Семендяев

**1675. Новый метод интегрирования линейного дифференциального уравнения второго порядка. Гупта** (A new method of integrating second order linear differential equations. Gupta Ranajit Sen), Current Sci., 1954, № 2, 47 (англ.)

Для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка $d^2y/dt^2 + f(t)\,y = 0$ дается рекуррентное соотношение для нахождения $(n+1)$-го приближения по $n$-му:

$$y_{n+1} = y_n (y_n')^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\int \frac{f(t)\,y_n}{y_n'}dt\right)\left(y_n' = \frac{dy_n}{dt}\right).$$

Утверждается, что процесс сходится к искомому решению. К. В. Задирака

**1676. Увеличение точности механических квадратур при наличии главного участка интегрирования малой длины в интегральном представлении остатка квадратуры. Крылов В. И.**, Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 6, 989—991

Рассматривается метод увеличения точности формул квадратур с весовой функцией $p(x)$: $\int_a^b p(x) f(x)\,dx = \sum_{k=}^{n} A_k f(x_k) + R(f)$. Остаточный член $R(f)$ представляется в форме $R(f) = \int_a^b f^{(m)}(x) K(x)\,dx$, где $m-1$ — степень точности формулы квадратур, а ядро остатка $K(x)$ не зависит от $f(x)$.

Метод основан на выделении главного участка интегрирования и приводит к разложению остатка $R(f)$ в ряд по производным функции $f(x)$ в точках $\alpha_i$ главного участка:

$$R(f) = \sum_{i=0}^{s} C_i f^{(m+2i)}(\alpha_i) + R_{s+1}(f),$$

причем величины $C_i$, $\alpha_i$, $R_s$ выражаются через ядро $K(x)$. Метод применим, когда ядро $K(x)$ пренебрежимо мало вне главного участка интегрирования. Это иллюстрируется на примере весовой функции $p(x) = (1-x)^p(1+x)^q$ при $a=-1$, $b=1$ и при больших значениях $p$ и $q$. Б. Л. Гинзбург

**1677. Увеличение точности механических квадратур. Формулы эйлерова вида. Крылов В. И.**, Докл. АН СССР, 1954, **96**, № 3, 429—432

Автор исходит из квадратурных формул вида $\int_a^b p(x) f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$. Остаточный член такой формулы, как известно, может быть представлен в виде $R(f) = \int_a^b f^{(m)}(x) K(x)\,dx$, где функция $K$ не зависит от $f$. Путем повторного выделения (основанного на свойствах ядра $K$) главной части остаточного члена автор приходит к формуле, аналогичной формуле Эйлера—Маклорена,

$$\int_a^b p f\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + C_0\,[f^{(m-1)}(b) - f^{(m-1)}(a)] + C_1\,[f^{(m)}(b) - f^{(m)}(a)] + \ldots + C_s\,[f^{(m+s-1)}(b) - f^{(m+s-1)}(a)] + R_{s+1}(f);$$

$$C_i = (b-a)^{-1}\int_a^b L_i(x)\,dx,\quad L_0(x) = K(x),$$

$$L_{i+1}(x) = \int_a^x [C_i - L_i(t)]\,dt,$$

$$R_{s+1}(f) = \int_a^b f^{(m+s+1)}(x)\,L_{s+1}(x)\,dx.$$

Приводится выражение коэффициентов $C_i$ и функций $L_i$ через числа и многочлены Бернулли. Рассматривается частный случай весовой функции $p(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha$, $\beta > -1$, а также формулы, являющиеся обобщениями формул Котеса. В качестве примера приведем обобщение формулы Симпсона:

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(0) + 4f(h) + f(2h)] - \frac{h^4}{180}[f^{(3)}(2h) - f^{(3)}(0)] + \frac{h^6}{1512}[f^{(5)}(2h) - f^{(5)}(0)] - \frac{h^8}{1440}[f^{(7)}(2h) - f^{(7)}(0)] + \ldots$$

А. И. Жуков

**1678. Применение дополнительных ординат при приближенном вычислении определенных интегралов по правилу трапеций. Владинец И. И.**, Тр. Николаевского кораблестроит. ин-та, 1954, № 7, 53—56

В некоторых расчетах теории корабля приближенное вычисление интегралов $\int_a^b f(x)\,dx$ от функций, заданных кусочно-гладкими кривыми, удовлетворительно выполняется по формуле трапеций, обобщенной для случая неравных промежутков. В описываемом автором способе вычисления задается, прежде всего, ряд ординат с постоянным расстоянием $l$ между двумя последовательными ординатами. К ним добавляются ординаты точек разрыва (предельные слева и справа), угловых точек и точек максимальной кривизны, а также крайние ординаты $f(a)$, $f(b)$. При суммировании выражений $(x_{i+1} - x_i)\dfrac{y_i + y_{i+1}}{2}$ «шпации» $(x_{i+1} - x_i)$ выражаются в виде $\alpha_i l\,(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Аналогичная процедура применяется к вычислению соответствующих статических моментов, моментов инерции и т. д. Е. Я. Ремез

**1679. О приближенном вычислении определенных интегралов при помощи мультипликативного метода выделения особенностей. Бертова Е. И., Кузнецов Я. Т., Натансон И. П., Цареградский Х. А.**, Прикл. матем. и механика, 1953, **17**, № 5, 639—644

Для численного нахождения определенных интегралов вида

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b p(x) f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ — гладкая функция, $p(x) \geqslant 0$ и интегрируема, рекомендуется использовать формулы типа Гаусса—Поссе—Маркова с весом $p(x)$. Специально рассматривается случай интервала $[-1,1]$ и веса вида $p(x) = |x|^\alpha$, $-1 < \alpha < 0$. Для показателей $\alpha = -3/4;\ -2/3;\ -1/2;\ -1/3;\ -1/4$ и $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ приводятся восьмизначные значения абсцисс (корней ортогональных полиномов с весом $p(x)$), коэффициентов квадратурной формулы с $n$ узлами и оценки остаточного члена. Оценка погрешности и числовые примеры показывают эффективность метода. Л. В. Канторович

**1680. Заметка о численном решении уравнения $x^m + ax^n + b = 0$. Дин Гуань Шу-Чжуан** (A note on the numerical solution of the equation $x^m + ax^n + b = 0$. Ting Kuan Shu-Chuang), Quart. Appl. Math., 1954, **12**, № 3, 313—315 (англ.)

Предлагается способ приближенного определения невещественных корней указанного в заглавии уравнения. И. П. Мысовских

**1681. Точный метод решения систем линейных алгебраических уравнений с почти диагональной матрицей. Синго** (An exact method of solving the linear si-

multaneous equations with the principal diagonal coefficients and those adjacent to them only. Shingō Takaichi), 土木學會論文集 (Dobоku gakkai ronbunsyu — Trans. Japan Soc. Civil Engrs), 1954, № 19, 1—7 (англ.)

Описывается метод решения систем линейных уравнений вида $Ax = h$, где $A$ — матрица, имеющая ненулевые элементы лишь на главной и обеих соседних с ней диагоналях. Подобные системы возникают при решении конечно-разностным методом краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, а также при расчете ряда инженерных конструкций. Дается вычислительная схема для нахождения обратной матрицы. Приводятся числовые примеры. Ю. А. Прейдер

**1682. Механический метод расчета скорости, времени, пути и потребляемой энергии на железной дороге. 2. Томпсон** (A mechanical method of calculating railway speed-time-distance-consumption data.2.Thompson E. G.), Railway Gaz., 1953, 99, № 22, 597—600 (англ.)

Начало см. РЖМат, 1955, 4722. Описание номографического прибора для расчетов, связанных с движением железнодорожных составов. Настоящая статья рассматривает задачи движения по уклону и на закруглении. Приведены фотографии. См. также реф. 1683.

В. М. Брадис

**1683. Механический метод расчета скорости, времени, пути и потребляемой энергии на железной дороге. 3. Томпсон** (A mechanical method of calculating railway speed-time-distance-consumption data. 3. Thompson E. G.), Railway Gaz., 1953, 99, № 26, 710—712 (англ.)

Начало см. РЖМат, 1955, 4722; 1956, 1682.

Описаны некоторые детали номографического прибора: сетчатая номограмма для получения тягового усилия на подъемах и спусках при разных скоростях; бегунок для учета изменения тягового усилия на кривых разного радиуса; приспособление для получения промежутка времени, нужного для перехода от одной скорости к другой; приспособление для определения расстояния, проходимого в данный промежуток времени при данной средней скорости; приспособление для учета расхода горючего или электроэнергии. В заключение дано описание конструкции всего прибора. Приводятся фотографии частей прибора.

В. М. Брадис

**1684. Номограммы для определения месторасположения источника звука на плоскости. Кертис** (Nomograms for the solution of the sound-ranging problem in a plane. Curtis G. C.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, 7, part 2, 129—135 (англ.)

На оси абсцисс расположены произвольно 3 приемника звука $M_1$, $M_2$, $M_3$. В $M_2$ находится начало координат. Ищутся расстояние $r$ от $M_2$ до неизвестного источника звука $P$ и координаты этого источника $x$, $y$. Известны разности расстояний: $PM_1 - PM_2 = s_1$, $PM_3 - PM_2 = s_3$. Приводится номограмма, дающая возможность одним наложением получить $x$ и $r$ по данным $s_1$, $s_2$ и представляющая интересный пример номограммы такого типа. Она построена для случая, когда $M_2$ расположена посередине между $M_1$ и $M_2$. Далее приводится номограмма формулы $x^2 + y^2 = z^2$, дающая возможность найти $y$. Наконец, дается номограмма, отличающаяся от первой только тем, что, кроме шкал кривых, соответствующих точкам $M_1$, $M_3$, имеются еще 2 шкалы, соответствующие точкам $M_4$, $M_5$, коллинеарным с $M_1$, $M_2$, $M_3$, при условии, что расстояния $M_3M_4$ и $M_4M_5$ равны расстоянию $M_2M_3$. Такая номограмма позволяет корректировать результаты замеров и получать правильные $x$ и $r$ при наличии погрешностей в заданных разностях расстояний. И. Н. Денисюк

**1685 К. Численные методы решения дифференциальных уравнений. Коллатц Лотар,** Пер. с нем., Изд-во иностр. лит-ры, М., 1953, 460 стр., 29 р. 70 к.

В гл. I после приведения ряда вспомогательных формул и высказывания общих соображений по поводу оценки погрешности рассмотрены численные методы решения задач с начальными условиями для обыкновенных дифференциальных уравнений: метод Эйлера и его модификации для уравнений 1-го порядка, общая и специальная схемы метода Рунге — Кутта для уравнений $n$-го порядка и различные интерполяционные и экстраполяционные разностные методы (в частности, метод Адамса), включая вычисления начальных значений по специальным формулам и методом итераций, для уравнений $n$-го порядка. При этом во всех случаях, за исключением метода Рунге — Кутта, выводятся общие оценки погрешностей (независимые и рекуррентные).

Гл. 2 посвящена численному решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь рассматриваются обыкновенный и повышенной точности методы конечных разностей, вариационные методы (Ритца и наименьших квадратов), методы Галеркина, сведения краевой задачи к задаче Коши, коллокации, метод рядов, методы последовательных приближений и возмущений. Для повышения точности разностного метода автор 1) учитывает значения искомой функции в большем числе узлов (обычный прием), 2) в одном разностном уравнении учитывает дифференциальное уравнение не в одном, как обычно, узле, а в нескольких (многоточечный метод). Решение системы (разрешимость которой автор устанавливает) разностных уравнений осуществляется методом обычной итерации, а также методом релаксации. Устанавливается обычным путем оценка погрешности разностного метода. Особо рассмотрен вопрос о численном решении задачи о собственных значениях. Задача о собственных значениях решается методами последовательных приближений, Ритца, включения, а также методом конечных разностей.

В гл. 3 рассмотрены вопросы численного решения задач Коши и смешанных задач для уравнений с частными производными. Здесь разобраны разностные методы — обыкновенный и усовершенствованный, в частности многоточечный; выводятся оценки погрешности — рекуррентные (погрешность на $(k+1)$-м слое выражается через погрешность на $k$-м слое), а также не зависящие от слоя. Автор останавливается на устойчивости разностных схем (метод Неймана, а также распространение единичной ошибки — ε-схема). Так, для наипростейшего уравнения теплопроводности шаг по времени не должен превосходить половины квадрата шага по пространственной оси; в противном случае погрешности округления, неминуемо возникающие при любом численном вычислении, будут наращиваться. В заключении главы рассмотрены численные методы для решения дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка (методы разложения в ряды, разностные методы, метод последовательных приближений). Более подробно автор исследует метод характеристик для системы двух уравнений 1-го порядка.

Гл. 4 посвящена краевым задачам для уравнений с частными производными. Более всего автор уделяет внимания методу конечных разностей, так как для решения уравнений с частными производными «он является единственным практически пригодным методом». Здесь, так же как и в предыдущих главах, для получения более точного решения автор идет не по пути измельчения сетки (уменьшение шага резко увеличивает трудоемкость из-за медленной сходимости процесса), а по пути усложнения разностных аппроксимаций. Наряду

с доказательством сходимости и оценкой погрешности метода сеток доказана сходимость и оценена погрешность метода итераций для системы разностных уравнений; при этом все рассуждения проводятся для случая сноса граничных значений с контура на сеточную границу посредством линейной интерполяции. Рассмотрены методы Ритца и Треффтца, а также более сжато методы наименьших квадратов, решение методом рядов, метод разложения по собственным функциям, метод Галеркина, метод коллокации.

Гл. 5, последнюю, автор посвящает численному решению интегральных, а также функциональных уравнений. Замена интегралов суммами (по правилу трапеций, Симпсона и пр.), метод последовательных приближений, метод минимальной погрешности (методы наименьших квадратов и коллокации), сведение к вариационной задаче, приближение ядер вырожденными, сглаживание ядра путем перехода к итерированным ядрам, в случае сингулярных интегральных уравнений — вот те методы и приемы, которыми пользуется автор для решения линейных и нелинейных уравнений (в частности Фредгольма и Вольтерра).

В конце каждой главы имеются упражнения с решениями, доведенными до числа; кроме того, каждый новый метод или прием как правило подкрепляется числовыми примерами.

Следует отметить, что в книге, наряду с распространенными численными методами (методы Рунге — Кутта, Ритца, разностные и пр.), рассмотрены малоизвестные методы и приемы (решение разностных уравнений с помощью конечных сумм и пр.). Многие важные методы, в особенности малораспространенные (например, метод коллокаций), приведены без должного теоретического обоснования.

В большинстве численных методов автор оценивает погрешность. Однако оценки погрешности страдают двумя недостатками: 1) содержат неизвестные величины — производные до некоторых порядков от искомого решения данной задачи (при этом, как отмечает автор, оценка производных разностными отношениями весьма иллюзорна); 2) оценки погрешности слишком завышены. Последнее обстоятельство, как показывает автор, принципиально неизбежно, и выход из него а) в оценке погрешности не в общем случае, а при частных предположениях относительно задачи, б) в сравнении двух решений, полученных при разных шагах (принцип Рунге), в) в так называемой заключительной проверке.

Механические и графические методы в книге не отражены, за исключением стр. 222—227. В конце книги приводятся 9 таблиц сводных формул, в частности разностных аппроксимаций. В. К. Саульев

**1686 К. Приближенные методы высшего анализа. Канторович, Крылов** (A felsöbb analizis közelite modezerei. Kantorovics L. V., Krülov V. I., Budapest, Akad. Kiadó, 1953, 703 s., 120 Ft.), Magyar nemzeti bibliogr., 1953, № 8, 293 Перевод с русского издания.

**1687 Д. Сходимость некоторых итерационных процессов в линейных функциональных пространствах. Мертвецова М. А.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанск. ун-т, Казань, 1953

**1688 Д. Применение аналитического продолжения в численных методах анализа. Кублановская В. Н.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1955

**1689 Д. О некоторых численных методах решения системы линейных алгебраических уравнений, их приспособлении для других вычислений и об ошибках округления в этих процессах. Живоглядов В. Г.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанск. ун-т, Казань, 1955

## ТАБЛИЦЫ

**1690. Общее решение задачи о модуляции двумя частотами. II. Таблицы функций $A_{mn}(h, k)$. Стернберг** (A general solution of the two-frequency modulation product problem. II. Tables of the functions $A_{mn}(h, k)$. Sternberg Robert L.), J. Math. and Phys., 1954, **33**, № 1, 68—79 (англ.)

Рассматриваются таблицы функций

$$A_{mn}(h, k) =$$

$$= (2/\pi^2)\iint_R (\cos u + k\cos v - h)\cos mu\, du \cos nv\, dv, \quad (1)$$

где $|h| \leqslant 2$, $0 < k \leqslant 1$, а $R$ — область: $\cos u + k\cos v \geqslant h$, $0 \leqslant u, v \leqslant \pi$. Функции (1) введены ранее автором в совместной его работе с Кауфманом (РЖМат, 1954, 5657). Указаны приемы вычисления таблиц функций $A_{mn}(h, k)$, которые заключаются в замене интеграла (1) соответствующими суммами. Приведены таблицы функций $A_{00}(h, k)$, $A_{10}(h, k)$, $A_{01}(h, k)$ и $A_{11}(h, k)$ для $h = -2(0,2)2$ и для $k = 0{,}001$, $0{,}01$, $0{,}1$ и $1{,}0$. Приведены также таблицы функций $A_{20}(h, k)$, $A_{02}(h, k)$, $A_{30}(h, k)$, $A_{21}(h, k)$, $A_{12}(h, k)$ и $A_{03}(h, k)$ для $h = -2(0,2)2$ и $k = 0{,}1$ и $1{,}0$. Н. А. Бразма

**1691. Таблицы функций Беннета для задачи о модуляции двумя частотами в случае однополупериодного линейного выпрямителя. Стернберг, Шипман, Терстон** (Tables of Bennett functions for the two-frequency modulation product problem for the half-wave linear rectifier. Sternberg R. L., Shipman J. S., Thurston W. B.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, **7**, № 4, 505—511 (англ.)

Рассмотрены таблицы для коэффициентов двойного ряда Фурье вида

$$y(t) = \frac{1}{2} PA_{00}(k) +$$

$$+ P\sum\nolimits_{m,n=0}^{\infty *} A_{\pm mn}(k)\cos(\omega_{\pm mn}t + \varphi_{\pm mn}), \quad (1)$$

где $\omega_{\pm mn} = mp \pm nq$, $\varphi_{\pm mn} = m\theta_p \pm n\theta_q$, выражающего напряжение на выходе однополупериодного линейного выпрямителя, если на его вход подается двухчастотное напряжение, задаваемое функцией $x(t) = P[\cos(pt + \theta_p) + k\cos(qt + \theta_q)]$, $0 < k \leqslant 1$. Это частный случай рассмотренной ранее задачи (РЖМат, 1954, 5657; 1956, 1690). Указаны приемы для вычисления коэффициентов $A_{\pm mn}(k)$ ряда (1), называемых здесь функциями Беннета, причем эти коэффициенты частично выражаются через полные эллиптические интегралы первого и второго родов. Выражения для $A_{\pm mn}(k)$ получаются из рассмотренных ранее выражений $A_{\pm mn}(h, k)$ (реф. 1690) в частном случае $h = 0$. Даны таблицы функций $\frac{1}{2}A_{00}(k)$, $A_{10}(k)$, $A_{01}(k)$, $A_{20}(k)$, $A_{11}(k)$, $A_{02}(k)$, $A_{40}(k)$, $A_{31}(k)$, $A_{22}(k)$, $A_{13}(k)$, $A_{04}(k)$ для $k = 0{,}02(0{,}02)1{,}0$. Н. А. Бразма

**1692. Об одном способе вычисления гипергеометрической функции. Кармазина Л. Н.,** Вычисл. матем. и вычисл. техника, 1955, сб. 2, 111—115

Предлагается метод вычисления гипергеометрической функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ по ее интегральному представлению при помощи квадратурной формулы типа Гаусса с весом $\rho(x) = x^{q-1}(1-x)^{p-q}$. Узлы квадратурной формулы будут корнями полиномов Якоби. Имеется выражение остаточного члена.

Приведена таблица коэффициентов и узлов пятичленной квадратурной формулы для значений $p = 1{,}1\,(0{,}1)\,2{,}0$, $q = 0{,}1\,(0{,}2)\,0{,}9$. Она позволяет вычислять значения гипергеометрической функции для вещественных значений параметра $\gamma = 2{,}1\,(0{,}1)\,3{,}0$ и $\beta = 0{,}1\,(0{,}2)\,0{,}9$ при любых комплексных значениях параметра $\alpha$ и $z$ из области аналитичности $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$. Значения узлов и коэффициентов приведены с 6 десятичными знаками; о точности табличных данных никаких указаний нет. Указывается на возможное использование этой таблицы для вычисления вырожденной гипергеометрической функции, функции Бесселя, функции Лежандра и др.

К. Е. Чернин

**1693 К. Таблицы интегральной показательной функции.** Изд-во АН СССР, М., 1954, 300 стр., 27 р. 75 к.

Таблицы содержат значения функций $Ei(x)$ и $-Ei(-x)$ с семью значащими цифрами для значений $x = 0\,(0{,}0001)\,1{,}3\,(0{,}001)\,3\,(0{,}0005)\,10\,(0{,}1)\,15$. Приведены значения функций $Ei(x) - \ln x$ и $-Ei(-x) + \ln x$ для $x = 0\,(0{,}0001)\,0{,}0099$.

Ошибка табличных значений интегральной показательной функции не превосходит 0,6 единицы последнего табличного знака. В основном линейная интерполяция позволяет получить промежуточные значения функций с погрешностью, не превосходящей 1,6 единицы послэднего знака. Там, где линейная интерполяция не обеспечивает достаточной точности, применяется квадратичная интерполяция (исключая $0 \leqslant x \leqslant 0{,}0099$ и $10 \leqslant x \leqslant 15$). Для этого случая в таблице приведены значения вторых разностей.

На вкладыше приведены значения величины $t(1-t)/2$ для $t = 0\,(0{,}001)\,1$ и номограмма для определения абсолютной величины выражения $[t(1-t)/2]\,\Delta^2 f(x_0)$, необходимой при выполнении квадратичной интерполяции.

К. Е. Чернин

**1694 К. Краткие таблицы бесселевых функций целого порядка. Фокс** (A short table of Bessel functions of integer orders. Fox L. London, Cambridge University, 1954, 28 p., about 9 s. net.), Cambridge Spring Books, 1954, 53

**1695 К. Таблица для распределений вероятностей крайних значений** (Probability tables for the analysis of extreme-value data. 32 pp., Washington, National Bureau of Standards Documents. U. S. G. P. O., 1953, 0.25 doll.), Mach. Engng, 1953, **75**, № 12, 1026 (англ.)

**1696 К. Таблицы семизначных логарифмов. Вега Г.,** Фотоцинкография с 65-го стереотип. изд., М., Геодезиздат, 1955, VI, 560 стр., 31 р.

**1697 К. Шестизначные таблицы чисел и тригонометрических функций при новоградусном делении. Пеевски, Иванов** (Шестзначни логаритмични таблици на числата и тригонометричните функции при ново-градусно деление. Пеевски Васил, Иванов Борис, София, Наука и изкуство, 1954, 204 с., 9—05 лв.), Български книгопис, 1954, 58, № 8, 277

**1698 К. О составлении многозначных логарифмических таблиц и 36-значные таблицы натуральных логарифмов. Вармус** (O obliczaniu wielocyfrowych tablic logarytmicznych i 36-cyfrowe tabliśc logarytmów naturalnych. Warmus Mieczysław. Nakł. Wrocł. Tow. Nauk, 1953, 24 s. Całość zł. 30), Przew. bibliogr., 1953, **9** (**21**), № 42, 548

**1699 К. Библиография и указатель математических таблиц. Дейвис, Фишер** (Bibliography and index of mathematical tables. Davis H. T., Fischer V., Evanson Northwestern Univ. Bookstore, Swift Hall, 286 pp., 4 doll.), Cumul. Book Index, 1954, **57**, № 8, 31

**См. также:** 1044, 1248, 1249, 1250, 1254, 1255, 1330, 1340 **К**, 1392, 1530, 1553 **К**, 1555 **К**, 1593

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

**1700. Алгебра выпрямителей. Шефер** (A rectifier algebra. Schaefer David H.), Commun. and Electronics (N. Y.), 1955, № 16, 679—682 (англ.)

Излагается алгебраическое исчисление, предназначенное для анализа, синтеза и упрощения схем, построенных из вентилей (выпрямителей) и сопротивлений. Это исчисление отличается от поля действительных чисел лишь тем, что, кроме операций поля, используются еще две операции: $a \bigvee b = \max(a, b)$ и $a \bigwedge b = \min(a, b)$, где $a$ и $b$ — действительные числа.

Схемы, построенные из вентилей, сопротивлений и источников э. д. с., описываются уравнениями, решенными относительно падения напряжений на сопротивлениях, содержащихся в схемах. Вентили всегда предполагаются идеальными, в силу чего при пропускании через них тока падение напряжения на них равно нулю.

Падение напряжения $e_0$ на сопротивлении, к которому через вентиль приложено напряжение $a$, описывается уравнением $e_0 = a \bigvee 0$, если вентиль включен так, что он пропускает ток при $a > 0$, и уравнением $e_0 = a \bigwedge 0$ при противоположном направлении включения вентиля. Если на сопротивление поданы через вентили два напряжения $a$ и $b$, то падение напряжения на этом сопротивлении будет описываться уравнением $e_0 = a \bigvee b \bigvee 0$, если вентили включены так, что они пропускают ток при $a > 0$ и $b > 0$, и уравнением $e_0 = a \bigwedge b \bigwedge 0$ при противоположных направлениях включения вентилей.

В статье рассмотрен также ряд более сложных схем: мостовая двухполупериодная схема, схема с несколькими источниками э. д. с. и несколькими сопротивлениями, соединенными как последовательно, так и параллельно с вентилями. Приведены примеры упрощения схем с помощью алгебраических преобразований и в заключение формулируется и иллюстрируется примерами общий метод анализа схем, построенных из вентилей и сопротивлений.

Отмечается, что исчисление родственно логическому исчислению Лукашевича и Тарского, на работы которых сделаны ссылки. Библ. 4 назв. В. И. Шестаков

**1701. Новый метод синтеза симметрических контактных схем. Поваров** (Новий метод синтезу симетричних контактних схем. Поваров Г. М.), Доповіді АН УРСР, 1955, № 2, 115—117 (укр.; резюме русс.)

Излагается метод синтеза симметрических контактных двухполюсников, названный автором методом двойственных решеток. Двойственной симметрической решеткой называется инверсия обычной симметрической решетки (Гаврилов М. А., Теория релейно-контактных схем, М.—Л., 1950, гл. 13), все выходы которой соединены вместе. Вводится понятие нерабочего числа булевой функции, которая реализуется симметрическим двухполюсником: нерабочим числом симметрической булевой функции называется число аргументов, истинность которых влечет ложность функции. Уровни двойственной симметрической решетки с $n$ приемными

элементами соответствуют возможным нерабочим числам 0,1,2,...,$n$ симметрических булевых функций $n$ переменных.

Предлагаемый метод синтеза состоит в закорачивании тех уровней двойственной симметрической решетки, которые не соответствуют нерабочим числам реализуемой функции, и последующим отбрасыванием лишних контактов.

Приводится пример синтеза схемы для симметрической функции четырех переменных с нерабочими числами 0 и 3. Предлагаемый метод применим также к синтезу некоторых симметрических многополюсников в инверсных релейно-контактных схемах. В. И. Иванов

**1702. Теоретико-групповой аспект теории линейных четырехполюсников. Гертнер** (The group theoretical aspect of linear four-pole theory. Gaertner Wolfgang), Convent. Rec. I. R. E., 1954, **2**, 36—43 (англ.)

Доказаны следующие теоремы: 1. Пассивные линейные четырехполюсники, не содержащие сопротивлений, образуют группу $G$ относительно каскадного соединения. 2. Пассивные линейные четырехполюсники, содержащие сопротивления, не образуют группу относительно каскадного соединения. 3. Пассивные линейные четырехполюсники, не содержащие сопротивлений и удовлетворяющие соотношениям взаимности ($Z_{12}=Z_{21}$), образуют подгруппу $G_r$ группы $G$. 4. Идеальные фазовращатели и идеальные трансформаторы образуют подгруппу $G_g$ группы $G$. 5. Идеальные трансформаторы образуют подгруппу $G_t$ группы $G_g$ с детерминантом $|F_i|=1$ и таким образом удовлетворяют соотношению взаимности.

Буква $F_i$ означает матрицу $\begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}$ коэффициентов уравнений $V_1 = A_i V_2 - B_i I_2$, $I_1 = C_i V_2 - D_i I_2$ рассматриваемого четырехполюсника. (Знаки минус поставлены перед коэффициентами $B_i$ и $D_i$ потому, что автор считает ток $I_2$ положительным, когда он направлен навстречу току $I_1$. *Ред.*) В. И. Шестаков

**1703. Новый подход к методу потенциального аналога для синтеза цепей. Шварц** (A new approach to the potential analogue method of network synthesis. Schwarz Edward W.), Proc. Nat. Electronics Confer., 1954, **10**, 182—189 (англ.)

Автор определяет передаточную функцию $L(p)$ линейной пассивной цепи с сосредоточенными параметрами при помощи равенства $e^{L(p)} = N(p)/M(p)$, где $N(p)/M(p)$ — импеданс цепи, выражаемый в виде частного двух многочленов от комплексного переменного $p$. Таким образом, $L(p)$ представляется в виде конечной суммы членов вида $K_r \ln(p - Z_r)$, где $K_r$ — целое, а $Z_r$ — комплексное число. Метод потенциального аналога заключается в аппроксимации заданной функции $F(p)$ комплексного переменного суммой логарифмов вышеуказанного вида:

$$F(p) \approx \sum_{r=1}^{n} K_r \ln(p - Z_r). \qquad (1)$$

Для решения задачи предлагается представить функцию $F(p)$ в виде интеграла

$$F(p) = \int_{M_0}^{M_n} s(m) \ln[p - g(m)]\, dm \qquad (2)$$

с неизвестными функциями $s(m)$, $g(m)$, имеющего смысл логарифмического потенциала, и затем разбить его на сумму интегралов с последующей оценкой отдельных слагаемых, в результате чего и получается представление вида (1). Для подходящего подбора функций $s(m)$ и $g(m)$ предлагается в конкретных задачах пользоваться таблицей представлений некоторых простейших функций интегралами вида (2). Автор приводит пример такой таблицы. Комбинируя эти табличные представления, следует подбирать представление данной функции $F(p)$ в виде (2).

В отличие от обычного метода потенциального аналога (Darlington S., Bell System Techn. J., 1951, 30, April, 315—365), автор предлагает рассматривать интегралы вида (2) независимо от того, имеют ли они непосредственный смысл логарифмического потенциала. Для удобства вычислений интегралов (2) предлагается пользоваться их представлением в виде криволинейных интегралов в действительной или комплексной плоскости. Конкретного метода для решения сформулированной выше задачи автор не дает.

Н. А. Бразма

**1704. Введение в качественный синтез линейных пассивных цепей по заданным переходным функциям. Реза** (An introduction to a qualitative synthesis of linear passive networks in the time domain. Reza F. M.), Proc. Nat. Electronics Confer., 1954, **10**, 190—197 (англ.)

Рассматривается вопрос о возможности приближенного построения цепи с сосредоточенными параметрами по данной переходной функции, под которой здесь подразумевается функция $f(t)$, выражающая процесс в цепи, вызванный воздействием единичного импульса в момент $t = 0$. По этому вопросу предыдущие результаты автора опубликованы ранее (Reza F., Quarterly Progress Report, Research Laboratory of Electronics, M. I. T., 1954, July 15, 96—99). В данной работе основным результатом является следующая теорема:

Пусть $f^*(t)$ будет данной однозначной непрерывной (кроме, быть может, точки $t = 0$) функцией, стремящейся к конечному пределу при $t \to +0$ и $t \to \infty$ и равной нулю при $t < 0$. Тогда можно найти такую линейную пассивную цепь, содержащую конечное число сосредоточенных параметров, что ее характеристика удовлетворяет неравенству $|f^*(t) - f(t)| < \eta$ при произвольно малом положительном $\eta$.

Доказательство теоремы заключается 1) в преобразовании посредством равенства $x = 1 - e^{-2\pi t}$ промежутка изменения переменной $t$: $0 \leqslant t \leqslant \infty$ в конечный промежуток изменения $x$, в результате чего $f^*(t)$ переходит в $\varphi(x)$: $f^*(t) = \varphi(x)$; 2) в применении теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции многочленами, согласно которой подбирается многочлен $P(x)$ такой, что $|\varphi(x) - P(x)| < \eta$; 3) в возвращении при помощи вышеуказанного преобразования к первоначальной переменной $t$: $P[x(t)] = f(t)$; 4) в последующем применении преобразования Лапласа к функции $f(t)$, в результате чего получается изображение $F(s)$. Это изображение $F(s)$, по утверждению автора, является характеристикой некоторой реализуемой цепи, которая и является искомой аппроксимирующей цепью. В случае периодической функции $f^*(t)$ (при $t \geqslant 0$) автор предлагает аппроксимировать эту функцию тригонометрическим многочленом, изображение которого по Лапласу можно использовать в качестве характеристики аппроксимирующей цепи.

Приводятся рассуждения о минимальном числе параметров аппроксимирующей цепи, причем учитываются числа корней уравнений $\dfrac{d^k f(t)}{dt^k} = 0$, $k = 0, 1, 2 \cdots$

Примечание референта. В формулировке вышеуказанной теоремы автор дополнительно требует однозначности производных (не ясно, которых?) от функции $f^*(t)$, кроме, быть может, точки $t = 0$. Однако

это условие нигде не используется в доказательстве теоремы. Кроме того, в работе отсутствует условие существования конечного предела функции $f^*(t)$ при $t \to +0$ и $t \to \infty$; однако это условие необходимо для применения теоремы Вейерштрасса к доказательству данной теоремы. Н. А. Бразма

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

**1705. Кому служит кибернетика. Материалист,** Вопр. философии, 1953, № 5, 210—219

Статья содержит критику философской концепции «человека-машины» в области кибернетики. Автор справедливо отмечает реакционный характер подобной технократической концепции в современной буржуазной философии.

Несостоятельность общих теоретических принципов современной кибернетики за рубежом автор видит, прежде всего, в том, что основатели и защитники этой науки полагают область ее применения безграничной. На этом основании автор считает кибернетику в целом направлением буржуазной философии — «одной из тех лженаук, которые порождены современным империализмом и обречены на гибель еще до гибели империализма» (стр. 218). В связи с этим приводятся выступления французского физика-теоретика Луи-де-Бройля и французского ученого-марксиста А. Ляпунова против излишних претензий кибернетики в области психологии и социологии. Другим существенным недостатком кибернетики является, по мнению автора, игнорирование качественного отличия между живым организмом и машиной. Употребление в кибернетике таких понятий, как «мыслящие машины», «гигантские мозги» в применении к счетным машинам не имеет, по мнению автора, никакого научного основания. Разъясняя специфику живого организма, физиологии высшей нервной деятельности, автор широко использует в своей аргументации научное наследие И. М. Сеченова, учение И. П. Павлова о первой и второй сигнальной системе.

В статье отмечается связь кибернетики с развитием техники и математической науки. Благодаря развитию вычислительной техники, вычислительных машин, замечает автор, создается новый раздел прикладной математики — машинная математика. Однако основное внимание статьи сосредоточено на критике психологических и социологических вопросов, которые не полностью определяют содержание кибернетики как направления в современной науке. Автор приводит перевод слова «кибернетика» с древнегреческого на русский язык (способный управлять), но не определяет кибернетику как общую теорию самоуправляющихся (саморегулирующихся) систем и связей.

Достаточных доказательств для понимания кибернетики как реакционного социологического учения автор не приводит.

Примечание референта. Кроме данной статьи, философским проблемам кибернетики посвящены статьи: Т. К. Гладков «Кибернетика — псевдонаука о машинах, животных, человеке и обществе» (Вестн. Моск. ун-та, 1955, № 1, 57—67), Э. Кольман «Что такое кибернетика?» (Вопр. философии, 1955, № 4, 148—159). Попытка представить кибернетику как научное направление сделана в статье академика С. Л. Соболева, А. И. Китова, А. А. Ляпунова «Основные черты кибернетики» (Вопр. философии, 1955, № 4, 136—148). Математические проблемы кибернетики связаны с теорией счетных машин, теорией вероятностей, математической логикой. Физико-технические проблемы кибернетики охватывают ряд вопросов электроники, телемеханики, общей теории связи. Для знакомства с состоянием кибернетики за рубежом можно обратиться к книге Н. Винера «Кибернетика или управление и связь в животном и машине» (Wiener Norbert, Cybernetics or control and communication in the animal and the machine). П. Е. Сивоконь

**1706. Логика, открытия и основания вычислительных машин. Марон** (Logic, discovery, and the foundations of computing machinery. Maron M. E.), Trans. I. R. E., 1954, EC-3, № 2, 2—7 (англ.)

Статья посвящена так называемым «обучающимся» машинам. Отмечая, что современные вычислительные машины более правильно назвать «автоматическими устройствами преобразования информации», автор рассматривает вычислительную машину как некоторый логический формализм с алфавитом и правилами формирования — для образования и приема информации — и с правилами преобразования информации. Основываясь на обычном понимании эффективности процедуры, автор указывает, что в трех логических проблемах: построение утверждения, или «задача открытия», проверка правильности утверждения и проверка правильности доказательства, которые являются основными моментами в создании математических и опытных наук, только третья и в малой степени вторая проблемы решаются эффективно.

Однако, помимо чисто эффективных процедур, машина может выполнять действия, которые в некоторых случаях позволят ей решать «задачу открытия», причем основными средствами здесь должны быть случайность образования утверждений, ограничиваемая правилами формирования, и отбор на основании анализа информации, поступающей из внешнего мира. Такой характер работы и лежит в основе «обучающихся» машин.

В качестве примера «открытия» машиной законов некоторого явления рассматривается опыт с размещением двух монет около стены. Независимые переменные, набор которых определяет взаимное расположение монет и стены, суть: $x_1$ — 1-я монета лежит решеткой вверх, $x_2$ — 2-я монета лежит решеткой вверх, $x_3$ — 1-я монета касается стены, $x_4$ — 2-я монета касается стены, $x_5$ — монеты касаются друг друга. Ограничениями, накладываемыми на расположение монет, т. е. «законами», которые должна обнаружить машина, являются: 1) монеты не могут быть обе решетками вверх; 2) если 1-я монета касается стены, то либо 2-я монета не может касаться стены, либо монеты должны касаться друг друга; 3) монеты не могут касаться друг друга, если 1-я монета касается стены, и наоборот. Таким образом все время остаются тождественно истинными лишь формулы: $\overline{x_1 \wedge x_2}$, $x_3 > (\bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)$ и $\bar{x}_4 \equiv x_2$. Работа машины заключается в образовании всевозможных гипотез, допустимых правилами формирования логических функций, и в проверке их в соответствии с информацией об опыте. В конце концов машина должна сохранить в качестве ответа только указанные формулы. А. П. Ершов

**1707. Составление программ для вычислительной машины КСИРО Марк I. III. Использование программ для сложных арифметических действий. Пирси,**

**Хилл** (Programme design for the C. S. I. R. O. Mark I computer. III. Adaptation of routines for elaborate arithmetical operations. Pearcey T., Hill G. W.), Austral. J. Phys., 1954, **7**, № 3, 485—504 (англ.)

Продолжение цикла статей тех же авторов о составлении программ для вычислительной машины КСИРО Марк I (РЖМат, 1954, 4202, 4203). Для решения задач, в которых необходимо выполнение арифметических действий над объектами более сложной природы, нежели числа с фиксированной запятой (например, числа в нормальной форме, комплексные числа и т. п.), авторы предполагают использовать известный метод интерпретативных программ (реф. 1708). Подробно рассматривается методика составления и использования интерпретативной программы для действий с двойным числом знаков, для действий над числами в нормальной форме и комплексными числами.

Интерпретативная программа состоит из двух частей — функционального блока — собрания стандартных программ, непосредственно выполняющих нужные действия, и собственно интерпретативной программы. Эта программа вводит в работу стандартные программы из функционального блока под действием так называемых «гиперкоманд», которые могут встречаться в основной программе наряду с обычными командами.

Много внимания уделено тому, чтобы гиперкоманды как можно меньше отличались от обычных машинных команд и были удобны в пользовании. В связи с этим вводятся своеобразные «гипер»-обозначения и «гипер»-терминология. Например, программа, состоящая из гиперкоманд, называется гиперпрограммой. Два накопителя $D_{10}$ и $D_{11}$, в которых хранятся порядок и цифровая часть числа, в программах, использующих арифметику с учетом порядков, в соответствующей гиперкоманде объединяются в один «гипернакопитель» и т. д. Это приводит к тому, что гиперкоманды отличаются от соответствующих машинных команд лишь признаком $z$, стоящим в младших пяти разрядах. Если гиперкоманда не снабжена признаком $z$, то она выполняется интерпретативной программой как обычная команда. Дается список эридцати двух гиперкоманд, используемых в машине, и приводится пример на составление гиперпрограммы. А. П. Ершов

**1708. Влияние интерпретативной техники на функциональное строение вычислительных машин. Пирси, Хилл, Райан** (The effect of interpretative techniques on functional design of computers. Pearcey T., Hill G. W., Ryan R. D.), Austral. J. Phys., 1954, **7**, № 3, 505—519 (англ.)

Опыт решения большого числа математических задач на вычислительной машине КСИРО Марк I с использованием интерпретативных программ (РЖМат, 1954, 4202, 4203, а также реф. 1707) показывает, что переменные команды и рабочие ячейки, т. е. такие элементы программы, которые требуют стирающегося запоминающего устройства (з. у.), занимают в среднем менее 5% от общего объема используемых ячеек з. у., причем этот процент понижается при усложнении программы. В связи с этим авторы считают целесообразным создание вычислительной машины с обширным, фиксированным быстродействующим з. у., со стирающимся з. у. малого объема и с возможно более простым кодом операций. Для машины должна быть составлена интерпретативная программа с большим функциональным блоком, которая будет храниться в фиксированном з. у. Все рабочие программы составляются только из гиперкоманд, причем программист даже не обязан знать истинный машинный код.

Полностью интерпретативный характер работы машины, значительно облегчая программирование, снижает фактическую скорость решения задачи примерно вдвое, однако, по мнению авторов, такая машина будет иметь преимущества в простоте изготовления и в большей надежности работы.

В качестве фиксированного з. у. предлагается использовать кинопленку, на которой двоичные разряды кодируются световыми точками. Считывающим устройством может служить обычное телевизионное оборудование для передачи фильмов, которое позволяет вести считывание с частотой следования импульсов в 1 *Мгц* при плотности записи 16 000 двоичных знаков на один кадр.

В общих чертах намечается функциональная схема машины и приводится примерный код операций, содержащий 17 16-разрядных одноадресных команд. Предлагаемый объем з. у.: стирающееся з. у. — 256 16-разрядных ячеек, фиксированное з. у.—16128 ячеек, медленное з. у. — 16384 ячейки. А. П. Ершов

**1709. Большая вычислительная машина** (Huge computer features unitized design), Electr. Manufact., 1954, **54**, № 6, 131—132 (англ.)

Описываются некоторые особенности вычислительной машины ЮДЕК II (UDEC II) фирмы «Берроус» (Burroughs) (РЖМат, 1955, 2435, 2920, 3467, 4039, 6145). Машина смонтирована на 31 стойке высотой 2,1 *м*. Общая длина стоек 18 *м*. Машина оперирует с 9-значными десятичными двоично-кодированными числами. Ввод данных в машину осуществляется с двух пятидырочных перфолент со скоростью 6 знаков в 1 сек. и двух фототрансмиттеров фирм «Ферранти» и «Берроус». Фототрансмиттер фирмы «Берроус» работает со скоростью 100 знаков в 1 сек., может менять направление движения ленты и использоваться, таким образом, в качестве внешнего запоминающего устройства. Имеется также быстродействующий ввод с перфокарт. Вывод результатов из машины производится с помощью двух рулонных телетайпов, работающих со скоростью 6 знаков в 1 сек., и двух ленточных перфораторов, работающих с той же скоростью. Имеется также термическое устройство печати, работающее со скоростью 30 знаков в 1 сек. Магнитный барабан машины имеет диаметр 210 *мм*. Информация считывается последовательно на частоте 125 *кгц*. В машине используется одноадресная система программирования. В одном 10-разрядном коде записываются две одноадресные инструкции. 3 цифры инструкции указывают номер ячейки запоминающего устройства, 2 цифры указывают вид операции. Л. С. Легезо

**1710. Проект электронной вычислительной машины высшей электротехнической школы (ЭРМЕТХ). Шпейзер** (Projekt einer elektronischen Rechenmaschine an der E. T. H. (ERMETH). Speiser A. P.), Z. angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 8/9, 311—312 (нем.)

Сообщение Института прикладной математики Высшей электротехнической школы (Цюрих) о проекте новой электронной вычислительной машины ЭРМЕТХ (ERMETH), имеющей следующие технические данные.

Система счисления, принятая в машине, — десятичная двоично-кодированная. Число десятичных разрядов 16. Передача информации параллельная. Рабочая частота машины 32 *кгц*. Предусмотрена возможность работы с фиксированной запятой и с учетом порядков. Одна инструкция занимает 7 десятичных разрядов: 2 разряда операции, разряд индекса и 4 разряда адреса. В каждом коде один десятичный разряд используется для контроля вычислений. Система программирования одноадресная. Арифметическое устройство выполнено на триггерах и имеет 3 регистра. Суммирование осуществляется на диодах, связанных по постоянному току. В машине применяются лампы Е-90 СС и ОА-55. Время на операцию (без времени выборки) составляет: сложение

5 мсек., умножение 16 мсек., деление 30 мсек. Среднее время выборки числа около 5 мсек. Среднее время на операцию, включая время выборки, составляет приблизительно 16 мсек.

Запоминающее устройство выполнено на магнитном барабане (диаметр барабана 25 *см*, длина 50 *см*, скорость вращения 6000 об/мин), имеет 50 параллельных десятичных каналов (200 магнитных головок); каждый канал хранит 200 кодов. Общая емкость устройства составляет 10 000 кодов. Ширина канала вдоль образующей составляет 2 *мм*; плотность записи 4 импульса на 1 *мм*, частота 320 *кгц*. Ввод и вывод в машине осуществляется на перфокартах. На одной карте набивается 5 кодов. ЭРМЕТХ имеет 2 одинаковых устройства, каждое из которых по выбору может быть использовано как для набивки перфокарт, так и для считывания с них. Каждое устройство обрабатывает в 1 сек. 2 карты. Следовательно, в 1 сек. может быть набито или прочитано 20 кодов. Результаты вычислений могут быть выведены также на телетайп или на табулятор. Телетайп печатает код за 2 сек., табулятор — 2 кода в 1 сек. На наборной панели могут быть предварительно выбраны 20 различных схем печатания и затем любая из них запрограммирована. Г. М. Грязнов

**1711. Разработка электронной счетной машины с программным управлением ЭРМЕТХ в Институте прикладной математики Высшей электротехнической школы. Шлеппи** (Entwicklung einer programmgesteuerten elektronischen Rechenmaschine am Institut für angewandte Mathematik der ETH. Schlaeppi H.), Z. angew. Math. und Phys., 1954, 5, № 5, 435—436 (нем.)

Описывается вычислительная машина ЭРМЕТХ (ERMETH). См. реф. 1710.

**1712. Эволюция конструкции машины A.P.E.(X.)C. Бут** (The development of A. P. E.(X).C. Booth Andrew D.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, № 46, 98—105 (англ.)

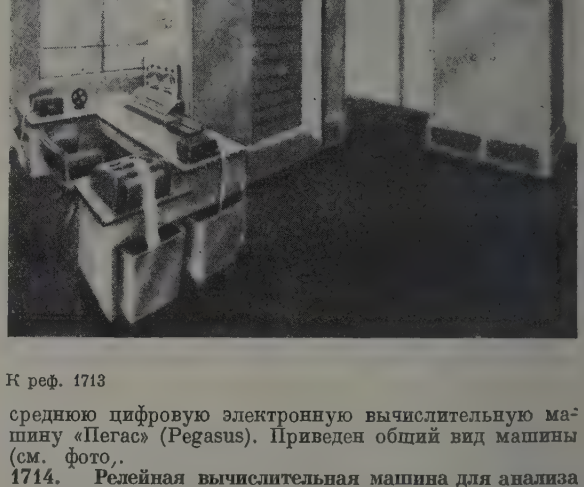
Сообщаются некоторые исторические сведения о работах, предшествовавших и способствовавших разработке конструкции универсальной электронной вычислительной машины A.P.E(X.)C. (All Purpose Electronic Computer; буквы в скобках означают начальную букву организации, субсидировавшей постройку машины), спроектированной и построенной в вычислительной лаборатории Биркбекского колледжа в Лондоне. В частности, приводятся некоторые сведения о построенной в конце 1947 г. автоматической релейной счетной машине АРК (A. R. C.—Automatic Relay Computer). Приведен код команд и скорости осуществления основных операций, выполняемых этой машиной. Упоминается об электронной счетной машине СЕК (S. E. C.— Simple Electronic Calculator), служившей в качестве испытательного макета при разработке машины A.P.E.(R.)C. — первой машины типа A.P.E.(X.)C. Машина A.P.E.(R.)C. содержит около 500 электронных ламп, работает на частоте 30 *кгц* и имеет внутреннее запоминающее устройство на магнитном барабане емкостью 512 32-разрядных двоичных чисел. Приведено фото этой машины и перечислен ряд задач, которые были решены на этой машине. Сообщается, что, в то время как эта машина проходила испытания, были построены несколько других машин того же типа, а именно машины: A.P.E.(X.)C., A.P.E.(N.)C. и M.A.G.I.C. (Magnetic and Germanium Integer Calculator) с уменьшенным количеством ламп на 180 штук, и машины H.E.C.1 (Hollerith Electronic Computer 1) и H.E.C.2, основанные на первоначальном проекте машины A.P.E.(R.)C. Машины второй группы специально приспособлены для ввода в них данных от десятичных перфокарт. Машины первой группы имеют более универсальное устройство для ввода и вывода данных, приспособленное для работы как с перфокартами, так и с телетайпом.

В машинах A. P. E.(X.)C. и M.A.G.I.C. емкость запоминающего устройства увеличена до 8000 32-разрядных двоичных чисел и скорость работы удвоена (60 *кгц*) по сравнению с машиной A.P.E.(R.)C. Эти машины имеют накапливающий сумматор и работают по двухадресной системе — первый адрес содержит число, над которым производится операция, а второй адрес — номер ячейки запоминающего устройства, в которой находится следующая команда. Приведены коды 16 операций, используемых в этих машинах, и указаны скорости выполнения основных операций. На сложение, вычитание и сдвиг числа на один разряд вправо затрачивается до 600 μсек., на сдвиг числа на один разряд влево — 1200 μсек., а на умножение — $m \times 600$ μсек., где $m$ — число инверсий (т. е. переходов от нуля к единице и от единицы к нулю) в множителе.

В. И. Шестаков

**1713. 39-я выставка Физического общества, 1955** (The 39th Physical society exhibition, 1955), Instrum. Practice, 1955, **9**, № 4, 352—362 (англ.)

В обзоре выставки, окрытой с 25 по 28 апреля 1955 г., указывается, что фирма «Ферранти» выставляет новую



К реф. 1713

среднюю цифровую электронную вычислительную машину «Пегас» (Pegasus). Приведен общий вид машины (см. фото).

**1714. Релейная вычислительная машина для анализа цепей. Грахам** (Relay computer for network analysis. Graham R. S.), Bell Labs Rec., 1953, **31**, № 4, 152—157 (англ.)

Приведено краткое описание релейной вычислительной машины «Модель VI» фирмы «Белл», предназначенной в основном для расчета сложных цепей. Указывается, что на машине можно производить решение ряда других задач (решение систем уравнений, перемножение матриц, интегрирование некоторых видов нелинейных дифференциальных уравнений, подсчет непрерывных дробей). Машина выполняет пять элементарных арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение квадратного корня), а также операцию условного перехода в зависимости от алгебраического знака результата. Программа и начальные данные запоминаются на перфолентах. Результаты расчетов печатаются. В качестве оперативного запоминающего устройства используются релейные регистры. Для удобства программирования в машине имеются стандартные подпрограммы, обеспечи-

вающие выполнение расчетов для ряда простейших последовательно-параллельных схем. Сложные цепи составляются из элементарных стандартных блоков. Имеются три типа подпрограмм, различающихся степенью сложности. Для расчета таких цепей, как фильтры, предусмотрено автоматическое определение импедансов, фазовых сдвигов и потерь для ряда частот. Диапазон чисел, представляемых в машине от $0{,}1 \cdot 10^{-19}$ до $0{,}9 \cdot 10^{19}$. Машина работает в двоично-пятеричной системе.

Указывается, что в машине предусмотрена автоматическая проверка правильности разультатов и автоматическое выключение при переполнении или при неправильно заданных условиях.

Л. Н. Дашевский

**1715. Машина для вычисления структурных факторов. Линек** (Stroj pro výpočět strukturních faktorů. Línek Allan), Časop. pěstov. fys., 1953, 3, №.5, 388—393 (чеш.); Чехосл. физ. ж., 1954, 4, № 2, 180—186 (резюме англ.)

Описывается релейная машина, сконструированная в Институте технической физики ЧСАН, вычисляющая $\sin 2\pi(hx + ky + lz)$ и $\cos 2\pi(hx + ky + lz)$ для $x, y, z$, заданных между 0 и 1, и произвольных целых $h, k, l$. Она облегчает нахождение структурных факторов при рентгеноструктурном анализе кристаллов. В качестве $x, y, z$ берутся координаты атомов в элементарной ячейке кристаллической решетки, измеренные в долях кристаллографических осей, а в качестве $h, k, l$ — индексы Миллера.

Машина состоит из входной панели, сумматора с генератором импульсов и дешифратора. Входная панель имеет три ряда по десять ключей для ввода чисел $x, y, z$ в двоичном представлении. Указывается, что точность $2^{-10}$ достаточна для целей рентгеноструктурного анализа. Нажимая клавишу, можно повторным сложением накопить в сумматоре $hx + ky + lz$. При этом трехпозиционные переключатели определяют, какое из чисел $x, y, z$ вводится в сумматор и с каким знаком. В зависимости от положения двухпозиционного переключателя одно нажатие клавиши дает либо одно сложение, либо серию сложений. Сумматор состоит из 10 одинаковых разрядных ячеек. Каждая содержит 4 реле и имеет три входа, питаемые генератором импульсов. Генератор импульсов управляется клавишей и двухпозиционным переключателем и состоит из 5 реле, из которых четыре замедлены параллельно включенными конденсаторами. Провод между генератором и одним из входов ячейки сумматора проходит через соответствующие ключи на входной панели. Остальные входы ячейки обеспечивают блокировку ее реле. Вычитание осуществляется прибавлением дополнения, увеличенного на единицу. Приведены схемы генератора импульсов и ячейки сумматора. Для каждого из 1024 значений суммы $hx + ky + lz$ дешифратор дает значения $\sin 2\pi(hx + ky + lz)$ и $\cos 2\pi(hx + ky + lz)$. Два первых разряда определяют знак sin и cos, остальные 8 разрядов определяют абсолютные величины их. Знаки sin и cos показывают сигнальные лампы, управляемые 9-й и 10-й ячейками сумматора. Абсолютные величины в виде таблицы нанесены фотографически на стеклянную доску размером $28{,}5 \times 32$ *см* и показываются дешифратором в одном из 256 окошек величиной $11 \times 7{,}5$ *мм*. При этом в окошке видны два четырехзначных десятичных числа, и особая лампа сигнализирует, sin ли или cos верхнее из них. Принципы работы дешифратора описаны автором ранее (Fysikální věstník, 1952, № 2, 9).

Г. Н. Поваров, Ф. В. Цвайг

**1716. Контрольные цепи и программы обнаружения ошибок. Эккерт** (Checking circuits and diagnostic routines. Eckert J. Presper, Jr), Convent. Rec., I.R.E. 1953, part 7, 62—65 (англ.)

Рассматриваются типы ошибок и методы их выявления в современных вычислительных машинах. Автор все ошибки подразделяет на три типа: непрерывная ошибка может возникнуть в результате сгорания предохранителя или выхода из строя лампы, редкая ошибка — в результате плохого контакта, случайная ошибка, причиной которой может быть слабый импульс. Вероятность появления ошибок последних двух типов можно исключить, применяя жесткие допуски при конструировании, но экономические условия требуют компромисса между надежностью и стоимостью. Автор считает, что специальные программы для обнаружения ошибок нецелесообразно применять к большим вычислительным машинам. Различные схемы контроля более эффективны. На примере вычислительной машины ЭНИАК рассматриваются методы контроля.

Применялись четыре типа контроля. Длинная тест-программа выявляет, в основном, непрерывные ошибки и занимает около 10 мин. Такая проверка производится ежедневно. Вторая тест-программа короче и занимает около 1 мин. Применяется перед и после небольших задач. Третий тип контроля — разностный метод, при котором используется табулятор для вычитания.

Последний тип контроля — это двойной просчет, который дает относительный контроль. Контроль, использующий тест-программы, а также двойной просчет неэкономичны. Около 60% рабочего времени расходуется на контроль.

Иногда применяется параллельный контроль, например в машине БИНАК, которая состоит из двух одинаковых вычислительных машин. Их результаты непрерывно сравниваются, и в случае расхождения обе машины останавливаются. Контроль работы отдельных цепей часто осуществляется их дублированием. Дублирование особо важных цепей широко применяется в вычислительной машине УНИВАК. В этой же машине применяется автоматический контроль внутренних запоминающих устройств через каждые 4 сек. Это не программный контроль и может работать с желаемой частотой.

Опыт эксплуатации показывает необходимость контрольных цепей внутри вычислительной машины. Контрольные схемы и цепи сигнализации обнаруживают ошибку немедленно, в то время как программный контроль часто обнаруживает ошибку после прохождения всей программы.

В. М. Тарасевич

**1717. Совершенный контроль** (Gauged to perfection), Computers and Automat., 1955, 4, № 2, 43 (англ.)

Сообщение фирмы «Ремингтон Ранд» о том, что электронная вычислительная машина УНИВАК применяется для контроля технологического процесса очистки нефти.

Н. Н. Поснов

**1718. Применение автоматических вычислительных машин в Страховой компании. Оркилд** (Approaching automation in a Casualty Insurance Company. Orkild Carl O.), Computers and Automat., 1955, 4, № 2, 19—22 (англ.)

В Чикагском отделении Континентальной страховой компании (Continental Casualty Co.) изучается вопрос о возможности применения электронных вычислительных машин для механизации вычислительных работ. После проведения необходимых для Компании вычислительных работ по заранее составленным программам на машинах ИБМ-650, модель 30-203 фирмы «Консолидейтид», ИБМ-705 будет решено, какой тип машин наиболее целесообразно применять. Предполагается, что электронная машина за ночь будет обрабатывать все полученные в течение предшествующего дня данные. Приведены перечень операций, выполняемых машиной, и блок-схемы соответствующих программ.

Н. Н. Поснов

**1719. Настольное моделирующее устройство. Розен, Фоссьер** (A desk-model electronic analog computer. Rosen H. A., Fossier M. W.), Trans. I. R. E., 1954, **EC-3**, № 4, 20—24 (англ.)

Приводится описание настольного моделирующего устройства ДЭАК (DEAC — Desk-Model Electronic Analog Computer). Машина имеет девять усилителей постоянного тока с цепями обратной связи. Помимо простых цепей обратной связи из сопротивлений и емкостей, в машине предусмотрен набор более сложных *RC*-цепочек, что позволяет моделировать сложные функциональные зависимости при ограниченном числе усилителей. Соединение элементов машины в требуемой последовательности производится непосредственно на передней панели. Коэффициент усиления усилителя без обратной связи 20 000. Скорость ухода напряжения на выходе усилителя при работе его в интегрирующем элементе с постоянной времени 1 сек. меньше 1 *в/час*. Специальных устройств для стабилизации нуля не имеется. Усилители собраны на миниатюрных триодах типа 12AX7 и 12AT7 и все вместе занимают площадь $23 \times 30$ *см*$^2$. Приведена схема усилителя с указанием всех параметров. В цепях обратной связи используются 5%-ные угольные сопротивления и бумажные конденсаторы.

На ДЭАК можно решать нелинейные уравнения, в которых нелинейности аппроксимируются отрезками прямых, а также уравнения с переменными коэффициентами. Нелинейные зависимости моделируются с помощью кристаллических диодов, включаемых в обратную связь усилителей аналогично *RC*-цепочкам. Уровень отпирания диодов задается специальным источником смещения. Для моделирования коэффициентов, меняющихся во времени, в машине предусмотрен точный потенциометр, приводимый в движение мотором. Наблюдение временных зависимостей производится с помощью двухлучевого осциллографа. Усилители контролируются тремя вольтметрами. Машина потребляет 250 *вт*. Приведены фотографии машины и усилителей. П. Н. Куприянчик

**1720. Интегратор с большим периодом запоминания. Торн, Кац, Клоз** (Long time analog memory. Torn Lawrence J., Katz Sidney, Close Richard N.), Proc. Nat. Electronics Confer., 1954, **10**, 566—578 (англ.)

Подробное изложение идей и принципов, положенных в основу разработки компактного четырехлампового интегратора с особо стабильными параметрами, длительным запоминанием и высокой чувствительностью. Основным элементом прибора является усилитель постоянного тока с емкостной отрицательной обратной связью. Из упрощенного анализа этого усилителя при допуске, что все элементы схемы являются идеальными и коэффициент усиления усилителя постоянен, вытекает, что выходное напряжение усилителя является интегралом от тока на входе, с точностью до произвольного множителя. Затем проводится более строгий анализ с учетом отклонений параметров устройства от идеальных состояний. Этот анализ позволил авторам установить степень влияния каждого из факторов, вносящих искажения в работу устройства, и принять необходимые меры, сводящие к минимуму эти искажения.

Так, для того чтобы приблизить характеристики входного диода к идеальным, напряжение накала было снижено до 4,5 *в*, на нить накала был подан положительный потенциал в 4,5 *в* относительно катода, а на анод диода — отрицательный потенциал в 3 *в* относительно катода. Кроме того, все диоды подвергались предварительной 150-часовой тренировке, после чего производился отбор диодов по суммарному току утечки, который должен быть не более $25 \times 10^{-12}$ *а*.

Так же тщательно производился выбор режима работы входной лампы интегратора с целью сократить до минимума ток утечки сетка - катод этой лампы. Очень серьезные требования предъявляются к конденсатору обратной связи: ничтожный ток утечки при разумных размерах конденсатора и работа при температуре, достигающей 100°. В качестве диэлектрика была выбрана удовлетворяющая этим условиям тефлоновая пленка толщиной 0,0125 *мм*. Сопротивление утечки такого конденсатора емкостью 0,01 *мкф* лежит в пределах $10^{13}$—$10^{14}$ *ом*.

Двухкаскадный усилитель интегратора, с катодным повторителем на выходе, выполнен на двойных триодах и имеет общий коэффициент усиления 5000, с пределами по напряжению на выходе $\pm 100$ *в*. Все критичные элементы прибора помещены в герметичную коробку, наполненную сухим азотом. Для соединения этих элементов с остальными служит специальный герметичный разъем на 16 контактов.

Все указанные выше меры позволили авторам создать компактный четырехламповый электронный интегратор со следующими параметрами. При запасающем конденсаторе емкостью 0,05 *мкф* постоянная времени дрейфа превышает 40 час., а чувствительность такова, что короткий импульс, несущий заряд в микрокулон, может вызвать напряжение на выходе прибора 20 *в* при токе 5 *ма*. Уход напряжения на выходе интегратора составляет 0,1 *в* за 150 сек. Приводится принципиальная схема интегратора и фотография внешнего вида прибора. Имеется упоминание, что прибор предназначен для военных целей. Б. И. Шитиков

**1721. Проектирование построителя методом последовательной компенсации. Пинскер И. Ш.**, Тр. Семинара по точности механизмов и машин (Ин-т машиноведения АН СССР), 1954, вып. 7, 3—38

Предлагается метод проектирования непрерывного функционального механизма, предназначенного для выработки заданной функции нескольких переменных. Метод основан на синтезе проектируемого механизма из основного устройства, имеющего одну выходную и несколько входных обобщенных координат, и ряда компенсирующих устройств, обладающих одной или двумя степенями свободы.

Если входные координаты основного устройства изменяются соответственно переменным, то оно вырабатывает приближенное значение заданной функции $n$ переменных. Если погрешность где-либо выходит за пределы допуска, то к основному устройству добавляется первое компенсирующее устройство, входные координаты которого изменяются соответственно одной или двум независимым переменным, а выходные подаются на вход основного устройства. Компенсирующее устройство вырабатывает такую функцию переменных, которая компенсирует первоначальную погрешность основного устройства. Если одного компенсирующего устройства оказывается недостаточно, то последовательно добавляются другие. Приводятся соображения по выбору основного устройства и практическая методика выбора и расчета компенсирующих устройств, что позволяет для заданной функции нескольких переменных и заданного допуска на ошибку функционального механизма подобрать его принципиальную схему и основные параметры так, чтобы его абсолютная погрешность не превышала заданного допуска.

Предлагая указанный метод для проектирования функциональных механизмов, автор указывает на полезность его применения при решении следующих задач: а) подбор формул, приближенно воспроизводящих табличные функции, б) построение номограмм, приближенно воспроизводящих общие функции нескольких переменных, в) составление табличных функций.

Предложенный метод особенно полезен при проектировании функциональных механизмов для функций

многих переменных, к которому предъявлены высокие требования в отношении точности, когда неизбежна сложная схема механизма. В. В. Васманов

**1722. Электрическое счетно-решающее устройство для экстраполяции функций. Воллернер Н. Ф.,** Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1954, **13**, 139—145

Указывается, что наиболее просто реализуется с помощью счетно-решающих устройств и обеспечивает вполне достаточную в ряде случаев точность экстраполяция функций усеченным рядом Тейлора:

$$E(t_1+x) \approx E(t_1)+\frac{x}{1!}E'(t_1)+\frac{x^2}{2!}E''(t_1)+\ldots+$$

$$+\frac{x^n}{n!}E^{(n)}(t_1),$$

где $E(t)$ — экстраполируемая на участке $[t_1; t_1+x]$ функция, известная до границы этого участка $t_1$.

Рассматривается предложенная автором схема электрического счетно-решающего устройства для экстраполяции указанным выше методом функций, заданных в виде электрических напряжений. Блок-схема экстраполятора состоит из следующих элементов: анализирующего устройства (дифференциаторов), определяющего значения производных экстраполируемой функции в точке $t_1$, $RC$-цепочек, запоминающих значения производных в точке $t_1$ на время экстраполяции в интервале $(t_1; t_1+x)$, усилителей и интегрирующих устройств для получения членов степенного ряда $\frac{x^n}{n!}E^{(n)}(t_1)$, суммирующего устройства и коммутирующих цепей, выполненных на реле или электронных коммутаторах.

Сообщается, что экстраполятор использовался в исследовательских работах для экстраполяции радиотелефонных программ на выходе радиоприемного устройства на время действия помехи и работал вполне четко, экстраполируя двумя членами ряда Тейлора ($n=1$) на время от 0,2 до 3 мсек. с частотами повторения до тысячи в 1 сек. Г. М. Грязнов

**1723. Широкополосный перемножатель функций. Миллер, Солтс, Скотт** (Wide-band analog function multiplier. Miller Joseph A., Soltes Aaron S., Scott Ronald E.), Electronics, 1955, **28**, № 2, 160—163 (англ.)

Действие перемножателя основано на использовании соотношения $xy=\frac{1}{4}[(x+y)^2-(x-y)^2]$. Возведение в квадрат осуществляется трубкой, выходной ток которой пропорционален квадрату напряжения, приложенного к отклоняющим пластинам. Это достигается за счет того, что плоский электронный луч проходит сквозь параболическое отверстие в промежуточном электроде. Зависимость тока трубки от входного напряжения отклоняется от квадратичной менее чем на 0,01% при входном сигнале $\pm 35$ *в*, и на 1%, если входной сигнал равен $\pm 40$ *в*. Сигналы $\pm(x+y)$ и $\pm(x-y)$ формируются перед трубкой симметричной пассивной суммирующе-вычитающей цепочкой, на вход которой подаются сигналы $x$, $y$, а также их отрицательные значения. На выходе трубок включены делители напряжения и катодные повторители, а затем вычитающее устройство, с выхода которого снимается произведение $xy$. Ошибки вызываются перегрузкой очень большими сигналами, дрейфом нуля выходных цепей, изменением тока, протекающего между отклоняющими пластинами и катодом трубки. Последние могут быть уменьшены, если уменьшить сопротивление на входе трубки (в суммирующе-вычитающей цепочке). Перемножатель работает в диапазоне частот от 0 до 90 *кгц*. В. Т.

**1724. Быстродействующий интегратор произведений. Макни** (A high speed product integrator. Macnee A. B.), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 3, 207—211 (англ.)

Рассматривается использование моделирующих устройств для вычисления интегралов вида

$$F(y)=\int_0^{T\text{ или }t} f(t)\,K(y,t)\,dt,$$

где $f(t)$ и ядро $K(y,t)$ — известные функции, $y$ — переменный параметр. Задача решается с помощью интеграторов, множительных и функциональных устройств.

Рассматриваются способы представления ядра для случая, когда параметр изменяется значительно медленнее $t$. Это позволяет вводить параметр с помощью потенциометра. Даны блок-схемы образования $K(y,t)=f(y-t)$; $K(y,t)=yf[y\sin(kt)]$. Основными источниками ошибок являются множительное и функциональное устройства. Точность вычислений колеблется от 1 до 10% в зависимости от типа задачи. Н. Ф. Семикова

**1725. Упрощенное решение электронного анализатора алгебраических многочленов и его новое применение. Лукашевич Л.,** Бюл. Польск. АН, Отд. 4, 1953, **1**, № 3, 113—117

Описывается электронный анализатор алгебраических многочленов, разработанный автором в Математическом институте Польской академии наук. Анализатор предназначен для вычисления выражений $u+iv=\sum_{n=0}^{12}(a_n+ib_n)(x+iy)^n$, $a_n, b_n, x, y$ — действительные числа, $|a_n|\leqslant 1$, $|b_n|\leqslant 1$, $x^2+y^2\leqslant 1$. Модулю комплексного числа соответствует амплитуда переменного напряжения, а аргументу — фаза, частота 500 *гц*. Значения $a_n, b_n, x, y$ устанавливаются с помощью потенциометров. Операции умножения и суммирования производятся с помощью усилителей с емкостной обратной связью. Описанный анализатор отличается от ранее известных меньшим количеством усилителей и большей стабильностью, благодаря специальной дополнительной обратной связи.

Автор предлагает использовать анализатор для разложения в ряд Фурье и для синтеза путем замены интеграла суммой из 12 членов и бесконечного ряда — суммой 13 членов. Измерения производятся компенсационным методом. Н. В. Корольков

**1726. Автоматическое решение систем линейных алгебраических уравнений. II. Электронные методы. Альмеч-Кастаньер** (Resolucion automática de sistemas de ecuaciones lineales. II. Métodes eléctrónicos. Almech Castañer A.), Rev. cálculo automát. y cibernet., 1954, **2**, № 6, 20—31 (исп.)

Описывается схема электронного моделирующего устройства, решающего систему из 10 линейных уравнений с 10 неизвестными, по методу минимизации, состоящему в следующем. Решается система $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_j=0$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Полагаем $\tilde{x}_j=-\sum_{i=1}^{n}E_ia_{ij}$, $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\tilde{x}_j-b_j=\varepsilon_i$, а $E_i$ находим из условий $dE_i/dt=k\varepsilon_i$. Тем самым $\tilde{x}_i$ задаются как функции времени $t$, и в пределе имеем $\lim_{t\to+\infty}\tilde{x}_i(t)=x_i$. Библ., 86 назв. Ю. А. Шрейдер

**1727. Расчет неровноты продуктов прядения с помощью электроинтегратора. Севостьянов А. Г.,** Текстильная пром-сть, 1954, № 4, 22—24

Указывается, что с помощью счетно-решающих механизмов можно легко осуществить автоматическое суммирование или интегрирование величин, необходимых при статистической обработке материала испытаний для оценки качества продуктов прядения. Приводится схема электроинтегратора, сконструированного инж. Я. И. Пастернаком для кафедры механиче-

ской технологии волокнистых материалов Московского текстильного ин-та. Электроинтегратор собран на трех панелях: на первой из них находится усилитель, на второй — блок счетчиков, на третьей — выпрямитель с электронным стабилизатором. Электроинтегратор приспособлен к роликовому самопишущему прибору для определения неровноты продукта прядения (равномеру). Для преобразования колебаний рычага в соответствующие изменения силы тока на кронштейне равномера установлен ферромагнитный индуктивный датчик. Изменения силы тока, пропорциональные изменениям толщины пряжи, интегрируются посредством двух электрических счетчиков энергии, из которых один выдает интеграл от переменной величины, а другой — интеграл от квадрата этой переменной. Измерение времени интегрирования осуществляется посредством электромагнитного счетчика времени. Измерение «начальной» толщины, относительно которой ведется интегрирование, производится с помощью вольтметра.

Сообщается, что применение электроинтегратора ускоряет математическую обработку большого числа испытаний при определении неровноты продуктов прядения по их толщине (15 мин. вместо 2 час.), гарантирует большую точность и исключает ошибки при вычислениях.

Г. М. Грязнов

**1728. Универсальная машина для решения дифференциальных уравнений** (Universal differential analyser), Electr. Times, 1953, **124**, № 3228, 523 (англ.)

Дается описание электронного моделирующего устройства, предназначенного для решения задач, связанных с расчетом самолетов, систем автоматического регулирования и пр., изготовляемого фирмой «Шорт» (Short Bros. and Harland Ltd). Машина позволяет решать одновременно три линейных дифференциальных уравнения второго порядка. Для решения более сложных задач предусматривается возможность соединения нескольких машин вместе. См. РЖМат, 1954, 3495.

А. М. Егоров

**1729. Универсальное электронное моделирующее устройство** (A general purpose electronic analogue computer), Engineer, 1953, **196**, № 5096, 395—397 (англ.)

Подробно описывается моделирующее устройство фирмы «Шорт» (Short Brorhers). См. РЖМат, 1954, 3495.

И. Ф. Семикова

**1730. Исследование траекторий электронов методом моделирования. Логан, Уэлти, Спонслер** (Analogue study of electron trajectories. Logan Benjamin F., Welti George R., Sponsler George C.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, **2**, № 1, 28—41 (англ.)

Статья посвящена разработке методов исследования электронных траекторий в электролитических ваннах. Авторы исходят из уравнений движения электрона в электростатическом поле нерелятивистской механики:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{e}{m} E_x(x, y, z, t), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{e}{m} E_y(x, y, z, t),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{e}{m} E_z(x, y, z, t).$$

Если эквипотенциальные поверхности поля являются параллельными цилиндрическими поверхностями или поверхностями вращения и одна ось координат соответственно параллельна поверхностям цилиндров или совмещена с осью вращения, задача приводится к решению двух уравнений:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{e}{m} E_x\Big|_{z=0} \quad \frac{d^2y}{dt^2} \quad \frac{e}{m} E_y\Big|_{z=0}.$$

Описываемое исследование сводится к экспериментальному определению компонент электролитического поля $E_x$ и $E_y$. Опытная установка состоит из электролитической ванны, зонда для измерения двух компонент электрического поля в ванне, усилителя и вычислительной аппаратуры. Электролитическая ванна изготовлена из плексигласа, электродами служит позолоченная бронза, электролит — обыкновенная вода из-под крана. Поле в электролите возбуждалось переменным током. Компоненты поля, являющиеся функцией координат точек поля, замерялись в различных точках зондом. Зонд, состоящий из трех платиновых проволочек, устанавливался так, чтобы две линии, проведенные через концы проволочек, были параллельны осям координат $x$ и $y$. При погружении зонда в электролит разность потенциалов, возникающая между проволочками и соответствующая разности потенциалов электрического поля электролита, замерялась вычислительными приборами Лаборатории динамического контроля и анализа Массачусетского технологического института.

В связи с малым расстоянием между проволочками зонда по сравнению с размерами электролитической ванны ошибки при измерении, обусловленные кривизной поля, были незначительны. Измерения производились при погруженности проволочек зонда под поверхность электролита на 0,75 *мм*. Погружение зонда замерялось вмонтированным микрометром. Установка дает возможность проследить эквипотенциальные поверхности электрического поля.

Главным источником ошибок измерений является понижение уровня воды в ванне ввиду ее испарения. Во избежание этой ошибки, в процессе опыта, время от времени, зонд возвращался в одно из первоначальных положений и опускался до получения первоначальной величины напряжения тока. Градуировка измерительной части прибора производилась с помощью специальной электролитической ванны с концентрическими круговыми цилиндрическими электродами, для каждой точки которой легко вычислить потенциал поля, так как он в данном случае обратно пропорционален радиусу.

Описанный метод определения траекторий электронов был применен для исследования конфигураций ускоряющих электродов в катодных трубках, для чего были изготовлены электролитическая ванна специальной формы и набор ускоряющих электродов. Описанный метод не ограничивается применением к электронной оптике, но может быть распространен на изучение разных полей и других аналогичных задач.

И. А. Козлев

**1731. Электронные вычислительные машины в университете Пердью. Уиллиард** (At Purdue. Electronic computers. Williard Jack), Purdue Engr., 1955, **50**, № 4, 46—47 (англ.)

Сообщение об установке двух моделирующих устройств в университете Пердью для ознакомления студентов, сотрудников университета и научных работников с вычислительными машинами, а также для решения задач. Одна из машин была получена из Массачусетского технологического института в разобранном виде и собиралась и налаживалась студентами. Другое моделирующее устройство было спроектировано фирмой «Гудиир Эркрафт» (Goodyear Aircraft).

В. К. Зейденберг

**1732. Вычислительный центр на базе моделирующих устройств** (Analog-computation center), Mech. Engng, 1954, **76**, № 9, 756—757 (англ.)

Сообщение об открытии вычислительного центра фирмы EAI. Центр оборудован моделирующим устройством, содержащим 96 операционных усилителей.

П. Т.

**1733. Принцип «делайте сами» распространяется на вычислительные машины** («Do-it-yourself» trend spreads to computers), Aviat. Week, 1954, **61**, № 9, 44 (англ.)

Сообщается, что фирма EAI (Electronic Associates, Inc.) обеспечивает решение различных задач на моделирующих устройствах. Клиент может сам закоммутировать задачу на съемной панели. В. С.

**1734. Экономичное использование цифровых вычислительных машин. Ливсли** (The economic use of digital computers. Livesley R. K.), J. Brit. Instn Radio Engrs, 1954, **14**, № 7, 287—291 (англ.)

Рассматриваются факторы, определяющие экономичное использование автоматических цифровых вычислительных машин для решения научных и инженерных задач. Рекомендуется шире использовать готовые подпрограммы. Подчеркивается необходимость изучения широкими кругами инженеров математического аппарата и возможностей автоматических вычислительных машин, так как это рациональнее, чем требовать от программиста при решении каждой новой задачи вникать в физическую сущность ее. В. К. Зейденберг

**1735. Дискуссия о коммерческом и промышленном применении вычислительных машин. Фриз** (Group discussion on commercial and industrial applications of computers. Frese W. F.), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, December 8—10, 123 (англ.)

Сообщение о дискуссии по вопросам развития и применения вычислительных машин. Подвергались обсуждению следующие вопросы: использование вычислительных машин, требования, предъявляемые к точности машин, использование магнитной ленты и перфоленты для ввода и вывода данных; сравнительные преимущества и недостатки построения малых специализированных и больших универсальных машин и т. д. М. П. Сычева

**1736. Компания «Норт Американ Авиэйшн» создает армию специалистов авиационной электроники. Класс** (NAA builds expert avionics team. KlassPhilip), Aviat. Week, 1953, **59**, № 2, 48, 52 (англ.)

Сообщается о конкурентной способности компании «Норт Американ Авиэйшн», занимающейся разработкой управляемых снарядов и авиационного оборудования. Фирма считает, что цифровые счетные машины более удобны для навигационных приборов, чем моделирующие устройства, хотя иногда последние могут оказаться полезными. В некоторых случаях более удобны машины смешанного типа.

Указывается, что фирма ведет усиленные разработки в направлении замены электронных ламп на полупроводниковые элементы, но подходит к этому вопросу с осторожностью. Ведутся также разработки сверхминиатюрной аппаратуры. В. П. Парамонов

**1737. Вычислительные машины, статистика и математика. Роз, Джонсон, Хейни** (Computers, statistics, and mathematics. Rose Arthur, Johnson R. Curtis, Heiny Richard L.), Industr. and Engng Chem., 1955, **47**, № 3, part 2, 626—632 (англ.)

Дается краткий обзор опубликованных за последнее время работ, в которых авторы касаются вопроса использования в технике, в частности в химии, вычислительных машин и различных методов статистики и математики. Обзор дается в форме кратких аннотаций некоторых из этих работ. Полный список опубликованных работ приводится в библиографическом разделе статьи, в количествах по разделам: 1) вычислительные машины — 67 работ, 2) статистические методы — 29 работ, 3) математическая техника — 34 работы. Б. И. Шитиков

**1738. Релейное время-импульсное множительное устройство. Корн, Корн** (Relay time-division multiplier. Korn Granino A., Korn Theresa M.), Rev. Scient. Instrum., 1954, **25**, № 10, 977—982 (англ.)

Представлено описание, теория работы, расчет и результаты испытаний нового дешевого множительного устройства, предназначенного для работы в малых моделирующих устройствах. Схема множительного устройства основывается на принципе образования автоколебаний в системе, состоящей из интегрирующего и релейного звеньев. В качестве интегрирующего звена используется типовой операционный усилитель постоянного тока с емкостной обратной связью, а в качестве релейного звена — обычное поляризованное реле. Частота автоколебаний составляет 50÷100 *гц*. Статическая погрешность перемножения входных величин не превышает 3,5%. Погрешность перемножения достигает 1% при изменении одного из сомножителей по синусоидальному закону с частотой 10 *гц*. Диапазон изменений входных и выходных величин составляет —80÷+80 *в*. Г. М. Петров.

**1739. Электрическое интегрирование и дифференцирование при измерении механических величин. Чемус** (Elektrická integrace a derivace při měření mechanických veličin. Čemus Jiří), Strojírenství, 1954, **4**, № 11, 872—877 (чеш.)

Рассматриваются электрические интегрирующие и дифференцирующие *RC*- и *LR*-контуры, применяемые в схемах измерения механических величин (перемещений, скоростей, ускорений) электрическими методами. Устройства для преобразования механических величин в электрические не рассматриваются. Приводятся частотные характеристики контуров и осциллограммы установившихся колебаний в них при подводе на вход контура периодических возмущений в форме прямоугольной, треугольной и трапецоидальной волны. М. А. Айзерман

**1740. Электрическое интегрирование и дифференцирование при измерении механических величин. Чемус** (Elektrická integrace a derivace při měření mechanických veličin. Čemus Jiří), Strojírenství, 1954, **4**, № 12, 943—949 (чеш.)

Продолжение работы, посвященной электрическим интегрирующим *RC*- и *LR*-контурам (см. реф. 1739). Приводятся схемы усилителей, устанавливаемых за или перед контуром такого рода и выводятся их уравнения. Особо рассматриваются схемы и уравнения усилителя электронного моделирующего устройства Блумлайн — Милерова. Описывается метод приближенного подсчета времени установления процесса для интегрирующего четырехполюсника, простого дифференцирующего *RC*-контура, для интегратора Блумлайн — Милерова и для компенсированного интегратора с обратной связью. Автор считает, что в схемах измерения интегрирующие контуры имеют преимущества по сравнению с дифференцирующими контурами. М. А. Айзерман

**1741. Магнитное запоминающее устройство на барабане с вращающимися головками. Макдоналд** (An inside-out magnetic drum. Macdonald Neil), Computers and Automat., 1955, **4**, № 1, 26 (англ.)

Сообщается о разработке фирмой «Клевит-Браш Девелопмент» (Clevite-Brush Development Co.) модели оригинального барабана. Ряд магнитных головок укреплен на вращающемся барабане. Вращающиеся головки могут записывать, считывать и стирать цифровую информацию на широкой магнитной ленте, охватывающей часть периферии барабана и имеющей длину, равную длине барабана. Передача информации между барабаном и другими узлами вычислительной машины осуществляется через контактные кольца. Для увеличения объема запоминающего устройства магнитную ленту можно передвигать на длину, соответствующую одной секции ленты. Число секций может быть велико

и ограничивается лишь необходимым временем выбора информации из каждой секции. Информация выбирается по трем признакам: по номеру секции магнитной ленты, номеру канала и угловому перемещению барабана.

Разработанная модель имеет ленту шириной 350 *мм* и 128 магнитных головок. На одной секции магнитной ленты хранится 200 000 двоичных цифр. Среднее время выбора одной цифры из секции составляет 25 мсек. Общая емкость запоминающего устройства составляет $100 \cdot 10^6$ двоичных цифр. Приводится схематический чертеж барабана. Л. С. Легезо

**1742. Малогабаритный барабан с малым временем выбора. Тейлор** (A small high-speed magnetic drum. Taylor M. K.), Computers and Automat., 1955, 4, № 1, 18—19 (англ.)

Описан малогабаритный магнитный барабан, установленный на вычислительной машине ФЕРУТ (Ferut) фирмы «Ферранти» (Ferranti), являющийся точной копией барабана типа 200 В фирмы «Ферранти». Диаметр барабана 50 *мм*, длина 25 *мм*. По длине барабана размещается 30 рабочих дорожек. Плотность записи составляет 8 импульсов на 1 *мм*. Всего барабан хранит 24 000 двоичных цифр. На барабане используются специальные малогабаритные магнитные головки. Каждая головка имеет 20 витков. Сопротивление обмотки 0,5 *ом*, индуктивность 8 *мгн*. Головка обеспечивает выходной сигнал 30 *мв* на частоте 400 *кгц*. Необходимый ток записи 1 *а*. Барабан покрыт магнитным порошком, покрытие тщательно полируется и проверяется на однородность. Барабан вращается со скоростью 23 500 об/мин. Время выбора составляет 2,5 мсек. В качестве барабана используется ротор гироскопа, приводимый в движение вращающимся магнитным полем. Статор питается трехфазным напряжением 115 *в* частотой 400 *гц*. Подробно описывается конструкция барабана. Приводится фото барабана. Л. С. Легезо

**1743. Новое запоминающее устройство на ферритовых сердечниках использует импульсные трансформаторы. Папян** (New ferrite-core memory uses pulse transformers. Papian William N.), Electronics, 1955, 28, № 3, 194—197 (англ.)

Описывается запоминающее устройство на ферритовых сердечниках, разработанное в Массачусетском технологическом институте, позволяющее запоминать 4096 двоичных 17-разрядных чисел. Устройство состоит из 17 рамок размерами 250×250×19 *мм*, в каждой из которых размещено по 4096 ферритовых сердечников с внешним диаметром 2 *мм*. Для выборки данных используется принцип совпадения токов. Время обращения составляет около 6 *мксек*. Приводится блок-схема устройства и принципиальная схема возбуждения одной из координатных линий рамки с ферритовыми сердечниками. Указывается, что переход от непосредственного возбуждения ферритовых сердечников к возбуждению через импульсный трансформатор с коэффициентом трансформации 3:1 позволил применить в качестве координатной линии только один провод. Это свело взаимную индуктивность координат $x$ и $y$ до минимума. Диагональная обмотка считывания выполнена так, что сигналы с наполовину возбужденных колец направлены попарно навстречу и взаимно компенсируются. При этом получается вполне приемлемое отношение амплитуды полезного сигнала к амплитуде помехи, без обращения к технике интегрирования. В дальнейшем предполагается сокращение числа ламп в устройстве за счет усовершенствования схемы управления и за счет применения каскадного принципа в схеме выборки данных. Предполагается на той же основе создать устройство емкостью в 65 536 ячеек, с числом ламп, только в три раза превосходящим число ламп описанного выше устройства, и с тем же числом ламп, если удастся использовать для возбуждения ферритовых сердечников матричные переключатели на магнитных кольцах. Б. И. Шитиков

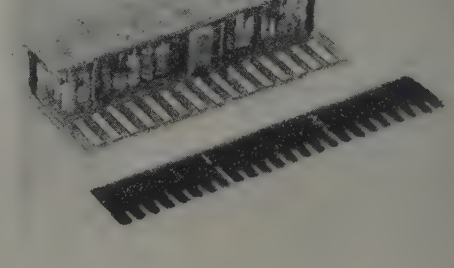
**1744. Запоминающая трубка большой емкости для использования в вычислительных машинах. Делано** (A large capacity storage tube for digital computer applications. DeLano R. B., Jr), Convent. Rec. I. R. E., 1954, 3, 125—130 (англ.)

Описывается электроннолучевая трубка новой конструкции, разработанная фирмой ИБМ, позволяющая запоминать при коэффициенте повторных обращений 2000 до 3000 двоичных цифр и до 10 000 цифр при коэффициенте обращений менее 100. Трубка относится к классу трубок с металлической сеткой на поверхности экрана и коллекторной сеткой вблизи него. Сетка экрана выполнена из вольфрамовой проволоки диаметром 0,01 *мм*, размер ячейки 0,083 ×0,083 *мм*. Обратная сторона экрана покрыта металлом путем распыления и служит вспомогательным электродом. Расстояние между сетками 0,25 *мм*. Такая конструкция трубки препятствует вторичному перераспределению заряда на поверхности экрана, что позволяет производить более плотную запись и большее число обращений к данной точке экрана без нарушения состояния экрана в соседних точках.

Приводится эскиз конструкции экрана и ряд графиков, на которых сравниваются характеристики работы данной и обычных трубок. Описываются методика считывания и записи, работа усилителя и вспомогательного оборудования для всесторонних испытаний трубок. Б. И. Шитиков

**1745. Что дает наука электронике? Боун** (What is science doing to electronics? Bown Ralph), Bell Telephone Mag., 1954, 33, № 1, 27—34 (англ.)

Популярно описывается метод зональной плавки, позволяющий получить чистый германий с содержанием примесей, пониженным примерно до $10^{-9}$. Перечисляются миниатюрные радиодетали, разработанные на основе изучения физики твердого тела, — полупроводниковые триоды, ферритовые сердечники, конденсаторы со слоем распыленного цинка, нанесенного на поверхность бумаги, и конденсаторы из двуокиси марганца и тантала, имеющие мелкопористую структуру и потому очень большую поверхность, — а следовательно, и емкость — при малом объеме. Указывается на возможность замены полупроводниковыми элементами реле



К реф. 1745

в телефонии и электровакуумных ламп в вычислительных машинах. Приводится фотография субминиатюрного блока запоминающего устройства цифровой вычислительной машины, построенного с применением печатных схем и содержащего 1 полупроводниковый триод, 23 диода, 9 сопротивлений, 7 керамических конденсаторов (см. фото; деление масштабной линейки в дюймах). А. Б.

**1746. Запоминающие устройства вычислительных машин. Рейденаур** (Computer memories. Ridenour Louis N.), Scient. Amer., 1955, **192**, № 6, 92—96, 98, 100 (англ.)

В популярной форме излагаются общие принципы работы запоминающих устройств различных типов. Приводятся краткие сведения о разрабатываемых запоминающих устройствах на ферритовых сердечниках и на ферроэлектриках. Б. И. Шитиков

**1747. Преобразователь двоичных чисел в угловое перемещение вала. Вулфсберг** (Binary control system for digital-to-shaft position mechanisms. Wulfsberg Arthur H.), Convent. Rec. I. R. E., 1954, **5**, 187—192 (англ.)

Описывается электромеханический преобразователь 8-значных двоичных чисел в угловое перемещение вала. Команда с перфокарты отрабатывается за 0,1—1,5 сек. в зависимости от разности угловых положений при старой и новой командах. Преобразователь использовался для дистанционной подстройки частоты генераторов в самолетной аппаратуре связи и навигации. С. Е. Жорно

**1748. Преобразователь углового положения в цифровую форму** (Angle-to-digits converter), Instruments, 1953, **26**, № 5, 682 (англ.)

Сообщение фирмы «Джианнини» (G. M. Giannini and Co.) о выпуске шифратора углового положения, который указывает угловое положение вала с точностью до 0,1% при скорости вращения вала до 100 об/мин. Прибор может быть связан непосредственно с электромеханическим печатающим устройством или перфоратором. В. К. Зейденберг

**1749. Преобразователь углового положения в цифровую форму** (Angle-to-digits converter), Instruments, 1953, **26**, № 5, 682 (англ.)

Сообщение фирмы «Дженискo» (Genisco Inc.) о выпуске преобразователя углового положения вала в цифровую форму. Прибор может работать как на увеличение показаний, так и на уменьшение, т. е. накопленная сумма может менять знак. Каждый блок преобразователя имеет размер 38×38×57 *мм*. Скорость выдачи показаний 250 чисел в 1 сек. В. К. Зейденберг

**1750. Электронное контролирующее устройство, обеспечивающее управление на расстоянии вычислительными операциями** (Electronic control device provides remote control computer operation), Electr. Engng, 1953, **72**, № 4, 293 (англ.)

Сообщение фирмы «Гудиир Эркрафт» (Goodyear Aircraft Corp.) о выпуске шестиканального вычерчивателя кривых типа R5 GEDA. Устройство осуществляет не только контроль, но и управление моделирующим устройством, т. е. оператор может изменить начальные условия и коэффициенты с помощью потенциометров, установленных на вычерчивателе. П. Н. Куприянчик

**1751. Первая недорогая система преобразования данных** (Telecomputing announces: the first low-cost data reduction system), Scient. Amer., 1953, **189**, № 4, 18, 19 (англ.)

Сообщение фирмы «Телекомпьютинг» (Telecomputing Corp.) о выпуске недорогой (5555 долларов) системы преобразования данных (date reduction system), состоящей из трех частей:

1) Контактное телесчитывающее устройство измеряет осциллограммы и другие графики. Оперирует с листовыми и рулонными записями любой длины и шириной не свыше 457 *мм*. Выполняет линейную или нелинейную градуировку. Точность одного отсчета до 0,25 *мм*, скорость до 40 измерений в 1 мин. Устройство может работать и независимо от системы, но при этом снятие отсчетов производится вручную.

2) Второе устройство преобразовывает снятые первым устройством отсчеты в цифровую форму. Может быть использовано независимо как лабораторный цифровой вольтметр с точностью 0,1%, а также как преобразователь в цифровую форму выходных данных датчика деформаций или термопары без усиления по постоянному току. Минимальная шкала 10 *мв* (10 *μв* на отсчет), максимальная 1 *в* без внешнего аттенюатора.

3) Электрическая пишущая машинка и блок программного управления, который переводит цифровые данные из параллельной формы в последовательную для печати на машинке. Вывод может быть также осуществлен на перфокарты или перфоленту.

Фирма, кроме того, сообщает о том, что она принимает заказы на выполнение вычислительных работ по преобразованию данных. В. К. Зейденберг

**1752. Пересчетные схемы на лампах с холодным катодом. Фут** (Cold-cathode counting circuits. Foote H. L.), Commun. and Electronics, 1955, № 18, 161—164 (англ.)

Предлагается, при разработке пересчетных схем на частоту повторения импульсов не более 700 *гц*, использовать лампы с холодным катодом, имеющие преимущества перед электронными лампами: отсутствие подогрева катода, меньший расход энергии и большой срок службы, измеряемый в основном числом переключений (до 250 000 000 переключений).

Описывается ряд пересчетных схем, выполненных на газоразрядной лампе 5823 фирмы RCA. Лампа имеет три электрода: анод, катод и стартовый анод. Потенциалы зажигания разряда между стартовым анодом и катодом 75 *в*. После ионизации промежутка стартовый анод — катод разряд переходит на промежуток главный анод—катод и стартовый анод перестает управлять разрядом. Скорость работы подобных приборов определяется временем ионизации и деионизации газа-наполнителя. В описываемом приборе время ионизации составляет около 20 μсек и время деионизации 500 μсек. Приведены принципиальные схемы пересчета на 10 и на 2. Б. И. Шитиков

**1753. Надежность электронных ламп в военном оборудовании. Джар** (Reliability of electron tubes in military applications. Jahr E. F.), Convent. Rec. I. R. E., 1953, part 6, 101—105 (англ.)

Исследование электронных ламп, которые вышли из строя в военном оборудовании, позволило установить основные причины выхода ламп из строя, а также разработать рекомендации по увеличению надежности их.

Методика исследования заключалась в следующем: а) под наблюдение были взяты лампы, работающие в военном оборудовании восьми военных баз (две морские, три авиационные и три армейские, в Америке и Европе); б) каждая из снимаемых с эксплуатации ламп укладывается в специальный конверт, на котором делаются соответствующие записи; в) параметры изымаемых на базе ламп измеряются с помощью испытателя ламп определенного типа; результаты измерений записываются на конверте; г) данные о лампах и оборудовании, из которого они изъяты, пробиваются на перфокартах и табулируются по соответствующим признакам; д) информация об условиях работы, сроке службы и причинах выхода из строя лампы анализируется с помощью таблиц и диаграмм.

Результаты исследования следующие: распределение ламп, снятых с самолетов, кораблей, стационарных и подвижных наземных установок, по причинам выхода из строя (механические или электрические) показало сильное влияние условий эксплуатации. Сопоставление срока службы однотипных ламп в радиолокационных станциях различных типов позволило выявить неудачное конструктивное решение некоторых узлов станций. Сопостав-

ление надежности ламп различных типов, работающих в однотипных устройствах военного оборудования, позволило выявить типы ламп, имеющие дефектную технологию изготовления. Установлено, что в течение первых 20—50 часов работы выходит из строя до 15% установленных ламп. Затем выход ламп из строя становится постоянным и составляет в среднем около 0,6% на 100 час. работы. Надежность генераторных ламп в общем случае оказывается ниже, чем приемных. В. А. Зимин

**1754. Компания «РЭТМА» помогает конференции 1950 г. по вычислительным машинам. Отчет о проведенной работе.** Бригс (The RETMA support of the 1950 Computer Conference — A progress report. Briggs Thomas H.), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, December, 8—10 (англ.)

Сообщается о подготовке стандартов по радиолампам для вычислительных машин. В. К.

**1755. Новое в пластмассовой технике.** Шарп (It adds up to plastics. Sharp Thomas A.), Mod. Plast., 1954, **31**, № 12, 110—111, 212, 216 (англ.)

Фирма «Ремингтон Ранд» (Remington Rand) изготовляет отдельные детали счетных машин из нейлоновой пластмассы методом формования с введением металлических деталей. Это повышает производительность, точность сборки, обеспечивает надежную изоляцию. Так, чувствительный элемент для чтения перфокарт («книга») содержит $90 \times 6 = 540$ щупов-контактов. «Книга» набирается из 45 одинаковых пластин, форма которых обеспечивает правильную сборку. На пластине чувствительный канал: щуп, пружина, плунжер и переключатель контактов — расположен в линию. Метод формовки из нейлона обеспечивает необходимую точность расположения контактов, изоляцию и экономию места. В. К. Зейденберг

**1756. Конкуренты кристаллических триодов: магнисторы** (Rival of transistors: magnistors), Amer. Aviat., 1955, **18**, № 22, 77 (англ.)

Сообщение фирмы «Поттер Инструмент» (Potter Instrument Co., Inc) о разработке нового феррокерамического элемента — магнистора, обладающего характеристиками электронных ламп и надежностью, свойственной магнитным цепям. Различаются два типа магнисторов: магнисторы с переходными характеристиками, используемые для усиления синусоидальных колебаний от 100 *кгц* до 10 *Мгц* или импульсов с частотой повторения от 0 до 10 *Мгц*, и магнисторы с устойчивыми характеристиками, используемые как запоминающие элементы с двумя устойчивыми состояниями, позволяющие вести считывание без нарушения состояния магнистора, причем мощность сигнала в обмотке считывания составляет несколько ватт. Приводится фотография элемента. Б. И. Шитиков

**1757. Схемы на полупроводниковых триодах для моделирующих устройств.** Хеллерман (Some transistor building blocks for analogue computers. Hellerman H.), Commun. and Electronics, 1954, Sept., 410—413 (англ.)

Статья посвящена анализу работы усилителей в моделирующих устройствах. Приведен вывод коэффициентов усиления и входных и выходных импедансов. Рассмотрены проблемы, возникающие при замене электронных ламп на полупроводниковые триоды. Автор считает, что при замене имеет смысл использовать схемы, в которых зависимой переменной является ток, а не напряжение. В. С.

**1758. Запоминающие элементы** (Storage elements), Tele-Tech, 1954, **13**, № 5, 95 (англ.)

Сообщение фирмы «Эпско» (Epsco, Inc.) о выпуске опрессованных магнитных элементов модель SR-200, которые могут быть использованы в качестве запоминающих элементов, регистров со сдвигом, элементов управления. В приборе используется один магнитный сердечник на разряд; предельная частота работы 350 *кгц*; номинальный ток сдвига 300 *ма*; ширина импульса сдвига от 0,5 до 1,5 *мсек.*; амплитуда выходного импульса 15 *в*. Модель имеет размеры $14 \times 41 \times 48$ *мм*. В. К. Зейденберг

**1759. Электромагнитное реле с устраненной индуктивной связью между обмотками.** Облонский (Elektromagnetické relé s potlačenou induktivní vazbou mezi vinutími. Oblonský Jan), Sbor. Českosl. akad. věd. Lab. mat. strojů, 1954, № 2, 261—270 (чеш.; резюме русс., англ.)

Описывается новое электромагнитное реле для релейно-контактных схем, управляемых по методу А. Свободы (Antonín Svoboda). Такие схемы применимы в машинах для обработки информации. Реле в этих схемах имеют по две обмотки: рабочую и запирающую (блокирующую) — и питаются четырьмя сериями импульсов, вырабатываемыми в центральном генераторе. Запирающие обмотки присоединены через собственные контакты реле непосредственно к генератору импульсов. Наличие индуктивной связи между рабочей и запирающей обмоткой в реле обычной конструкции может вызвать ложное неотпускание или срабатывание реле в случае параллельно включенных рабочих обмоток нескольких реле. Существует четыре способа устранения этих ошибок: 1) снижение частоты, на которой работает генератор; 2) включение ограничительных сопротивлений в цепи обмоток; 3) отказ от схемных конфигураций, вызывающих ошибки; 4) применение реле без индуктивной связи между обмотками. Наиболее перспективен способ 4. Здесь возможны разные конструкции реле, основанные на разделении магнитных потоков обеих обмоток и разделении обмоток на секции, включенные так, чтобы взаимно компенсировались напряжения, индуктированные в секциях одной обмотки при изменении тока в другой обмотке. Некоторые такие конструкции описаны ранее (Oblonský J., Čs. pat. přihl. PV321—52). Приводится конструкция нового реле. Отмечается, что по сравнению с обычным реле новое реле без индуктивной связи требует большего времени для нарастания тока в запирающей обмотке. Сообщается о лабораторных испытаниях новых реле и приводятся две таблицы результатов полученных при этом измерений. В частности, при напряжении 36 *в* отдельное обычное реле надежно работает с импульсами не уже 6,6 мсек., но при опасных схемных конфигурациях минимальная ширина импульсов возрастает до 9,5 мсек. при наличии ограничительных сопротивлений и до 28 мсек. без них. При тех же 36 *в* новое реле во всех случаях надежно работает при импульсах в 7,6 мсек. Автор приходит к выводу, что новые реле лучше обычных. Г. Н. Поваров

**1760. Анализатор переходных процессов для магнитных усилителей.** Смит (A transient analyzer for magnetic amplifiers. Smith E. J.), Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs, 1953, **72**, part 1, 461—465 (англ.)

Измерение производится путем подсчета количества импульсов, число которых равно времени установления в периодах питающего напряжения. Прибор пригоден для исследования сравнительно мощных усилителей, работающих от источника 60 *гц* с напряжением 10 *в*. Приведена подробная схема прибора и спецификация используемых деталей. О. В. Росницкий

**1761. Магнитная запись.** Камрас (Magnetic recording. Camras Marvin), Tele-Tech, 1953, **12**, № 9, 81—83, 122, 124—125, 127, 128, 132, 134, 136 (англ.)

Рассматриваются принципы записи звука на магнитных материалах. Подробно разбираются различные способы уменьшения искажений при записи (подача в головку постоянного смещения, высокочастотного

смещения, улучшение характеристик покрытия и т. д.). Рассматриваются вопросы, связанные с конструкцией записывающих головок, с проблемой стирания. Приводятся характеристики наиболее употребительных магнитных лент и проволок. Б. И. Шитиков

**1762. Исследование магнитной записи. Вестмейзе** (Studies of magnetic recording. Westmijze W. K.), Philips Res. Repts, 1953, **8**, № 2, 148—157; № 3, 161—183; № 4, 245—269; № 5, 343—366 (англ.) См. РЖФиз, 1955, 1367, 20207—20209.

**1763. Список организаций, изготовляющих ферриты. Информация по состоянию на 10 февраля 1954 г.** (Roster of organizations making ferrites. Information as of Febr. 10, 1954), Computers and Automat., 1954, **3**, № 3, 16 (англ.)

Приводится список организаций, изготовляющих ферриты. В список включено 15 организаций США и 1 организация Англии.

**1764. Проект «Тинкертой»— шаг по направлению к автоматической фабрике. Меррей** (Projekt «Tinkertoy» — step toward the automatic factory. Murray Albert F.), Tele-Tech, 1953, **12**, № 11, 70—72, 132—134, 136 (англ.)

В течение трех лет Национальное бюро стандартов США (National Bureau of Standards) разработало проект автоматического производства электронных узлов для Авиационного бюро военно-морского ведомства (Navy Bureau of Aeronautics) (РЖМат, 1954, 5336; 1955, 496). Основными задачами при выполнении проекта являлись приспособление производимой аппаратуры к автоматическому производству и конструирование соответствующего оборудования.

В основу конструкций электронной аппаратуры положены керамические платы, размером 5,5 $см^2$ и толщиной 15 *мм*, с печатными схемами, в которые впаиваются также автоматически изготавливаемые детали. На каждой плате может быть смонтировано до 6 деталей. Платы с печатными схемами и впаянными деталями скрепляются проволочками, которые впаиваются в металлизированные вырезы плат. Ряд таких сборок может быть автоматически смонтирован в более крупный блок. В сборке могут быть применены и детали, производимые не автоматически, такие, как тороиды, кристаллические диоды и т. д. Печатание схем производится продавливанием серебряной краски через шаблон из нержавеющей стали с последующим обжигом плат.

В процессе производства на каждой операции 100 % деталей подвергаются контролю. Параметры электрических деталей контролируются при помощи вычислительных устройств, мостиков и т. д. О появлении одной или более бракованных деталей сигнализируется на пульт управления. Переход от контроля одного вида плат к другому производится при помощи смены перфокарт, управляющих производственным процессом. Конструирование и изготовление автоматического оборудования производится отделением фирмы «Виллис Мотор» (Kaiser Electronics Division of Willys Motor Comp.). Приведены общая схема завода и фотографии производственного оборудования и производимых деталей и узлов. В. Д. Князев

**1765. Доклад о производстве методом «Тинкертой»** (Report on Tinkertoy production techniques), Amer. Aviat., 1953, **17**, № 11, 40—44 (англ.)

Описана технология изготовления электронных схем машинным способом. Технология разработана Национальным бюро стандартов для изготовления авиационного электронного оборудования. Приведены фотографии отдельных этапов обработки изделий и схема производственных поточных линий. См. также РЖМат, 1954, 5336; 1955, 496; 1956, 1764. В. А. Зимин

**1766. Германиевый диод «с положительным пространством». Новое средство для импульсной техники. Ривс** (Diode au germanium «à espare positif». Nouvel outil pour la technique des impulsions. Reeves A. H.), Onde électr., 1954, **34**, № 322, 32—37 (франц.)

При изучении свойств и электрическом формировании характеристик обыкновенных германиевых диодов было обнаружено, что отдельные диоды обладали характеристикой, некоторая часть которой соответствует наличию отрицательного сопротивления в прямом направлении. Они названы диодами «с положительным пространством».

Проволочный токосъемный электрод был выполнен из серебра с небольшими примесями типа *n* (например, мышьяк) и находился в соприкосновении с поверхностью германия типа *n*, полученного нормальными способами. Электрическая формовка производилась путем пропускания импульсов постоянного или переменного тока повышенной величины (1÷5*а*) в течение нескольких секунд, до получения необходимой формы характеристик на экране осциллографа. Характеристика приобретала S-образный вид. При соответствующих нагрузках и напряжениях схема на таких диодах имеет две точки устойчивого и одну неустойчивого равновесия. При этом перепад по напряжению составляет несколько вольт, а по току 40 *ма* и более. Возможными применениями диодов с подобными характеристиками являются следующие:

1) Генерация коротких импульсов. Приведены сведения о получении импульсов с частотой повторения 20 *Мгц* при длительностях нарастания и спада не более 0,01 *мсек*. Кроме того, можно построить схемы для получения колебаний с частотой порядка 300 *Мгц* при мощности в несколько милливатт.

2) Апериодическая схема с двумя устойчивыми положениями. Сообщается, что подобная схема работала на частотах до 53 *Мгц*.

3) Электронное реле с автоматическим возвратом и регулируемым временем обратного срабатывания.

4) Двоичный апериодический счетчик. Указано, что некоторые образцы обеспечивали подсчет импульсов на частоте 15 *Мгц*. Е. И. Мамонов

**1767. Работа точечно-контактных полупроводниковых триодов *p*-типа на высоких частотах. Хантер, Слейд** (High-frequency operation of *p*-type point contact transistors. Hunter F. L., Slade B. N.), RCA Rev., 1954, **15**, № 1, 121—134 (англ).

Поскольку в германии *p*-типа неосновные носители имеют большую подвижность, чем в германии *n*-типа, то полупроводниковые триоды, изготовленные из первого, могут работать при бо́льших частотах. Однако выпрямляющие свойства точечного контакта на германии *p*-типа хуже, что осложняет изготовление хорошего коллектора, но применение подходящей формовки позволяет изготовить достаточно хорошие приборы. Приводятся результаты исследования зависимости характеристики полупроводникового триода от диаметра острия контакта. Приводится сравнение параметров триодов, изготовленных из *p*- и *n*-типов германия, работающих как усилители или генераторы колебаний. Температурные зависимости примерно одинаковы. Средний коэффициент усиления по току в *p*-типе 2,0, в *n*-типе 2,8. Предельная частота в *p*-типе 60 *Мгц*, в *n*-типе 30 *Мгц*. При работе триода как генератора колебаний достигнута предельная частота колебаний — в *n*-типе 302 *Мгц*, а в *p*-типе 425 *Мгц*. Средние частоты 112 и 149 *Мгц*, а сопротивление обратной связи 400 и 250 *ом* соответственно. В. С.

**1768. Применение полупроводниковых триодов при аварийных режимах** (Transistors to the rescue), Aviat Week, 1954, **61**, № 1, 54 (англ.)

Сообщение фирмы RCA о разработке сменного блока усилителя на двух полупроводниковых триодах типа 2N34, снабженного ртутной батареей, дающей пита-

ние в течение 20 часов непрерывной работы. Блок предназначен для использования на самолетах в установках типа AIC-10 при выходе из строя источника питания. М. П. Сычева

**1769. Характеристики насыщенных диодов типа 29CI.** **Атри** (Characteristics of the temperature-limited diode type 29CI. Attree V. H.), Electronic Engng, 1954, 26, № 311, 42 (англ.)

Предлагается оценивать срок службы вакуумных диодов процентным изменением напряжения накала, необходимым для поддержания эмиссионного тока постоянным. Практически после 1000 часов работы напряжение накала приходится менять на 1,3÷2,0%. Дрейф тока накала получается значительно меньшим. При малой величине эмиссии после 1000 часов работы ток накала приходится менять на 0,2%. Для получения лучшей стабильности предлагается питать накалы ламп через большое сопротивление, включенное последовательно, для поддержания постоянного тока, а токи эмиссии выбирать малыми. А. Н. Зимарев

**1770. Электронные процессы в контактах и полупроводниковые триоды с точечным контактом. Нейдтхарт** (Kontaktelektronik und Spitzentransistoren. Neidthart Herbert), Radiotechnik, 1954, 30, № 5, 157—162 (нем.)

В популярной форме рассматривается механизм проводимости некоторых контактных соединений: двух металлов, металла и полупроводника и двух полупроводников, а также контактное выпрямление и процессы, происходящие в полупроводниковых триодах. Указывается, что свойства изготовленных полупроводниковых триодов могут быть улучшены путем формирования характеристик. Г. В. Шустарева

**1771. Кристаллический триод величиной с наперсток** (Thimble-size transistor), Mech. Engng, 1954, 76, № 1, 38—39 (англ.)

Сообщение фирмы «Миннеаполис-Хонейвелл» (Minneapolis-Honeywell Regulator Co.) о кристаллическом триоде, обеспечивающем выходную мощность 20 *вт*. Новый кристаллический триод может быть использован для управления реле, моторами и т. п. Главной трудностью, разрешенной при разработке триода, было обеспечить рассеивание мощности, выделяемой в коллекторном переходе. А. Б. Залкинд

**1772. Экспериментальный полупроводниковый триод** (Experimental transistor), Radio-Electronic Engng Sec., 1954, May, 26 (англ.)

Сообщение фирмы «Транзистор Продуктс» (Transistor Products, Inc.) о выпуске полупроводникового триода X78 типа *p-n-p* с поверхностным барьером. Триод обеспечивает усиление по мощности 10 *дб*. Приведена фотография триода. Л. В. Кутуков

**1773. Полупроводниковые триоды ОС70, ОС71 с поверхностным барьером** (Flächentransistoren OC 70, OC 71), Radio Mentor, 1954, 20, № 6, 314 (нем.).

Приведены параметры полупроводниковых триодов с поверхностным барьером ОС 70 и ОС 71, выпускаемых фирмой «Вальво» (Valvo). Л. В. Кутуков

**1774. Полупроводниковые триоды** (Transistors), Electr. Rev., 1954, 154, № 26, 1197 (англ.).

Сообщение о выпуске фирмой «Дженерал Электрик» (General Electric Co.) германиевых триодов $GET_1$ и $GET_2$. Приведены некоторые параметры триодов. Указывается, что триоды этих типов могут быть легко изготовлены в домашних условиях. Л. В. Кутуков

**1775. О новых кристаллических диодах** (Es tut sich was bei Kristalloden), Radio-Mag. mit Fernseh-Mag., 1954, 30, № 5, 132—133 (нем.).

Сообщение фирмы SAF о выпуске германиевых плоскостных диодов для выпрямления сетевого переменного напряжения Диоды работают при обратных напряжениях 100, 200, 300 и 400 *в* соответственно. Длина выпрямителя 12 *мм*, наружный диаметр 6 *мм*. Для всех четырех типов выпрямителей DF-451, DF-452, DF-453, DF-454, при 25° и напряжении +0,5 *в* ток составляет более 200 *ма*, пиковое значение тока 1 *а*, среднее значение выпрямленного тока 300 *ма*, обратный ток при максимальном запирающем напряжении менее 100 *μа*. Максимальная рабочая температура равна 60°. Для прямого напряжения 0,6÷0,7 *в* пропускаемый ток достигает 1 *а*. Соотношение прямого и обратного сопротивлений 1 : 4 000 000. Приведены характеристики выпрямителей при комнатной температуре и таблицы зависимости прямого и обратного токов от температуры. Г. В. Шустарева

**1776. АРЧ для усилителей на полупроводниковых триодах** (AGC for transistor amplifiers), Electronics, 1954, 27, № 1, 224, 226, 228 (англ.)

Описывается способ регулирования усиления усилителей на полупроводниковых триодах с помощью изменения сопротивления эмиттера. Указывается, что с достаточной для практики степенью точности можно считать сопротивление эмиттера обратно пропорциональным току эмиттера. Приведены схемы для изменения динамического диапазона усилителя низкой частоты на полупроводниковых триодах. Л. В. Кутуков

**1777. О полупроводниковых триодах** (Transistor topics), Short Wave Mag., 1954, 12, № 4, 219—221 (англ.)

Сообщение о работе передатчиков на полупроводниковых триодах различных типов. С помощью таких передатчиков была осуществлена связь на 200 *км*. Л. В. Кутуков

**1778. Передатчики на полупроводниковых триодах. Осборн** (Transmission with transistors. Osborne J. M.), Short Wave Mag., 1954, 12, № 1, 10—15 (англ.)

Описывается применение самодельного полупроводникового триода в различных схемах радиолюбительского передатчика. Л. В. Кутуков

**1779. Третий тип полупроводникового триода** (Eine dritte Transistorart), Elektron (Linz), 1954, № 3, 79 (нем.)

Общие сведения о триоде с поверхностным барьером и способе его изготовления. Предполагается, что этот тип триода найдет применение в электронных счетных машинах и сверхминиатюрных радиоприемниках. Л. В. Кутуков

**1780. Конвейерная сортировка** (Conveyer-belt sorter), Mech. Engng, 1954, 76, № 3, 270 (англ.)

Приводится описание машины, сконструированной Национальным бюро стандартов (N. B. S.), для сортировки перфокарт или таких предметов, как чеки, письма и др., работающей со скоростью 420 карт в 1 мин.

В сортировке восприятие признаков карт производится одним считывающим устройством, после чего карты перемещаются по конвейеру одновременно с механическим элементом, фиксирующим адрес соответствующего данному признаку приемного кармана. При достижении картой этого кармана срабатывает электромеханическое приемное устройство и карта укладывается в карман. Сортировка состоит из считывающего устройства, механических фиксаторов адресов, конвейерной ленты, дешифраторных приемных устройств, сортировальных карманов. В качестве механических элементов, фиксирующих адреса, применяются кулачки. На каждой планке, соединяющей звенья двух движущихся цепей конвейера, укреплено по 8 кулачков. Каждый кулачок имеет два положения: одно соответствует двоичной «1», а другое — «0». Восемь кулачков могут зафиксировать $2^8$ различных адресов, выраженных двоичным кодом, что соответствует 256 различным признакам, по которым могут сортироваться предметы. При сортировке карт пробивки прощупываются 80-щеточным блоком и при помощи электромеханиче-

ского устройства кулачки устанавливаются в положения, соответствующие пробитому на картах коду. Основным преимуществом сортировальной машины N.B.S. является возможность сортировки предметов по большому количеству признаков при помощи одного считывающего устройства.

Машина N. B. S. может применяться также для сортировки писем или пакетов. Б. М. Полыковская

**1781. Обработка данных испытаний реактивных моторов при помощи вычислительных машин фирмы ИБМ. Бейли, Читем** (Reduction of rocket motor performance data by means of IBM computing machines. Beighley C. M., Cheatham T. E.), J. Amer. Rocket, 1953, **23**, № 3, 150—154 (англ.)

Описывается метод обработки результатов испытаний реактивных моторов на комплекте счетно-аналитических машин фирмы ИБМ. В комплект входили множительный перфоратор типа 602, сортировка типа 080, репродуктор типа 513, табулятор типа 405, перфоратор типа 517. Работы были проведены в университете Пердью. Д. П. Гроссман

**1782. Применение вычислительных методов электронных машин в машинах, работающих на перфокартах. Лукас** (The application of electronic digital calculatingmethods to punched card machines. Lucas J. H.), J. Brit. Instn Radio Engrs, 1954, **14**, № 10, 497—503 (англ.)

Описывается применение вычислительных методов электронных машин в вычислительных перфораторах. Приводятся общие принципы работы последних и упрощенные блок-схемы двух моделей с очень кратким объяснением их работы. Далее рассматриваются отдельные электрические схемы. Приведены схема триггера и блок-схема десятичного счетчика с объяснением их работы. Счетчик может быть очень просто переделан для счета до 12 и 16 путем включения схемы совпадения между соответствующими каскадами счетчика. В целях экономии в схемах вычислительных перфораторов отдается предпочтение селеновым диодам перед германиевыми и вакуумными. В конце статьи дается принцип работы механического дешифратора для перевода двоичного кода в десятичный. В. И. Мараховский

**1783. Составление сводных периодических отчетов с помощью счетных машин. Брызгалин Н. Ф., Галузевский Г. Н.** В сб.: Механизация учета, М., Госстатиздат, 1954, 20—47

Приводится опыт использования счетно-клавишных машин (фактурных, бухгалтерских и суммирующих с широкой кареткой) для заполнения и подсчета макетов сводных отчетных форм на машиносчетной станции Министерства нефтяной промышленности. На фактурной трехсчетчиковой машине ФМСР-III при наличии сменных шин управления можно выполнять, помимо выписки счетов-фактур, всевозможные счетно-текстовые работы, например составление макетов балансов одновременно по двум графам: «на начало года» и «на конец года». Приводятся практические указания на ведение механизированной сводки балансов. В зависимости от формы баланса и степени его заполняемости и значности чисел оператор затрачивает на запись в макет одного баланса с подсчетом от 20 до 60 мин. Фактурная шестисчетчиковая машина также используется для сводки отчетов путем перестройки шины управления на вертикальное сложение по шести графам (приводится схема настройки). Если количество сводимых граф менее шести, то используется необходимое количество счетчиков.

На бухгалтерской машине модели СР-22 сводятся «численность и заработная плата персонала» и «финансовые донесения». Обе модели фактурных машин и бухгалтерская машина не только обеспечивают постепенную запись отчетов в сводку, но и выполняют вполне законченную работу по уже поступившим отчетам, с постепенной проверкой правильности разноски; позволяют печатать несколько отчетов под копирку.

Суммирующие машины с широкой кареткой используются на сводной работе по подсчету данных с одновременной записью результатов. На этих машинах моделей АЕСВе-33 и СДУ-138 освоено составление всех месячных и квартальных форм как по основному, так и по капитальному строительству. Приводятся макеты различных форм периодической отчетности и указываются методы их заполнения. А. С. Вавилова

**1784. Организация механизированного учета материальных ценностей. Абанин А. М.** В сб.: Механизация учета, М., Госстатиздат, 1954, 3—19

Краткий обзор опытной разработки механизации учета материальных ценностей, проведенной на ленинградском заводе «Красный выборжец». Механизированной обработкой охватывались движение материальных ценностей, учет заготовки материалов и отклонений от плановых цен, учет и отчетность по реализации материалов на сторону, оперативная отчетность. Шифр номенклатуры на материальные ценности, производственные и другие расходы построен таким образом, что на счетно-перфорационных машинах можно автоматически получить итоги по наименованиям, маркам, сортам и размерам материалов и по группе материалов с накоплением итогов по материальным балансовым счетам или по заказам и цехам-заказчикам с накоплением итогов по направлениям расходов. Приводятся формы сортовых карточек учета, порядок их оформления на складе и контроля со стороны бухгалтерии. Для заготовки перфокарт на основании первичных документов принят единый макет перфокарты, в определенных колонках которой пробиваются установленные показатели.

Контрольная табуляграмма печатается с показаниями каждой перфокарты с итогами по пачкам. На основании табуляграммы «поступления и отпуска материалов» бухгалтерия может списывать и начислять стоимость материалов на соответствующие балансы заказчиков. По табуляграмме на отпуск материалов на сторону бухгалтерия ведет учет отгруженных материальных ценностей. Приводятся различные схемы применяющихся табуляграмм, квартальных отчетов и оборотных ведомостей по заводу. А. С. Вавилова

**1785. Аналитический метод выверки пантографа. Найт** (An analytical method for the calibration of a variable ratio pantograph. Knight Albert S., Jr.), Photogramm. Engng, 1955, **21**, № 1, 124—127 (англ.)

Выведены элементарные формулы, устанавливающие связь между положениями ведущей и ведомой точек основного параллелограммного пантографа, при некоторых отклонениях размеров отдельных звеньев от теоретически точных размеров, без каких бы то ни было ссылок на общую теорию точности механизмов.

Описан практический метод калибровки пантографа, основанный на данных формулах и позволяющий, по утверждению автора, добиться того, чтобы погрешность прибора на выходе не превышала некоторой наперед заданной величины, например 0,1 *мм*. А. Б. Штыкан

**1786. Прецизионный прямоугольный координатограф «Симпа». Грело** (Le coordinatographe rectangulaire de précision «SIMPA». Grelaud F.), Rev. géom.— experts et topogr. franç., 1954, **116**, № 5, 299—302 (франц.)

Прибор, служащий для измерения и нанесения координат на планы размером до 75×105 *см*, перенесения профилей и т. д. Дается конструкция и правила пользования прибором. Р. Д. Бачелис

**1787. Механическое моделирующее устройство для расшифровки картин электронной диффракции. Мак-Миллан** (Mechanical analog computer for reading

electron diffraction patterns, McMillan W. R.), Rev. Scient. Instrum., 1954, 25, № 6, 545—547 (англ.)

Прибор, использующий принцип умножителя типа счетной линейки, применяется для расшифровки дифракционных картин и вычисления размеров соответствующих кристаллических решеток. Решает уравнение типа $d=k/r$ (упрощенная формула Брэгга). Может определять размеры кристаллической решетки $d$ в пределах от 0,600 до 7,000 ангстрем. Значение постоянной дифракционной камеры $k$ можно устанавливать в пределах от нуля до 5000 ангстрем-см. Величины $d$ могут быть отпечатаны на бумажной ленте после того, как индикатор по очереди устанавливается на каждое из диффракционных колец радиуса $r$. Обработка диффракционных картин занимает в 2—3 раза меньше времени, чем при использовании известных ранее методов.

В. П. Разроев

1788. **Два новых прибора для статистических измерений. Фонтанелла, Вей** (Zwei neue Geräte für statistische Messungen. Fontanellaz G., Wey E.), Techn. Mitt. PTT, 1954, 32, № 3, 87—94 (нем., франц.)

Описываются два прибора для статистической регистрации и определения колеблющихся измеряемых значений напряжения. Первый прибор позволяет производить суммирование мгновенных значений, определение и суммирование средних значений, суммирование времени, в течение которого напряжение принимает определенное значение. Разрешающее время прибора 20 мсек. Второй прибор позволяет вычерчивать кривую распределения напряжений на бумажной ленте. Приводятся схемы и фотографии приборов.

И. К. Хайлов

1789. **Быстрое вычисление углов** (Computes angles fast), Aviat. Week, 1954, 61, № 3, 46 (англ.)

Сообщение фирмы «Джордж Шерр Оптикл Тулз» (George Scherr Optical Tools, Inc) о выпуске нового приспособления для измерения углов от 0° до 360° с отсчетом через 5 дуговых минут. В. К. Зейденберг

1790. **Счетные диски из анодированного алюминия. Майерхофер** (Rechenscheiben aus anodisch oxydiertem Aluminium—Disques à calcul en aluminium oxydé anodiquement. Meierhofer Hans), Aluminium suisse, 1954, 4, № 5, 160—166 (нем., франц.)

Приведены цветные изображения и описания 14 швейцарских и немецких счетных дисков из анодированного алюминия: для аэронавигационных расчетов, для расчета работы электродвигателей, электрических счетчиков, токарных автоматов, компрессоров, для расчетов при аэрофотосъемке, для расчета винтовой нарезки, cos φ, освещения лампами накаливания и люминесцентными лампами, изоляции проводов, для расчетов по нормированию и универсальный диск. Многие диски двойные (по одному подвижному диску с каждой стороны неподвижного диска). Поверхность, свободная от шкал, содержит таблицы и инструкции. На диске для аэрофотосъемки шкалы частично заменены графиками. Большинство дисков черно-белые, часть имеет также цветные шкалы и поля. Диаметр неподвижного диска около 100 *мм*.

Универсальный счетный диск (120 *мм*) заменяет логарифмическую линейку длиной в 27—35 *см* и позволяет умножать, делить и извлекать корни. Кроме того, он содержит «спираль времени», механизирующую при расчетах времени пересчет единиц времени.

Аэронавигационный счетный диск представляет собой набор дисков, сложенных в виде карманной книжки, и позволяет решать треугольник скоростей, рассчитывать путевое время, расход горючего, дальность полета с оставшимся горючим, находить поправки к показаниям указателя воздушной скорости и высотомера и другие данные, пересчитывать из одних единиц в другие запас горючего и расстояние, а также измерять по карте курс и расстояние. На дисках набора нанесен ряд таблиц, например таблицы для слепого полета, таблица перевода миллибар в дюймы для точной установки высотомера и пересчетная шкала Цельсий—Фаренгейт. Один диск содержит инструкцию и формулы; есть стираемый диск для заметок. Г. Н. Поваров

1791. **Счетная линейка «Политехник» системы Ф. Грело** (La règle à calculs «Géo-Polytechnique». Système F. Grelaud.), Rev. géom.-experts et topogr. franç., 1954, 116, № 6, 349—354; № 8, 494—499 (франц.)

Описывается устройство и техника счета на линейке, позволяющей выполнять многие часто встречающиеся операции, не выполнимые на обычной логарифмической линейке. Р. Д. Бачелис

1792. **Счетная линейка. Счетный прибор видоизменяется для выполнения многих обязанностей. Уиллард.** (The slide rule. The slipstick is modified to perform many duties. Willard Jack), Purdue Engr, 1953, 49, № 3, 18—19, 34 (англ.)

Популярный очерк, в котором выясняется значение счетной линейки для инженеров, даются некоторые сведения об истории этого прибора, описываются важнейшие его видоизменения (счетный диск, счетный цилиндр, линейки специального назначения для расчетов по страховому делу, по электротехнике и др.). Дано фото проф. Арнольда с его коллекцией счетных линеек разных типов. В. М. Брадис

1793. **Логарифмические линейки для определения количества топлива в котлах центрального отопления. Апт** (Suwaki logarytmiczne dla ustalenia ilości paliwa w kotłach centralnego ogrzewania. Apt I.), Gospod. węglem, 1955, 4, № 4, 81—85 (польск.)

1794. **Вычислительные машины и методы программных вычислений. Мели** (Maschinen und Methoden zum programmgesteuerten Rechnen. Maehly Hans J.), Schweiz. Z. Vermessung, 1954, 52, № 10, 284—286 (нем.)

Приведено популярное описание принципа действия вычислительных машин с программным управлением. Р. Л. Драбкин

1795. **Вычислительные машины и методы программных вычислений. Мели** (Maschinen und Methoden zum programmgesteuerten Rechnen. Maehly Hans J.), Schweiz. Z. Vermessung, 1954, 52, № 11, 300—307 (нем.)

Популярно описываются принципы работы вычислительных машин с программным управлением. Приведена программа для вычисления квадратных корней и произведения матриц.

Начало см. реф. 1794. Р. Л. Драбкин

1796. **Электронный мозг на службе промышленности. Дюкрок** (Le cerveau électronique au service de l'industrie. Ducrocq Albert), Usine nouvelle, 1953, 9, № 40, 24—25, 27 (франц.)

Краткий, популярный очерк электронных вычислительных машин и их применения в промышленности. Г. П.

1797. **Электронные вычислительные машины. Дейч** (Maquinas calculadoras electronicas. Deutsch Hans), Rev. telegr. electrón., 1954, 41, № 496, 19—22, 27 (исп.)

Популярная статья.

1798. **Машины думают? Земанек** (Denkende Maschinen? Zemanek Heinz), Radiotechnik, 1953, 29, № 6, 196—199 (нем.)

Популярная статья о принципах действия и возможностях современной вычислительной машины. Т. Ш.

1799. **Аналогия работы мозга. Мопе** (Fonctions intellectuelles analogiques. Maurer P.), Electricien, 1954, 82, № 1926, 30—36 (франц.)

Обсуждается вопрос о выполнении вычислительной машиной некоторых функций человеческого мозга (запоминание и т. д.). Р. Б.

**1800. 100 000 сложений в минуту. Д'Аяла Вальва** (100 000 addizioni al minuto. D'Ayala Valva Giuseppe), Sci. illustrata, 1954, **6**, № 5, 28—32, 94—96 (итал.)

Популярный очерк о современной вычислительной технике. Излагается классификация вычислительных машин. Дается описание машины УНИВАК, приводятся фото блоков машин УНИВАК и ИБМ-701.

Г. Н. Поваров

**1801. Электронные вычислительные машины в авиационной промышленности** (Les calculatrices électroniques dans l'industrie aéronautique. E. B.), Ailes, 1954, **34**, № 1488, 9 (франц.)

Приведены принципы действия цифровых машин и моделирующих устройств. Описаны коммерческие расчеты, связанные с применением указанных машин в авиационной промышленности. Р. Д. Бачелис

**1802. Вычислительные машины идут в ногу с промышленностью. Лейси** (Computers gaining ground with utilities. Lacey Leo), Mod. Power and Engng, 1954, **48**, № 11, 74—77 (англ).

Популярная статья, знакомящая читателей с современными электронными цифровыми вычислительными машинами. Кратко изложена история развития вычислительных машин. Приводятся основные принципы, положенные в основу проектирования электронных цифровых вычислительных машин. Сжато говорится о программировании и о вычислительных возможностях электронных машин. Н. Н. Поснов

**1803. Настоящее и будущее измерительных и управляющих электронных приборов. Миллер** (The present and future in electronic process measuring and control instruments. Miller J. T.), Instrum. Practice, 1954, **8**, № 1, 37—43 (англ.)

Статья посвящена применению электроники в приборах контроля и управления процессами. Содержатся некоторые указания на возможность применения вычислительных машин в деле измерения и управления процессами.

Для испытания и определения наилучших условий работы устройства управления, а также для изучения управляемых процессов могут быть созданы вычислительные устройства, моделирующие соответствующие процессы. Цифровые вычислительные машины, предназначенные для управления процессами, должны быть более простыми, чем существующие в настоящее время. Управляющие цифровые машины должны обрабатывать данные, поступающие от измерительных приборов, и передавать необходимые сигналы на соответствующие цепи управления. Чтобы избежать аварии при выходе из строя управляющей вычислительной машины, установка должна быть снабжена соответствующими ограничителями и предохранителями. В. Д. Князев

**1804. Электронный счет и его применения. Соваж** (Le calcul électronique et ses applications. Sauvage André), Electronique, 1954, № 88, 9—11 (франц.)

Первая из серии популярных статей об электронных цифровых вычислительных машинах. Описываются триггерная ячейка и полупроводниковый триод. Приводятся следующие цифры месячного производства точечных полупроводниковых триодов американскими компаниями: «Уэстерн Электрик» — 6000, «Райтеон» — 1000, «Дженерал Электрик» — 800, RCA — 400.

Г. Н. Поваров

**1805 К. Техническое развитие вычислительных машин. Хенneман** (Die technische Entwicklung der Rechenmaschine. Hennemann A. Büromarkt-Bibliothek.' Bd. 8, Aachen, Basten, 1954, 184 S., 19.50 Lw.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, № 17, 780

**1806 К. Расчет статически неопределимых систем машинными методами. Нарец Л. К.** (Тр. Таллинск. политехн. ин-та, Сер. А, № 54), Таллин, Эстгосиздат, 1954, 52 стр., 2 р. 10 к.

**1807 К. Электронный дешифратор.** Моск. энерг. ин-т, кафедра электроматем. машин. Работа № 6, М., МЭИ, 1954, 9 стр.

**1808 К. Электронное счетное устройство.** Моск. энерг. ин-т, Кафедра электроматем. машин. Работа № 7, М., МЭИ, 1954, 13 стр.

**1809 К. Приемный регистр со сдвигом.** Моск. энерг. ин-т, Кафедра электроматем. машин. Работа № 5, М., МЭИ, 1954, 13 стр.

**1810 К. Блокинг-генератор.** Моск. энерг. ин-т., Кафедра электроматем. машин. Работа № 4, М., МЭИ, 1954, 14 стр.

**1811 К. Кибернетика. Гильбо** (La cybernétique. Guilbaud Georges-Théodule. Paris, Presses universitaires de France, 1954, 136 p., 144 fr.), Bibliogr. France, 1954, **143**, № 50, I partie, 1117

**1812 РЕЦ. Магнитные усилители. Рейнер** (The magnetic amplifier. Reyner J. H., 2 Ed., 119 pp., ill, Rockliff Publishing Corp., Ltd, 1953, 15 s.) [**Рецензия: Белл** (Bell D. A.), Electronic Engng, 1954, **26**, № 313, 129 (англ.)]

Настоящее второе издание является почти стереотипным. Книга может быть рекомендована как введение в теорию и конструирование магнитных усилителей, так как автор излагает эти вопросы с минимумом математических выкладок. Термины «самоподмагничивание» и «обратная связь» не совсем четко разграничены.

О. В. Росницкий

**1813 Д. Исследование механизмов управления вычислительных машин. Обросов И. И.** Автореф. дисс. канд. техн. н., Ленингр. ин-т точной механ. и оптики, Л., 1955

**1814 П. Электронный прибор для цифровых вычислений. Хобс, Джордан** (Apparatus for digital computation. Hobbs George W., Jordan William B.) [General Electric Co.]. Пат. США 2692727, кл. 235—61, 26.10.54

Устройство предназначено для работы в сумматоре электронной вычислительной машины и выполняет функции суммирующего цифрового элемента. В соответствии с этим прибор имеет три входные цепи (две для слагаемых и одну для переноса из соседнего разряда) и две выходные цепи (сумма и перенос в соседний разряд).

Прибор имеет оптику обычной электроннолучевой трубки и отличается от последней лишь устройством мишени. Имеется шесть отдельных мишеней, расположенных в два ряда, причем каждая из мишеней имеет следующее значение: (11) (10) (1) (10) (1) (0).

Каждая из пластин горизонтального отклонения является входом слагаемых, одна из пластин вертикального отклонения служит входом переноса, другая пластина вертикального отклонения заземлена. Нормально луч падает на мишень (0). При подаче сигнала на любую из пластин горизонтального отклонения луч перемещается на мишень (1) (сигналы слагаемых подаются разной полярности). При подаче сигналов одновременно на оба входа слагаемых луч переместится на мишень (10). Сигнал, поданный на вход переноса, передвигает луч на соседнюю верхнюю мишень. Мишени, обозначенные (1), соединены вместе и образуют выход суммы, а мишени (10)— выход переноса. Мишень (11) подключена через диоды к выходу суммы и выходу переноса. При попадании луча на какую-либо мишень

создается падение напряжения на сопротивлении, включенном последовательно с мишенью, которое и является выходным сигналом. В. Н. Лаут

**1815 П. Электронная цифровая вычислительная машина** (Electronic digital computing machine) [National Research Development Corp.]. Австрал. пат. 154322, кл. 05.5, 10.12.53

В запоминающем устройстве цифровой вычислительной машины имеется схема для записи на один адрес нескольких данных, имеющих меньшее количество цифр, чем в полном коде. В. Д. Князев

**1816 П. Электроннолучевая запоминающая трубка** (Cathode-ray charge storage tube) [National Research Development Corp.]. Австрал. пат. 152484, кл. 05.5, 6.08.53

В запоминающей трубке отклоняющее устройство перемещает луч по экрану с такой большой скоростью, что положительный заряд, образующийся в результате облучения, практически не уничтожается слева по ходу луча вторичными электронами. На экране получается положительно заряженная полоска. То же самое или дополнительное отклоняющее устройство заставляет луч перемещаться второй раз по той же самой линии или вблизи нее уже с более низкой скоростью. При втором («медленном») облучении вторичные электроны, падающие слева от пятна, уничтожают положительный заряд, записанный при первом отклонении луча. В соответствии с содержанием информации второе («стирающее») отклонение луча может производиться или не производиться, причем на экране трубки при этом будут записываться заряды разной полярности. В. Н. Лаут

**1817 П. Электроннразрядный прибор. Уэст** (Electron discharge device. West Charles F.) [Raytheon Manufacturing Co.]. Пат. США 2660690, кл. 250—27, 24.11.53

Конструкция запоминающей электроннолучевой трубки. В. Л.

**1818 П. Прибор для запоминания информации. Бакби** (Informational storage device. Buckbee John A.) [Raytheon Manufacturing Co.]. Пат. США 2661442, кл. 315—12, 1.12.53

Для хранения данных используется электроннолучевая трубка. Кроме дырчатого электрода, на котором хранятся записанные сведения, в трубке имеются отражательный электрод, расположенный параллельно запоминающему электроду со стороны, противоположной ушке, и сетка, находящаяся между запоминающим и отражательным электродами. В. Н. Лаут

**1819 П. Кодирующая электроннолучевая трубка для кодо-импульсной модуляции сигналов. Карбри** (Coding tube for pulse code modulation signals. Carbrey Robert L.)[Western Electric Co., Inc.]. Канад. пат. 491220, 10.03.53

Двухлучевая электроннолучевая трубка с дополнительными кодирующим и шифрующим электродами для использования в системах кодо-импульсной модуляции. Б. Я. Коган

**1820 П. Электронное запоминающее устройство. Поттер** (Electronic memory device. Potter John T.). Пат. США 2650830, кл. 274—4, 1.09.53

Магнитное запоминающее устройство, в котором магнитный материал нанесен на пластины, укрепленные на цилиндре таким образом, что плоскости пластин пересекают ось вращения цилиндра. Я. А. Хетагуров

**1821 П. Одноламповый двоичный счетчик. Гордон** (Single tube binary counter. Gordon Bernard M.) [Eckert-Mauchly Computer Corp.]. Пат. США 2662983, кл. 250—27, 15.12.53

Разряд двоичного счетчика, состоящий из газоразрядного тетрода и двух разделительных диодных схем, через которые сигнал от предыдущего разряда поступает попеременно в анодную и катодную цепи лампы, обеспечивая переброс последней из одного устойчивого состояния в другое. В. К. Зейденберг

**1822 П. Счетчик на газонаполненной лампе. Колер** (Dual-polarity gas tube counter. Koehler Robert B.) [International Business Machines Corp.]. Пат. США 2651741, кл. 315—168, 8.09.53

Газоразрядный прибор, имеющий общий анод, несколько катодов и вспомогательные электроды, обеспечивающие передачу тлеющего разряда при подаче входных импульсов только в определенном направлении. Основная группа катодов определяет количество возможных устойчивых состояний прибора. Прибор позволяет фиксировать количество поданных на вход импульсов. В. К. Зейденберг

**1823 П. Оптическое контрольное устройство. Аллен, Кроми** (Optical operation control device. Allen Philip H., Chromy Benjamin J.). Пат. США 2651463, кл. 235—63, 8.09.53

В контрольном устройстве имеются узлы ввода и запоминания данных вместе с вычислительным устройством, совершающим счетные операции. Ряд узлов контрольного устройства приводится в действие узким световым лучом. С помощью светового луча, направляемого от одного контрольного элемента к другому, устанавливаются начальные моменты различных операций и контролируется их выполнение. В. Б.

**1824 П. Электронная вычислительная машина. Куффиньяль** (Electronic calculating machine. Couffignal Pierre Louis) [Société Civile d'Etudes de Calcul Automatique]. Пат. США 2675962, кл. 235—61, 20. 04. 54

Устройство для вычерчивания кривых, работающее совместно с электронной цифровой вычислительной машиной. Кривые вычерчиваются в соответствии с полученными результатами вычислений, выдаваемыми в виде импульсов. Л. М. Шехтман

**1825 П. Схема с двумя устойчивыми состояниями, использующая кристаллические триоды. Шокли** (Bistable circuits, including transistors. Shockley William) [Bell Telephone Laboratories, Inc.]. Пат. США 2655609, кл. 307—88, 13.10.53.

Схема управляющего элемента, состоящего из двух кристаллических триодов типа *p-n-p* и *n-p-n*. Основной электрод одного триода соединен с коллектором другого. А. Б. Залкинд

**1826 П. Схема триггера** (Trigger circuit) [Standard Telephones and Cables Pty. Ltd]. Австрал. пат. 154909, кл. 05.5, 11.02.54.

Схема триггера, основанная на использовании кристаллического триода с характеристикой $I_к = f(I_э)$ гистерезисного типа. Кристаллический триод имеет 4 электрода. А. Б. Залкинд

**1827 П. Триггер, использующий кристаллические триоды** (Transistor trigger circuits) [Western Electric Co., Inc.]. Австрал. пат. 153501, кл. 05.5, 15.10.53

Триггерная схема, использующая два кристаллических триода, включенных по схеме с заземленными основными электродами. А. Б. Залкинд

**1828 П. Триггерная схема. Крир** (Trigger circuit. Kreer John G., Jr.) [Western Electric Co., Inc.]. Канад. пат. 496896, 13.10.53

Триггерная схема на двух германиевых триодах. Работа схемы основана на использовании падающего участка входной характеристики триода. Один вариант схемы использует входную характеристику типа $N$, другой вариант — характеристику типа $S$. А. Н. Зимарев

**1829 П. Балансный усилитель, использующий кристаллические триоды типа *p-n-p* и *n-p-n*. Рейс-**

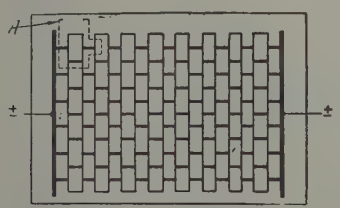
**бек** (Balanced amplifier employing transistors of complementary characteristics. Raisbeck Gordon) [Bell Telephone Laboratories, Inc.]. Пат. США 2666819, кл. 179—171, 19.01.54

Схема балансного усилителя на двух кристаллических триодах с противоположными характеристиками. А. Б. Залкинд

**1830 П. Усилитель на кристаллических триодах. Шокли** (Transistor amplifier. Shockley William) [Bell Telephone Laboratories, Inc.]. Пат. США 2666818, кл. 179—171, 19.01.54

В основе схемы усилителя лежит последовательное включение двух полупроводниковых триодов с противоположными характеристиками. А. Б. Залкинд

**1831 П. Печатный электрический проводник. Ханнас** (Printed electrical conductor. Hannahs Wilson H.) [Sylvania Electric Products Inc.]. Пат. США 2641675, кл. 219—19, 9.06.53



К реф. 1831 П

Проводник для соединения элементов схемы, напечатанный на пленке и имеющий указанный на рисунке вид (см. фото). В. К. Зейденберг

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

**1832. Фотон** (Photon), Tech Engng News, 1953, **34**, № 7, 38—41 (англ.)

Сообщается об устройстве фотонаборной машины «Фотон» (Photon). При фотонаборном печатании на машине выполняются следующие операции: передача текста с клавиатуры в виде образующихся при печатании кодовых групп сигналов девятизначного двоичного кода на запоминающее устройство, запоминание накопленной информации, управление механизмами затворов, фотографическое печатание набранных строк на фотоленту.

Машина «Фотон» может печатать 16 различных алфавитов 12 разных размеров. При печатании имеется возможность смещения строк на фотоленте вправо и влево, вверх и вниз. Кроме того, автоматически производится «выравнивание» строк, т. е. приведение печатаемых строк к одинаковой длине. В процессе печатания производится счет числа строк так, что отпечатанный текст на фотоленте имеет вид негативных или позитивных гранок, которые, по желанию, могут иметь одинаковую высоту.

Скорость печатания определяется скоростью работы лица, набирающего (печатающего) текст на клавиатуре, и может доходить до 10 страниц в час. Печатные знаки различных типов, фасонов и размеров нанесены на особые стеклянные диски по их краям в 8 рядов. Для каждого из 16 алфавитов имеется свой диск, содержащий 12 номеров шрифта (1400 букв). Смена дисков производится вручную. Приведено фото машины. В. Б.

**1833. Новые электронные машины. Кастро-Руис** (Nuevas máquinas electrónicas. Castro Ruiz A.), Ibérica, 1953, **17**, № 259, 450—451 (исп.)

Сообщение об американской вычислительной машине ОАРАК (в тексте Carao; см. РЖМат, 1954, 1842—1848) и электронной фотонаборной машине «Фотон» (Foton) (см. реф. 1832). Н. Я. Матюхин

**1834. Перфокарты приводят в действие новую фотографическую буквопечатающую машину** (Punched cards operate new photographic typesetter), Prod. Engng, 1953, **24**, № 4, 218—219 (англ.)

Приводится описание принципа действия новой машины фирмы «Фототипограф» (Phototypograph Corp.) для печатания текста на фотографическую ленту. Вначале текст преобразуется в соответствующие кодовые комбинации отверстий на перфокартах. После пробивки отверстий на перфокарте проверяется правильность пробивки и исправляются типографские ошибки. Соответственно пробитым отверстиям на перфокарте в фотопечатающей машине приводится в действие система кулачков, эксцентриков и электромагнитов, открывающая соответствующие затворы, в результате чего свет от источника, проходя через маску в форме печатаемой буквы, попадает в нужное место фотоленты и производит фотопечатание набранных букв, из которых образуются строки.

Дается кинематическая схема фотографической буквопечатающей машины и блок-схема механизма для пробивки отверстий и выравнивания строк на перфокартах. В. Б.

**1835. Производство вычислительных машин для военной авиации** (Manufacturing computers for aircraft), Tele-Tech, 1954, **13**, № 5, 89 (англ.)

Приводятся семь фотографий, демонстрирующих отдельные узлы навигационного устройства непрерывного действия, их сборку и испытания, производимые фирмой «Форд Инструмент» (Ford Instrument Co.) по заказу Военно-воздушных сил США. При вылете на навигационном устройстве устанавливаются направление и сила ветра, магнитное отклонение и координаты старта. В полете вычислительная машина учитывает изменения координат, получая непрерывно поступающую информацию о скорости самолета и отклонении компаса, и вырабатывает сведения о широте и долготе самолета. Фотографии показывают испытания аппаратуры при изменениях температуры от — 65° до +70°, для разреженного воздуха, соответствующего высоте полета 15 *км*, пятидесятичасовые испытания в атмосфере повышенной влажности и четырехчасовые испытания на вибростенде. А. Б. Залкинд

**1836. Измерение плотности воздуха для авиационных стрелковых вычислителей. Колвин** (Measuring air-density for aircraft gunnery computers. Colvin Henry F.), Tele-Tech, 1953, **12**, № 9, 68—70, 140—141 (англ.)

Фирмой «Колсман» (Kollsman Instrument Corp.) сконструирована система РАД (RAD), измеряющая относительную плотность воздуха. Данные измерений автоматически поступают в вычислительные устройства управления авиационными стрелковыми установками. Система РАД состоит из чувствительного элемента абсолютного давления, датчика температуры, датчика истинной воздушной скорости, контура компенсации температурной погрешности с сельсинной следящей системой, двух отрабатывающих асинхронных двигателей и мостовой измерительной схемы. Система РАД может применяться при высотах до 15 *км* и истинных воздушных скоростях до 1050 *км/час*.

Ю. И. Кириленко

**1837. Простое счетно-решающее устройство для вычисления данных полета. Класс** (Single computer combines flight data. Klass Philip), Aviat. Week, 1953, **59**, № 13, 45, 48 (англ.)

Сообщение о новом электромеханическом счетно-решающем устройстве модель С-2, разработанном фир-

мой «Колсман» (Kollsman Instrument Corp.), для вычисления данных полета самолета: атмосферного давления, числа Маха, истинной скорости. Выработанные данные могут быть непосредственно переданы в качестве входных данных в устройства навигации, бомбометания, управления огнем и аэрофотосъемкой. Одновременно обеспечивается возможность визуального контроля этих величин.

В решающем устройстве сочетаются дифференциальные и статические датчики давления с электромеханическими счетно-решающими механизмами. Последние состоят из трех следящих систем, снабженных миниатюрными усилителями, системы сельсинов для передачи данных, работающей в индикаторном и трансформаторном режимах, и профилированных кулачков. Прибор работает с точностью до 1,5% и имеет размеры 25 × 17 × 30 *см*. См. РЖМат, 1954, 5913.

Б. Я. Коган

**1838. Вычислительное устройство для измерения воздушной скорости** (Airspeed computer), Amer. Aviat., 1953, **17**, № 11, 91—92 (англ.)

Публикуется сообщение о разработке прибора Колсман С-2, являющегося вычислительным устройством для точного измерения воздушной скорости, сочетающего в себе измеритель разностного и статического давления с электромеханическим вычислительным механизмом. См. РЖМат, 1954, 5913; 1956, 1837. В. П. Парамонов

**1839. Рулевое вычислительное устройство для системы слепой посадки. Андерсон, Фриц** (Instrument approach system steering computer. Anderson W. G., Fritze E. H.), Proc. I. R. E., 1953, **41**, № 2, 219—228 (англ.)

Дается теория бортового электронного рулевого вычислительного устройства и связанных с ним приборов, используемых при слепой посадке. Показывается, что слепую посадку по приборам можно рассматривать как систему управления с отрицательной обратной связью. Рекомендуются средства, стабилизирующие полет. Рассматриваются линейные фильтры, применяемые для улучшения системы слепой посадки. В. П. Парамонов

**1840. Автоматически вычисляющий путеводитель обеспечивает более безопасную и легкую посадку. Перро** (C-A-T spells safer, easier landings. Perreault William D.), Amer. Aviat., 1953, **16**, № 23, 27 (англ.)

Предлагается простой и дешевый прибор, который облегчает пилоту точно направить и посадить самолет на посадочную дорожку. Прибор известен под названием автоматически вычисляющего путеводителя (CAT—Computing Automatic Tracker). Он представляет собой двухламповый вычислительный элемент весом 3,6 *кг*. Прибор имеет стрелочный индикатор, который реагирует на разность сигналов от гирокомпаса и локатора, определяющего положение самолета по отношению к лучу радиомаяка посадочной дорожки. Пилот при посадке ведет самолет так, чтобы стрелка прибора была в центре. Чувствительность прибора позволяет использовать его на современных скоростных самолетах. Прибор позволяет производить посадку на посадочную дорожку шириной в 45 *м* при умеренном ветре, направленном под углом в 7 градусов по отношению к курсу самолета.

О. К. Щербаков

**1841. Управление самолетом с земли** (Sequence selector for automatic flight), Amer. Aviation, 1953, **16**, № 22, 54 (англ.)

Сообщение фирмы «Миннеаполис-Хонейвелл» о выпуске автоматического устройства AMSS, применяемого Военно-воздушными силами США для управления самолетами с земли. См. РЖМат, 1954, 3166.

А. А. Крюков

**1842. Тренажер для персонала, работающего на локационных станциях** (Training apparatus for air-traffic control by radar), Engineering, 1953, **175**, № 4553, 572—574 (англ.)

Для облегчения подготовки персонала, работающего на самолетных локационных станциях, отдел регулирования движения самолетов министерства гражданской авиации разработал тренажер «МСА», имитирующий путь самолета на экране локатора. При имитации полета учитываются: курсовой угол, скорость самолета, начальное положение каждого самолета, скорость и направление ветра. Скорость самолета может меняться в пределах от 300 до 800 *км/час*, курсовой угол может меняться от 0° до 360°, скорость ветра — от 0 до 90 *км/час*. Кроме того, имеется устройство для изменения эхо-импульсов в пределах от 1 до 5 *μсек*. и ширины луча от 1 до 5°. Скорость вращения антенны может меняться от 0 до 30 об/мин. Пределы видимости меняются от 3 до 160 *км*.

Подобный тренажер был разработан фирмой «Маркони» (Marconi Co.). Он обладает несколько большими возможностями: скорость самолета может меняться от 300 до 1200 *км*; пределы видимости самолета — от 3 до 300 *км*.

Н. Н. Поснов

**1843. Вычислительное устройство, имитирующее движущиеся локационные цели. Бертли** (Computer simulates moving radar targets. Birtley W. B.), Electronics, 1953, **26**, № 9, 137—139 (англ.)

Для обучения операторов радиолокационных станций и для тренировки операторов, управляющих боем, радиолокационные станции снабжаются двумя установками, одна из которых имитирует самолет, другая — самолет-перехватчик. Имитирующие устройства дают отметки самолетов на индикаторе кругового обзора. Начальное положение, скорость и направление движения имитируемых самолетов могут устанавливаться по желанию инструктора (для вражеского самолета) или в соответствии с указаниями оператора (для самолета-перехватчика). Приводятся блок-схема и схема устройства, а также фотографии внешнего вида устройства. В. П. Парамонов

**1844. Автоштурман для работы со станциями ОБД. Порицкий** (OBD Pictorial display. Poritzky Siegbert B.), Aviat. Age, 1953, **20**, № 1, 40—45 (англ.)

Сообщается о работе по созданию радиоавтоштурманов, работающих от радионавигационных станций ОБД (комбинация всенаправленного радиомаяка и ретранслятора дальномера). Радиоавтоштурманы должны упростить полет по маршруту, не проходящему через станцию ОБД. В настоящее время рядом фирм, в том числе фирмой «Сперри», ведутся работы по созданию автоштурманов для работы от станции ОБД с указателями в виде планшетов. Один из вариантов автоштурмана, наряду с планшетом, имеет указатели шкалового типа, показывающие отклонение от курса и расстояние до места назначения. Для решения тригонометрической задачи определения местоположения самолета по сигналам станции ОБД используется электро-механическое счетно-решающее устройство. Л. В. Кондратьев

**1845. Составление петли автоматического регулирования из отдельных приборов. Льюс** (Integration of instruments — the closed loop system. Luce Charles B.), Pacif. Factory, 1953, **80**, № 5, 36, 37, 78—79, 89 (англ.)

В небольшой популярной заметке отмечается тенденция ко все большей автоматизации современных промышленных предприятий. Описывается назначение основных частей системы автоматического регулирования производственных процессов. В качестве примера приводится кинематическая схема и фото машины для автоматической резки бумажной ленты на листы.

В. Б.

**1846. Автоматическое цифровое устройство для записи степени ионизации. Моррисон** (An automatic ionization efficiency digital recorder. Morrison J. D.), Rev. Scient. Instrum., 1954, 25, № 3, 291—293 (англ.)

Описывается прибор, позволяющий получить большее отношение сигнала к помехе при исследовании записи процесса ионизации, произведенной с масс-спектрометра. Улучшение соотношения сигнал — помеха может быть достигнуто посредством временной корреляции периодического сигнала. Выход масс-спектрометра представляется в цифровом бинарном виде, удобном для арифметической обработки. Прибор имеет 2 схемы, запоминающие нулевой уровень и пиковое значение ионного тока. Выходы запоминающих схем подаются на компаратор, где происходит сравнение их с линейным пилообразным напряжением. За время изменения значения пилообразного напряжения от верхнего уровня до нижнего открывается доступ импульсов в счетную схему, на которой устанавливается цифровое значение пика ионного тока. В. Д. Князев

**1847. Автоматическое определение размеров частиц последовательным подсчетом. Йорданидес, Чемберлин** (Automatic particle-sizing by successive counting. Jordanides G., Chamberlain N. H.), Nature, 1954, 174, № 4419, 83—84 (англ.)

Описан простой и удобный метод подсчета количества частиц и определения среднего диаметра их в плоском образце, обозреваемом движущейся по спирали головкой с фотоэлементом, на выходе которого имеется усилитель, включающий каскад с ограничением по минимуму сигнала, и счетчик на достаточное число разрядов. Точность, даваемая прибором, порядка 3%. В. К. Зейденберг

**1848. Электронный счетчик на декатронах для подсчета деталей. Кракстон** (An electronic batching counter using dekatron counting tubes. Craxton R. T.), Electronic Engng, 1953, 25, № 308, 424—426 (англ.)

Описывается 4-декадный электронный счетчик для подсчета деталей, движущихся по ленте транспортера, и для измерения длины какого-либо материала (бумаги, ткани), выходящего из агрегата. Подсчет производится до заранее установленного числа, после чего счетчик гасится. В комплект, кроме счетчика, входят: источник питания, фотоэлектрическое устройство, выдающее импульсы, и коммутационная панель, где набираются числа, до которых происходит подсчет. В каждую декаду счетчика входит декатрон GS10B (РЖМат, 1956, 850) и пусковая цепь. Движущаяся деталь прерывает световой луч, падающий на фотоэлемент фотоэлектрического устройства, которое выдает импульсы, поступающие на пусковую схему первой декады.

Первые девять катодов каждого декатрона могут подключаться шнурами к схеме совпадения. Когда число импульсов, подсчитанных счетчиком, достигнет набранного на коммутационной доске числа, на сетку тиратрона поступят импульсы, снимаемые с указанных катодов, и тиратрон зажигается. От тиратрона срабатывает реле, которое гасит счетчик. Затем процесс подсчета повторяется. При измерении длин на валу протяжного механизма агрегата устанавливается диск с отверстиями, через которые световой луч попадает на фотоэлемент. При таком использовании счетчика им можно замерять длину материала, выходящего со скоростью 40 *м/мин* при точности 6 *мм*. Счетчик работает на частотах до 650 *гц*. В. Н. Аверин

**1849. 98-точечное цифровое записывающее устройство на термопарах. Гласман** (A 98-point thermocouple digital recording system. Glassman I.), J. Franklin Inst., 1954, 257, № 6, 501—502 (англ.)

Устройство предназначено для замера температуры при испытаниях реактивных двигателей и автоматической записи ее в цифровой форме. Разработка устройства велась лабораториями Франклиновского института (Franklin Institute Laboratories) по заказу Отделения авиационных газовых турбин (Aviation Gas Turbin Division) фирмы «Вестингауз Электрик» (Westinghouse Electric Corp.). Данные о температуре снимаются с 98 термопар шаговым переключателем и последовательно подключаются к самобалансирующемуся потенциометру. Цифровой преобразователь, связанный с осью мотора потенциометра, преобразует их в замыкание контактов 10-полюсного переключателя, имеющегося в каждой декаде преобразователя. Контакты 10-полюсного переключателя включают соленоиды, от которых срабатывают клавиши печатающего механизма. Температура всех термопар может быть записана в течение 90 сек. Самобалансирующийся потенциометр имеет две шкалы (0—325° F и 300—600° F), переключающиеся автоматически. Номер термопары и индекс шкалы печатаются рядом с измеряемой величиной. Разрешающая способность системы 0,1% (без термопар). А. И. Щуров

**1850. Преобразователь, печатающий вес** (Weight-printing converter), Instruments, 1953, 26, № 11, 1640 (англ.)

Сообщение фирмы «Индастриал Электроник Энджинирс» (Industrial Electronic Engineers) о выпуске прибора, считывающего чистый вес с любого весового устройства с круглой шкалой. Прибор может производить запись одного измерения в секунду и отпечатывать значение на ленте или в ведомости. Информация может также суммироваться, вычитаться, умножаться и запоминаться. В. Д. Князев

**1851. Механизация подсчета оплаты за телефонные переговоры. Гилл, Джонсон** (The mechanization of trunk fee accounting. Gill C. J., Johnson N. O.), P. O. Telecommuns J., 1954, 6, № 4, 145—152 (англ.)

Описывается устройство системы для механизации подсчета оплаты за телефонные переговоры, разработанное Кентерберийской телефонной компанией. При заказе переговора составляются квитанции с указанием номеров абонентов, времени и стоимости переговора, затем данные с квитанций переносятся на перфокарты, которые пересылаются в центральный счетный пункт, где сортируются по абонентам и категориям. В конце определенного срока (чаще всего ежемесячно) данные обрабатываются на табуляторе, который вычисляет итоговую сумму для каждого абонента и печатает счета, которые высылаются абонентам для оплаты.

Система включает в себя узел для оптического считывания данных о переговоре, нанесенных на квитанцию в виде небольших черных кружочков, устройство для пробивки перфокарт, устройство для выборочного автоматического контроля правильности работы системы, автоматической сортировки перфокарт, табулирования результатов вычисления и печати результатов на бумажную ленту. Скорость действия системы 4000 счетов в 1 час. Применение системы считается целесообразным при числе абонентов не менее 30 000. Даются фото перфокарт и квитанций, а также отдельных блоков системы. В. Б.

**1852 П. Счетное устройство для управления наводкой. Холбрук, Лундстром** (Sight order computer. Holbrook Bernard D., Lundstrom Alexis A.) [Bell Telephone Laboratories, Inc.]. Пат. США 2658678, кл. 235—61.5, 10.11.53

Приведена схема и дано краткое описание устройства, предназначенного для управления орудиями морской артиллерии. Устройство содержит электромоторы, кинематические звенья и усилители. Используются компенсационные схемы и обратные связи для полу-

чения сигналов, пропорциональных углам отклонения цели от линии прицела. Л. Н. Дашевский

**1853 П. Счетное устройство для определения уставок дистанционных трубок.** Лундстром (Fuze setting order computer. LundstromAlexisA.) [Bell Telephone Laboratories, Inc.]. Пат. США 2658676, кл. 235—61.5, 10.11.53

Приведена схема и дано краткое описание устройства, вырабатывающего данные для управления орудиями морской артиллерии в соответствии с результатами наблюдений за целью. Устройство содержит усилители и потенциометры, сопротивления которых изменяются как функции ряда баллистических параметров. На выходе устройства образуются перемещения, пропорциональные уставке дистанционных трубок. Л. Н. Дашевский

**1854 П. Система, распределяющая изделия.** Скилман (Article dispensing system. Skillman Thomas S.) [Punch Engineering Pty, Ltd]. Пат. США 2672289, кл. 235—92, 16.03.54

Система содержит ряд магазинов с изделиями с различными характеристиками. Устройство запоминания кода управляет выбирающими переключателями, которые позволяют выбрать детали из определенного магазина в соответствии с кодом. Имеется устройство для счета выбираемых изделий. В. Д. Князев

**См. также:** 918, 927, 1394

## АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ


А

Абанин А. М. 1784
Авакумовић В. Г. 1666
Адян С. И. 962
Айзерман М. А. 1391, 1393
Алда В. 1457
Александров В. И. 1035
Алексеева Г. П. 1599
Алихашкин Я. И. 1409 Д
Альбер С. И. 1421 Д
Андронов И. К. 1572, 1575
Аржаных И. С. 1317, 1366
Архангельская В. М. 1028 Д

Б

Бакельман И. Я. 1629
Бендукидзе А. Д. 1237
Берикашвили Н. А. 1193
Берман Д. Л. 1247
Бермант А. Ф. 1444 К
Бернштейн С. Н. 1245
Бертова Е. И. 1679
Билимовић А. 1654
Бирман М. Ш. 1381
Борисович Ю. Г. 1481
Брызгалин Н. Ф. 1783
Буймола Г. Л. 1593
Бухараев Р. Г. 1631 Д

В

Вайнберг М. М. 1479
Ван Ши-цян 1038
Вега Г. 1696 К
Векуа И. Н. 1372
Виграненко Т. И. 1342
Вишик М. И. 1383, 1384
Владимиров В. С. 1330
Владинец И. И. 1678
Волков И. Ф. 1311
Воллернер Н. Ф. 1722
Волосов В. М. 1325

Г

Гайдук Ю. М. 947
Галузевский Г. Н. 1783
Гантмахер Ф. Р. 1391
Геронимус Я. Л. 1281
Гиль Г. В. 1303
Глаголев А. А. 1605
Гливенко Е. В. 1209
Глушков В. М. 1138
Гокиели Л. П. 960 К
Гольштейн Е. Г. 1244
Гордон И. И. 1191
Григорьева И. А. 1254
Гуревич М. И. 1362

Д

Давидовский Н. А. 1235
Демидович Б. П. 1441 К
Дешевой Г. М. 1595
Джавадов М. А. 1661
Джарбашян М. М. 1274
Добровольский М. Н. 1429

Е

Еругин Н. П. 1318, 1337
Ефимов Н. В. 1591 К

Ж

Живоглядов В. Г. 1689 Д

З

Захаров Д. А. 1583
Зуннунов Н. З. 1314

И

Иванов Б. 1697 К
Иванова В. М. 1171
Исмаилов А. П. 1661

К

Кальнин Л. Г. 1036
Каменков Г. В. 1339
Карамата Ј. 1227
Кармазина Л. Н. 1692
Карновский М. И. 1563
Касимов Д. М. 1412
Касимова С. С. 1661
Катетов М. 1177
Киквидзе З. А. 1385
Киселев А. А. 1388
Колесников А. Г. 1403
Коллатц Л. 1685 К
Комаров И. М. 1022
Колмогоров Н. А. 1023
Кон А. А. 1594
Конюхов М. В. 1310
Котелянский Д. М. 1051, 1055
Красовский Н. Н. 1336
Крейн М. Г. 1256, 1410
Кручкович. Г. И. 1642
Крылов В. И. 1676, 1677
Крючин А. Ф. 1406
Кублановская В. Н. 1688 Д
Кузнецов П. И. 1562
Кузнецов Я. Т. 1679
Курош А. Г. 1031 К

Л

Ладыженская О. А. 1357
Ланков А. В. 1569
Лебедев А. А. 1339
Литвин-Седой М. З. 1400
Лукашевич Л. 1725
Ляпин Е. С. 1107

М

Малышев А. В. 1024
Мания Г. М. 1535
Марченко В. А. 1331
Мертвецова М. А. 1687 Д
Метелька И. 1604
Микулик М. 1157
Милн В. Э. 1340 К
Митропольский А. К. 1568
Мышкис А. Д. 1303

Н

Нарец Л. К. 1806 К
Натансон И. П. 1679

О

Обросов И. И. 1813 Д
Окунев Л. Я. 1032 К
Осидзе 1223

П

Панченко В. М. 925
Пеевски В. 1555 К, 1697 К
Петерсен И. Ф. 1112 Д
Петровский И. Г. 1365
Пивоваров А. А. 1403
Пинскер И. Ш. 1721
Плись А. 1345
Плоткин Б. И. 1069, 1075
Плуме З. Я. 1379
Поваров Г. М. 1701
Погожельский В. 1271
Погорелов А. В. 1667
Погосов Г. С. 1420
Поллак Г. 1058
Полубаринова-Кочина П. Я. 944

Р

Расулов М. Л. 1487
Рашевский П. К. 1095, 1648
Рехтман П. Г. 1256
Русак Б. И. 1316

С

Сарымсаков Т. А., 1043, 1044, 1523 К
Саульев В. К. 1382
Севостьянов А. Г. 1727
Скорняков Л. А. 1146
Смирнов Д. М. 1078
Смирнова И. М. 1393
Сонсяда Э. 1089
Сорокина В. И. 1162 Д
Спехальский В. Е. 1349
Стратонович Р. Л. 1562
Супруненко Д. А. 1066, 1070, 1111 Д

Т

Тиман А. Ф. 1240
Тихонов В. А. 1623
Тихонов В. И. 1562
Томић М. 1227
Туганов Н. Г. 1625
Турецкий А. Х. 1225
Тутаев Л. К. 1618

Ф

Фаге М. К. 1329, 1485
Финкельштейн Г. М. 1312
Франкль Ф. И. 941
Фрейман Г. А. 973
Фукс Б. А. 1290

Х

Хаимова П. Л. 1630 Д
Харшиладзе Ф. И. 1236
Хахубия 1376
Хачатуров А. А. 1210
Хион Я. В. 1163 Д
Ходжаев Л. Ш. 1500
Христофоров В. В. 1417
Хухунайшвили Г. Е. 1180

Ц

Цай А. Г. 1405
Цареградский Х. А. 1679

Ч

Чакалов Л. 1255
Черможская Л. Н. 1395
Чернышенко В. М. 1592 Д
Чжан Су-чен 1199
Чжоу Хуай-хэн 1228
Чудов Л. А. 1365
Чунихин С. А. 1063

Ш

Шагинян А. Л. 1307
Шварц А. С. 1190, 1603
Шварц Ш. 1103
Шиманов С. Н. 1335
Шинцэль А. 1019
Широков П. А. 1645
Шмидов Ф. И. 1215
Шноль Э. 1333
Шура-Бура М. Р. 1187

Щ

Щиголев Б. М. 1567

Э

Эйдельман С. Д. 1361
Эйдус Д. М. 1373
Эренфейхт А. 1085

Я

Яглом А. М. 1520
Якубик Я. 1154

---

A

Abhyankar S. S. 1045
Adamo M. 942
Allen Ph. H. 1823 П
Almech Castañer A. 1726
Amir (Jakimovski) A. 1452
Anderson T. W. 1546
Anderson W. G. 1839
Andersson J. 1014
Andô T. 1472
Apt I. 1793
Athen H. 1588
Atiyah M. 1647
Attree V. H. 1769
Aymerich G. 1397

B

Bachmann F. 1573
Baer R. 1076
Bagchi H. das 1615
Bagemihl F. 1282
Ballieu R. 1013
Barbalat I. 1324
Barner M. 1626
Barnes E. S. 999
Barrett J. F. 997, 1561
Bass J. 1509
Bauer F. L. 1098
Baum J. D. 1206
Beard R. H. 1018
Behrens E.-A. 1148
Beighley C. M. 1781
Bell D. A. 1812 РЕЦ
Bergman S. 1292
Berkson J. 1538
Bhattacharyya A. 1542
Biernacki M. 1328, 1422, 1662, 1665
Bilo J. 1586
Bing R. H. 1184
Bini U. 1010
Birtley W. B. 1843
Bivins R. L. 1060
Blambert M. 1261
Blanc-Lapierre A. 1522
Blanuša D. 1640
Blaschke W. 937, 1418
Bledsoe W. W. 1437
Blij F., van der 996
Blom G. 1525
Boas R. P., Jr 1466
Bononcini V. E. 1434, 1435
Bonsall F. F. 1493, 1494
Booth A. D. 1712
Bosanquet L. S. 1454
Bose B. N. 1467
Bottema O. 1584, 1596
Boughon P. 984
Bown R. 1745
Boxer R. 1394
Boyer C. B. 935
Brauer G. 1259
Briggs Th. H. 1754
Briggs W. E. 977
Brown L. J. M. 1270
Brown W. P. 1056, 1132
Buckbee J. A. 1818 П
Buquet A. 1000
Burford T. M. 1338

C

Cadwell J. H. 1540
Calderón A. P. 1238
Camras M. 1761
Carbrey R. L. 1819 П
Carlitz L. 1003, 1004
Cartan H. 1297
Castoldi L. 1653
Castro A., de 1320
Castro Ruiz A. 1833
Cavallaro V. G. 1580
Cazenave R. 1601
Čemus J. 1739, 1740
Ceschino F. 1673
Chamberlain N. H. 1847
Chang S. H. 1416
Charrueau A. 1602
Chassan J. B. 1524
Cheatham T. E. 1781
Chen K. T. 1099
Chern S. S. 1638
Chow H. C. 1453
Chowla S. 977
Christov Chr. 1470
Chromy B. J. 1823 П
Cimmino G. 1030 К
Clifford A. H. 1106
Close R. N. 1720
Clunie J. 1275
Cogan E. J. 924
Cohn P. M. 1143
Collingwood E. F. 1279
Colombo G. 1398
Colvin H. F. 1836
Conkling R. 1109
Conte L. 938
Conti R. 1351
Coombs C. H. 1554 К
Copi I. M. 1158
Copping J. 1445
Corduneanu C. 1183
Conflield J. 1529
Couffignal P. L. 1824 П
Coulmy G. 1462
Courant R. 1390 К
Coxeter H. S. M. 1659
Craxton R. T. 1848
Csakalov L. 1041
Cugiani M. 1029
Curtis Ch. W. 1139
Curtis G. C. 1684
Czipszer J. 1217

D

Dahlquist G. 1671
Darbo G. 1214
Darling D. A. 1546
Davenport H. 995
Davis Ch. 1047
Davis H. Th. 1699 К
Davis Ph. 1264
Davis R. L. 1554 К
D'Ayala Valva G. 1800
Deaux R. 1581
De Giorgi E. 1386
Dekker D. 1617
DeLano R. B., Jr 1744
Delorme S. 946, 951
Denbow C. H. 921
Deutsch H. 1797
Diamond L. E. 1016
Dianada P. H. 985
Diaz J. B. 1341
Dickinson D. 1464
Dieudonné J. 1068
Dimmick E. L. 1017
Dini U. 1440 К
Djerasimović B. 988
Dold A. 1202
Dolph C. L. 1048
Doubrère M. 981
Douglis A. 1344
Ducrocq A. 1796
Duff G. F. D. 1356
Dufresnoy J. 980
Dugué D. 1506
Dumitrescu E. 1413
Duncan D. G. 1012
Dwinger Ph. 1156
Dyer W. G. 1668

E

Eckart G. 1226
Eckert J. P. 1716
Egerváry E. 1053
Ehrenfeucht A. 1085
Eilenberg S. 1201
Elianu I. P. 1302
Ellis D. 1109
Emersleben O. 979
Enomoto S. 1212
Epstein M. P. 1116
Erdélyi A. 1468
Erdös 1080
Eringen A. C. 1332
Errera A. 1192
Etherington I. M. H. 1147

F

Falkenstein A. 931
Faragó T. 1084
Farahat H. 1064
Farinha J. 1424
Fer F. 1354
Fisher V. 1699 К
Flanders H. 1119
Fontanellaz G. 1788
Foote H. L. 1752
Fortet R. 1533
Forti U. 940
Fossier M. W. 1719
Foster A. L. 1159
Fourès-Bruhat Y. 1355
Fox L. 1694 К
Franckx E. 1556
Frank M. S. 1141
Fréchet M. 1300, 1438
Frese W. F. 1735
Freud G. 1241, 1242, 1246, 1455
Freudenthal A. M. 1564
Friedrichs K. O. 1402
Fritze E. H. 1839
Frohlich A. 1114, 1115
Fryer K. D. 1150
Fujiwara K. 1477
Funk P. 1637

G

Gaertner W. 1702
Ganea T. 1186, 1198
Garabedian P. R. 1374
Garwick J. V. 1251
Garza A. de la 1550
Gaschütz W. 1059
Gehér L. 1217
Geiringer H. 1346
Gellerstedt S. 1439 К
Germay R. H. 1432
Geronimus J. L. 958 К, 959 К
Ghosal A. 1518
Gill C. J. 1851
Gillings R. J. 932
Glazman I. M. 1489

Glassman I. 1849
Gleason A. M. 1057
Godeaux L. 1609
Goheen H. E. 1086, 1113
Gołąb S. 972 К, 1636
Goldman O. 1502
Gonçalves V. 1220
Good I. J. 1519
Goodman A. W. 1269
Gordon B. M. 1821 II
Gordon W. L. 1196
Goto M. 1093
Gottfried J. 1579
Grabski M. 917
Grace E. E. 1185
Graeub W. 1288
Graham R. S. 1714
Grawert G. 969
Greenhouse S. W. 1529
Greenwood R. E. 1057
Grelaud F. 1786
Groot J., de 1172, 1181
Grossmann W. 1553 К
Grothendieck A. 1473, 1484
Gruenberg K. W. 1071
Guest P. G. 1530
Guilbaud G.-Th. 1811 К
Gumbel E. J. 1564
Günther A. 983
Gupta R. S. 1675

H

Haimovici A. 1633
Hajós G. 1534
Hale J. K. 1252
Haller J. 1389 К
Halperin I. 1150
Halperin M. 1529
Hammer P. C. 1475
Hammersley J. M. 1516
Hampel R. 1007
Hannahs W. H. 1831 II
Harary F. 1158
Hardy G. H. 1025 К
Hartman Ph. 1638
Hashimoto H. 1110
Hattori A. 1127
Hayman W. K. 1277
Heerema N. 1123
Heine V. 1521
Heiny R. L. 1737
Heller S. 934
Hellerman H. 1757
Helphen E. 1511
Hennemann A. 1805 К
Herrman O. 978
Herstein I. N. 1140
Hervé M. 1280
Herz J.-C. 1352
Heymans P. 1611
Heyn E. 1407
Higgins Th. J. 1672
Higman D. G. 1067
Hill G. W. 1707, 1708
Hirasawa Y. 1334
Hirzebruch F. E. P. 1207
Hobbs G. W. 1814 II
Hodge W. 1647
Hofmann J. E. 936
Holbrook B. D. 1852 II
Hong I. 1375
Hornich H. 1347, 1348, 1350
Hosszú M. 1436
Householder A. S. 927
Hsu L. C. 1046
Hu H.-C. 1404
Huber A. 1367, 1458
Huckemann F. 1286
Hukuhara M. 1221
Hunter F. L. 1767
Huppert B. 1077
Hyers D. H. 1402

I

Iglisch R. 1401
Infantozzi C. A. 1165
Iséki K. 1167, 1176
Ishikawa O. 1305, 1306
Itard J. 953
Iwahori N. 1052
Izumi S. 1456

J

Jacob H. G., Jr 1126
Jacobsthal E. 1431
Jaeger A. 1117
Jahr E. F. 1753
Johnson N. O. 1851
Johnson R. C. 1737
Jordan K. 1551
Jordan W. B. 1814 II
Jordanides G. 1847
Juncosa M. L. 1670

K

Kadeřávek F. 1585
Kando T. 1168
Kantorovics L. V. 1686 К
Kappos D. A. 1155
Karlin S. 1257
Karst O. J. 928
Kasahara S. 1480
Kasch F. 1133
Kasuga T. 1343
Katz S. 1720
Kawata T. 1465
Kendall M. G. 1545
Kimura N. 1104
Kinukawa M. 1231
Kito F. 1461
Klamkin M. S. 1590
Klass Ph. 1736, 1837
Kneser M. 998
Knigt A. S. Jr 1785
Koch R. J. 1108
Koehler R. B. 1822 II
Kokoris L. A. 1144
Koksma J. F. 1253
Kolmogoroff A. N. 1532
Komatu Y. 1377, 1378
Korn G. A. 1738
Korn T. M. 1738
Koutský Z. 1319
Králik D. 1182
Kreer J. G., Jr 1828 II
Kreyszig E. 1295
Krishnan V. S. 1169
Kruskal J. B., Jr 1490
Krülov V. I. 1686 К
Krygowska Z. 972 К
Kucharzewski M. 1218
Kuipers L. 1039
Kulczycki S. 1570
Kuramochi Z. 1284
Kurita M. 1635
Kuroda T. 1284
Kustaanheimo P. 1660
Kusunoki J. 1287

L

Laborde P. 1009
Lacey L. 1802
Lacombe D. 965
Laloë M. 1565
Lambek J. 1008
Lampard D. G. 1561
Lange-Nielsen F. 943
Lauffer R. 1033
Laurenti F. 1589
LeCam L. 1549
Lehner J. 1283
Lehto O. 1276
Lelong P. 1308
Lenoble R. 956
Leptin H. 1090, 1091, 1092
Lesieur L. 1152
Lesniak J. 972 К
LeVeque W. J. 990
Levert C. 1560
Levitzki J. 1131
Lindley D. V. 1548
Línek A. 1715
Linis V. 1267
Livesley R. K. 1734
Loeffel H. 1513, 1515
Logan B. F. 1730
Lohwater A. J. 1278
Lombardo-Radice L. 1598, 1614
Lord R. D. 1526
Lorent H. 922
Łoś J. 1085, 1101
Love E. 1442 К
Lucas J. H. 1782
Luce Ch. B. 1845
Ludbrook L. C. 1392
Lundstrom A. A. 1852 II, 1853 II

M

Maak W. 1476
Macdonald N. 1741
Macintyre S. S. 1266
Mac Lane S. 1201
McLaughlin J. E. 1048
McMillan W. R. 1787
Macnee A. B. 1724
Maehly H. J. 1794, 1795
Mahler K. 994
Majo A. de 1576
Makar R. H. 1042
Malgrange B. 1501
Mames J. 1582
Manaresi G. 1322
Manaresi F. 1359
Marcus F. 1624
Marcus M. D. 1050
Marković Ž. 933
Maron M. E. 1706
Martin M. H. 1341
Martinelli E. 1634
Marx I. 1048, 1313
Matsumoto M. 1641
Maurer P. 1799
Meierhofer H. 1790
Men'šov D. E. 1234
Méric J. 1547
Metropolis N. 1060
Meulenbeld B. 1039
Michael E. A. 1166, 1170
Michel P.-H. 954
Mikhail M. N. 1263
Miksa F. L. 1020
Mikusiński J. 991
Miller J. A. 1723
Miller J. T. 1803
Mirguet J. 1628
Mitra S. K. 1539
Miyadera I. 1495, 1496, 1497, 1498
Miyazaki H. 1195
Mohr E. 1309
Monseau 1657
Monteiro A. A. 1164
Moppert K.-F. 1265
Morgenstern D. 1414
Morimoto A. 1083
Morita K. 1178
Morrison J. D. 1846
Moser L. 1008
Mostow G. D. 1094
Mostowski A. 971 К
Moustafa M. D. 1451
Müller C. 1369
Müller M. 987
Munn W. D. 1125
Murnaghan F. D. 1062
Murray A. F. 1764
Myers S. B. 1488
Myrberg L. 1289

N

Nagata J. 1174
Nagata M. 1121
Nagell T. 1002
Nagle T. D. 1034
Nakano H. 1491, 1504 К
Namias W. 1415
Narayanan S. 1578
Natanson I. P. 1258 К
Nathan J. 984
Nehari Z. 1272
Neidthart H. 1770
Néron A. 1613
Netanyahu E. 1370, 1371
Neumann H. 1082
Neveu L. 1514
Nicolau E. 1326
Nicolescu L.-J. 1216
Norris M. J. 1437
Nožička F. 1639

O

Obláth R. 949
Oblonský J. 1759
Ogawa J. 1543
Ohmann D. 1211, 1656
Ohtsuka M. 1304
Okabe J. 1469
Oliveri E. 1315
Oppenheim A. 985

Orgeval B., de 1608
Orkild C. O. 1718
Orlicz W. 1486
Orsinger H. 1037
Orts Aracil J. M. 1463
Osborne J. M. 1778
Osima M. 1061
Osserman R. 1285
Ostrowski A. 1260

P

Palamà G. 1430
Panvini J. 1655
Papapetrou A. 1571
Papas Ch. H. 1471
Papian W. N. 1743
Parodi M. 1040, 1616
Patankar V. N. 1517, 1544
Pearcey T. 1707, 1708
Pellegrino F. 1483
Pennisi L. L. 1411
Pereira Coelho R. 1173
Peremans W. 1160
Perreault W. D. 1840
Perron O. 1428
Pertresco J. 1079
Pic G. 1072
Picinbono B. 1559
Pidek H. 1649, 1650
Pincherle S. 928 К
Pinl M. 1621
Pipping N. 989
Pisot Ch. 980
Pliś A. 1345
Plunkett R. L. 1205
Pogorzelski W. 1271
Pollak H. 1264
Pólya G. 1663
Pontreaghin L. S. 1208 К
Porte J. 920
Poritzky S. B. 1844
Potter J. T. 1820 II
Prachar K. 975
Pucci C. 1360, 1419
Puig Adam P. 1425
Putnam C. R. 1478

Q

Quade W. 1248, 1249
Quine W. V. 966
Qvist B. 1660

R

Rabin M. 1151
Ragab F. M. 1459, 1460
Rainville D. 1442 К
Raisbeck G. 1829 II
Rajagopal C. T. 1447
Ramakrishnan A. 1558
Rasmusesen O. M. 929
Reade M. 1268
Rédei L. 1081
Ree R. 1074
Rees D. 1120
Reeves A. H. 1766
Reich E. 1269
Reissig R. 1321
Rektorys K. 1364
Rényi A. 1505, 1510, 1534
Renzo G. 1577
Reyner J. H. 1812 РЕЦ
Rey Pastor J. 1443 К
Reza F. M. 1396, 1704
Riabouchinsky D. 970 К
Ricci G. 1005
Richter H. 1054
Ridenour L. N. 1746
Rieger L. 968
Riesel H. 1015
Roşculeţ M. N. 1145, 1301
Rose Alan 967
Rose Arthur 1737
Rose G. F. 1437
Rose I. H. 1135
Rosen H. A. 1719
Rosenberg A. 1134
Roth K. F. 974
Roth L. 1612
Ryan R. D. 1708

S

Sáenz A. W. 1651
Sakakihara K. 1175
Salem R. 982
Salzmann H. 1600
Sambo A. 1219
Samelson H. 1200
Samuel P. 984, 1613
San Juan Llosá R. 1557
San Soucie R. L. 1137
Santaló L. A. 1632
Sarton G. 952
Sąsiada E. 1089
Satô M. 1229
Sauer R. M. F. 1627
Sauvage A. 1804
Sawyer D. B. 992, 993
Saxer W. 1291
Scafati M. 1610
Sce M. 1299
Schaefer D. H. 1700
Schenkman E. 1073
Schinzel A. 1019
Schlaeppi H. 1711
Schmeidler W. 1414, 1503 К
Schottlaender S. 1399
Schuster J. 1587
Schwarz E. W. 1703
Sconzo P. 1674
Scott R. E. 1723
Sebastião e Silva J. 923
Segre B. 945
Seidel J. 1658
Seidel W. 1282
Seidenberg A. 1118
Seligman G. B. 1142
Selmer E. S. 1001
Semin F. 1622
Sergescu P. 955
Serre J.-P. 1298
Shapley L. S. 1257
Sharp Th. A. 1755
Shiffman M. 1374
Shimoda I. 1482
Shingo T. 1681
Shipman J. S. 1691
Shockley W. 1825 II, 1830 II
Sierpiński W. 1026 К, 1179
Skillman Th. S. 1854 II
Skolem Th. 963, 964
Slade B. N. 1767
Smiley M. F. 1049
Smith C. D. 1536
Smith E. J. 1760
Soltes A. S. 1723
Soós G. 1643
Speiser A. P. 1710
Spitzer F. 1512
Sponsler G. C. 1730
Stanisic M. M. 1669
Stein P. R. 1060
Steinfeld O. 1081
Steinhaus H. 1552, 1566
Stellmacher K. L. 1353
Sternberg R. L. 1690, 1691
Stoll W. 1296
Stoppelli F. 1323
Stuart A. 1541
Sundrum R. M. 1537
Sunouchi G. 1230, 1232
Švec M. 1327
Szász P. 1574
Szekeres G. 974
Szele T. 1122

T

Takasu T. 1652
Tamura T. 1104, 1105
Tandori K. 1222, 1243
Tanzi Cattabianchi L. 1427
Tatarkiewicz K. 1474
Taton R. 950, 957
Taylor M. K. 1742
Teicher H. 1507
Temple G. 1499
Tenca L. 939, 1619
Teodorescu N. 1363
Thébault V. 1021, 1597
Thierrin G. 1100, 1102
Thimm W. 1293, 1294
Thompson E. G. 1682,1683
Thrall R. M. 1554 К
Thurston H. A. 1153
Thurston W. B. 1691
Tietze H. 1423
Ting Kuan S. Ch. 1680
Titchmarsh E. C. 1380
Tits J. 1096, 1097
Tominaga H. 1128, 1129, 1130
Tompson R. N. 1213
Tonolo A. 948
Torn L. J. 1720
Tornehave H. 1239
Tortrat A. 1522
Toscano L. 1426
Toyoda G. 1127
Tsuboi T. 1087
Tsuchikura T. 1233
Tummers J. H. 1607
Turan P. 976

U

Ullmen J. L. 1262
Ura T. 1334

V

Valle Flores E. 1188
Vaona G. 1620
Varsano S. 1483
Vermes P. 1263
Viet U. 1664
Visser C. 1368
Volkmann B. 986
Volpato M. 1358
Vota L. 1433

W

Walker G. L. 1124
Wallace A. D. 1108, 1203, 1204
Ward L. E., Jr 1189
Ward M. 1006
Warmus M. 1698 К
Watanabe Y. 1448, 1449
Watson G. S. 1531
Wells M. B. 1060
Welti G. R. 1730
Wenzl F. 1250
West Ch. F. 1817 II
Westmijze W. K. 1762
Wey E. 1788
Weyl H. 1161 К
Whittaker J. M. 1273
Wiener N. 961 К
Wild R. E. 1011
Wilder R. L. 1194
Wildmann H. 1027 Д
Willard J. 1731, 1792
Wilson J. D. 926
Wintner A. 1638
Wise M. E. 1528
Wishart J. 1527
Witt E. 1646
Wong Y. Ch. 1644
Wooyenaka Y. 1149
Wright E. M. 1025 К
Wright J. 1606
Wulfsberg A. H. 1747

Y

Yamamuro S. 1492
Yano S. 1224
Young D. M. 1670
Yurtsever B. 1450

Z

Zalokar J. 1529
Zamansky M. 1446
Zappa G. 1065
Zarantonello E. H. 1408
Zaremba S. K. 1088
Zeeman E. Ch. 1197
Zelen M. 1508
Zelinsky D. 1134, 1136
Zemanek H. 1798
Zizicas G. A 1387
Zygmund A. 982, 1238

გოკიელი ლ. 930
ოსიძე გ. 1223
ხახუბია გ. 1376
ბენძუკიძე ა. 1237

周懷衡 1238
張素誠 1199
王世強 1038

## ПОПРАВКИ И ДОПОЛНЕНИЯ

*К реф.* 760 (1955 г.)

Редакция нашла нужным отметить следующий результат, содержащийся в статье Е. И. Бузина, который может иметь прикладное значение.

Решение рассмотренной в этой статье задачи привело к некоторому классу поверхностей, среди которых оказались и поверхности с площадью, меньшей площади полусферы.

*К реф.* 1128 (1955 г.)

На стр. 18, строка 9 снизу, вместо союза «и» читать двоеточие.

*К реф.* 2429 (1955 г.)

В строке 34 сверху читать: $u \overline{\times} v$ вместо $u \times v$; $u \dot{>} v$ вместо $u > v$.

*К реф.* 3584 (1955 г.)

На стр. 9, 27 строка сверху, напечатано «алгебраической независимости», следует читать «линейной независимости». В. М. Архангельская

*К реф.* 5316 (1955 г.)

В конце первого абзаца, после слов «собственного значения матрицы» следует добавить: «Формула доказывается посредством преобразования детерминантных формул Эйткена (A. C. Aitken, Proc. Roy. Soc. Edinburg, 1925 / 26, **46**, 289, 305). Преобразование основано на изучении знаменателей подходящих дробей, получаемых при разложении функций $f_v(z) = \Sigma_{k=0}^{\infty} \int_{k+v} / z^{k+1}$ в непрерывные дроби.». В. Н. Фаддеева

*К реф.* 3842 (1955 г.)

Замечание референта о том, что в формулировке теоремы 1 не оговорена положительность $c$, не является существенным, так как требование положительности $c$ входит в определение гиперболоидов.

*К реф.* 5506 (1955 г.)

Второе предложение в реферате читать: «Групповой искатель состоит из релейного комплекта, магнитного счетчика для регистрации абонентских импульсов и жестко соединенной с ними горизонтали в нескольких координатных переключателях.» Г. Н. Поваров

*К реф.* 5738 (1955 г.)

В теореме 1 вместо $I(f) \cap \alpha$ не может быть множеством 1-й категории на $\alpha$» следует читать: «$\alpha \setminus I(f)$ будет множеством 1-й категории на $\alpha$». В теореме 3 вместо «$S(f) \cap I(f) \cap \alpha$ не является множеством 1-й категории на $\alpha$» следует читать «$\alpha \setminus [S(f) \cap I(f)]$ является множеством 1-й категории на $\alpha$». Г. Ц. Тумаркин

*К реф.* 5938 (1955 г.)

В строке 9 — после слов «наиболее сильной» добавить: «локально выпуклой». Д. А. Райков

*К реф.* 6112 (1955 г.)

Строки 13—14 сверху следует читать: «... Лагранжа, оказывается повышенным на 2 единицы по сравнению ...». Ошибка вкралась по вине редакции.

Технический редактор *В. В. Брунгуль*